Univ. of
Toronto
Library

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci36fran

7330

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président*.

H. POINCARÉ.

E. PICARD.

P. APPELL.

N.....

A. GUILLET, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *G. Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Mazarine, 3, Paris.

48662 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Math
B
3

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. E. CARTAN, J. DRACH, P. DUHEM, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
É. LACOUR, ER. LEBON, S. RINDI, P. H. SCHOUTE, H. G. ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY;
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY
ET DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXVI. — ANNÉE 1912.

(XLVIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179880
24/4/23

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55

1912

QA
1
B8
v.47

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

TIKHOMANDRITZKY (M. I.). — ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES. Nouvelle édition revue, corrigée, complétée de Notes et en partie refaite entièrement. Un vol. gr. in-8, XV-286 pages. Saint-Pétersbourg, imprimerie Böhnke, 1911.

L'Ouvrage dont nous avons à rendre compte avait déjà paru en langue russe, il y a seize ans, en 1895, par les soins de la Société mathématique de Kharkow. Pour accroître le nombre de ses lecteurs, l'auteur s'est décidé à en faire une édition française, après y avoir apporté différentes améliorations.

Depuis Abel et Jacobi, ses illustres fondateurs, cette belle théorie des intégrales abéliennes a suscité des recherches entreprises sous les points de vue les plus variés. Il suffira de rappeler ici les noms de Richelot, de Göpel, de Rosenhain, de Riemann, de Roch, de C. Neumann, de Kœnigsberger, Prym, Krazer, Weber, Thomæ, de Clebsch et Gordan, de Lindemann, Klein, Burkhardt, Nœther, Weierstrass, Schottky, Hettner, Dedekind et H. Weber, de Ch. Hermite, Briot et Bouquet, Elliot, Raffy, Appell, Picard, Goursat,

Poincaré, etc. L'auteur s'est proposé, en combinant les recherches de Weierstrass avec celle de Nœther, de Briot et les siennes propres, d'obtenir une exposition nouvelle des éléments de cette théorie très simple, exempte des difficultés qui ne sont pas inhérentes à la nature de la question, sans rien sacrifier, comme on le fait quelquefois, de la généralité, et en déduisant la théorie des fonctions thêta de celle des intégrales elles-mêmes. Nous donnerons une idée précise de la méthode de l'auteur en analysant la Table des matières de son intéressant exposé.

La première Partie est algébrique. Elle se compose d'une Introduction et de deux Chapitres.

Le Chapitre I expose les propriétés d'une fonction implicite définie par une équation algébrique irréductible. On y traite de la forme générale de l'équation, de son discriminant, des points de ramification et des substitutions qui leur correspondent, de la surface de Riemann sur le plan et sur la sphère, de la connexion des surfaces en général, de la connexion de la surface de Riemann et de sa transformation en une surface élémentaire. Le reste du Chapitre étudie la formule de Riemann pour le nombre p, la détermination du nombre des groupes appartenant aux points de ramification et de leurs ordres par des opérations rationnelles, la méthode de Puiseux et les approximations successives, les paires de fonctions pour chaque lieu de l'image algébrique, le nombre des lacets finaires, le degré du point analytique, les deux facteurs, essentiel et non essentiel, du discriminant.

Le Chapitre II est consacré aux fonctions rationnelles de la variable indépendante et de sa fonction implicite définie par une équation algébrique irréductible donnée. Il contient la théorie des fonctions adjointes, leur division en trois espèces, leur détermination, la décomposition d'une fonction algébrique en éléments simples, le théorème de Riemann-Roch et l'identité de Weierstrass.

La seconde Partie de l'Ouvrage est transcendante. Les différents Chapitres traitent de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales des trois espèces et des propriétés caractéristiques de chaque espèce; des fonctions primaires et des relations entre les périodes des intégrales de première et de seconde espèce; de l'expression d'une fonction algébrique rationnelle de (x, y) uniforme sur la surface de Riemann par les fonctions primaires et du

théorème d'Abel, du problème de Jacobi et enfin des fonctions thêta.

Ce simple exposé indique à nos lecteurs quelle est la marche de l'Ouvrage. L'auteur a réussi à donner une exposition qu'on puisse comprendre sans étude préparatoire. Et il est certain que son Livre se suffit à lui-même. Nous lui souhaitons, dans son édition française, tout le succès qu'en attend l'auteur.

J. J.

PARFENTIEFF (N.-N.), Privat docent à l'Université de Kazan. — ÉTUDES SUR LA THÉORIE DE LA CROISSANCE DES FONCTIONS. In-8°, 192 pages. Kazan, 1910.

Les recherches modernes sur les fonctions entières ont, comme on sait, pour objet principal la recherche des lois asymptotiques : décroissance des coefficients, croissance du module de la fonction, croissance des affixes des zéros, tels sont les éléments qu'on étudie et compare les uns aux autres.

Cet objet est aussi celui du petit Livre que M. Parfentieff vient d'écrire sur cette question, quoique, indépendamment des propositions classiques sur les fonctions entières, il y soit traité de plusieurs autres sujets plus ou moins directement reliés au premier.

L'auteur s'efforce surtout de tirer toutes les conséquences de ce principe asymptotique : « Pour obtenir des lois de croissance pour les fonctions exprimées par une série de Taylor, il suffit très souvent (pas toujours, il est vrai) d'étudier la croissance du terme maximum de la série ». Cette idée n'est pas nouvelle, mais l'auteur la développe de la manière la plus cohérente et la plus large possible.

Jusqu'à quel point on peut aller loin quelquefois à l'aide de ce principe banal, c'est ce qu'on voit en remarquant que, asymptotiquement, on peut quelquefois substituer un polynome à une série de Taylor. Ce polynome est équivalent à la série dans un cercle d'un certain rayon R du plan de la variable complexe. L'auteur déduit de là, en particulier, un théorème donné précédemment par M. Pétrovitch (*Bulletin Soc. math. de France*, 1901) et un autre voisin de celui qu'avait énoncé M. Lindelöf (*Acta*

Societatis Scientiarum Fennicæ, t. XXXV, 1909). Ces énoncés et d'autres analogues rappellent au fond les inégalités connues de Tchébitcheff [*cf. S.* (*Œuvres*, t. I), *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions*. Mais pour Tchébitcheff, celles-ci sont obtenues en cherchant les fonctions qui s'éloignent le moins possible de zéro, tandis que pour l'auteur elles se déduisent de méthodes asymptotiques.

Après l'étude asymptotique des séries de Taylor, l'auteur s'adonne à la même étude pour les fonctions représentées par les produits de Weierstrass.

La méthode qu'il emploie ressemble partiellement à la méthode de M. Borel (*cf.* Borel, *Leçons sur la croissance des fonctions*, 1910); sous l'influence d'un théorème de M. Phragmèn (*Acta mathematica*, t. XXVIII) il arrive au théorème suivant :

Une fonction de genre zéro et d'ordre apparent non supérieur à $\frac{1}{2}$ *ne peut posséder aucun rayon vecteur sur le plan complexe et aucune courbe s'éloignant à l'infini le long desquels son module soit tout le temps décroissant ou reste inférieur à une constante* C.

Et aussi aux inégalités classiques

$$e^{-r^{\rho+\varepsilon}} < |f(x)| < e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} < |f(x)| < e^{-r^{\rho+\varepsilon}} \qquad \left(\rho < \frac{1}{2}\right).$$

(Théorème de Wiman.)

L'auteur tâche aussi d'expliquer l'existence du théorème de M. Picard et des théorèmes analogues, en introduisant une nouvelle notion, la croissance d'une fonction non univoque sur tout le plan de la variable complexe.

L'étude des produits du type de Weierstrass, ainsi que celle de l'influence des arguments des zéros est éclairée par quelques exemples. A cette occasion, l'auteur est conduit à une évaluation approximative du produit $\Gamma(1)\,\Gamma(2)\ldots\Gamma(m+1)$.

Dans l'étude des zéros des fonctions transcendantes, l'auteur a utilisé très souvent le théorème de Gauss-Lucas. « Tout contour fermé convexe environnant le groupe des points-racines de l'équa-

tion proposée entoure aussi le groupe des points-racines de l'équation dérivée. »

L'emploi de ce théorème a conduit, par exemple, l'auteur au théorème suivant :

Si nous avons sur le plan de la variable complexe un secteur de sommet S, *et si les zéros d'une fonction du genre zéro sont disposés en infinité dénombrable sur le rayon* SA *d'un côté et sur le rayon* SB *de l'autre, alors les zéros de sa dérivée sont disposés dans l'intérieur du contour, mais non sur le contour.*

Une certaine place est faite à l'étude des fonctions transcendantes implicites.

Si l'on note encore que l'Ouvrage se termine par des considérations générales sur les nombres transcendants et sur le prolongement analytique, on voit que les matières traitées sont plus variées que le titre et le plan primitif lui-même ne pouvaient le faire prévoir. J. H.

SOMMERVILLE (Duncan M.-Y.). — Bibliography of non euclidian Geometry *including the theory of parallels, the foundations of Geometry, and space of n dimensions.* Un vol. in-8°, xii-403 pages. London, Harrisson and sons, 1911.

Ce Volume a dû coûter beaucoup de travail au savant professeur de l'Université de Saint-Andrews. La Géométrie non euclidienne n'a pas encore un siècle d'existence. Mais comme elle intéresse au plus haut degré l'étude logique des fondements de nos connaissances, elle a été l'objet d'innombrables études, dont plusieurs offrent le plus grand intérêt. M. Sommerville a d'ailleurs été loin de simplifier sa tâche en adjoignant, avec raison, selon nous, les études sur l'espace à n dimensions à celles de tous ceux qui, sciemment ou inconsciemment, ont fait de la Géométrie non euclidienne proprement dite. Sa bibliographie nous a paru d'ailleurs très complète et très bien ordonnée.

Une première Partie contient le Catalogue chronologique. Il commence à Aristote et à Platon. Mais il faut convenir qu'on n'aurait pas grand effort à faire pour savoir ce qui a été écrit sur

le sujet jusqu'au XIXe siècle. Les titres des Ouvrages cités ne représentent guère que 13 pages du Catalogue. Au contraire, il n'y a pas moins de 247 pages pour les travaux parus depuis 1800 jusqu'en 1911.

La seconde Partie contient un Index par ordre de matières. Enfin la troisième Partie contient le Catalogue par noms d'auteurs.

Tous ceux qui feront usage de ce Volume en reconnaîtront, comme nous, l'intérêt et l'utilité. J. J.

MÉLANGES.

SUR LES ÉQUATIONS AUX VARIABLES MÊLÉES ; APPLICATION A LA RECHERCHE DE CERTAINES FAMILLES DE LAMÉ ;

PAR M. J. HAAG,
à Clermont-Ferrand.

1. Considérons l'équation

$$Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2 + \ldots + Y_n Z_n = 0, \tag{1}$$

où les Y_i dépendent de la seule variable y par l'intermédiaire d'une ou plusieurs fonctions inconnues de cette variable, ainsi que de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Les Z_i dépendent, d'une manière analogue, d'une autre variable z. Il s'agit de déterminer les fonctions inconnues pour que l'équation (1), qui est dite *équation aux variables mêlées*, soit satisfaite identiquement.

Pour résoudre une telle question, il existe deux méthodes différentes et également connues. La première consiste, par des différentiations successives, à abaisser progressivement le nombre des termes de (1). Elle conduit rapidement à des calculs compliqués, pour peu que n soit grand. Nous ne nous en occuperons pas.

La seconde méthode est basée sur cette remarque que, si l'on donne à z différentes valeurs numériques, on obtient des équations à coefficients constants entre les Y_i, dont l'ensemble constitue un système différentiel par rapport aux fonctions inconnues de y. Si les fonctions Z_i étaient connues, ce système serait parfaitement déterminé et la seule difficulté du problème serait de rechercher ses solutions. Mais, la plupart du temps, il n'en est rien, et il faut faire des hypothèses sur le nombre et la nature des relations indépendantes qui lient les Y_i. Il en résulte une discussion souvent fort pénible. Le but de cette Note est précisément d'indiquer une marche rationnelle et méthodique, qui simplifie cette discussion et permette de mettre un peu d'ordre dans les tâtonnements qu'on est obligé d'effectuer.

2. Soit p le nombre, au plus égal à n, des relations linéaires distinctes, qui doivent exister entre les Y_i et que nous écrivons ci-dessous

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1^1 Y_1 + a_1^2 Y_2 + \ldots + a_1^n Y_n = 0, \\ a_2^1 Y_1 + a_2^2 Y_2 + \ldots + a_2^n Y_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_p^1 Y_1 + a_p^2 Y_2 + \ldots + a_p^n Y_n = 0. \end{array}\right.$$

Nous allons tâcher de mettre ce système sous la forme la plus avantageuse. A cet effet, nous remarquerons d'abord que les expressions Y_i se présentent généralement sous un aspect plus ou moins compliqué. Convenons de donner les indices les plus forts aux expressions les plus simples. Il est dès lors évident qu'une relation entre les Y_i sera d'autant plus simple qu'elle contiendra moins d'Y_i à faible indice. Notre but doit donc être de transformer le système (A) en une système équivalent, dans lequel les Y_i de petit indice figurent le moins possible. Pour arriver à un tel résultat, la méthode à suivre est la suivante :

Considérons tous les déterminants Δ_s, dont les éléments sont des coefficients de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ dans s quelconques des équations (A). Soit p_1 la plus grande valeur de s pour laquelle il existe au moins un déterminant Δ_s qui ne soit pas nul. Ce nombre peut évidemment varier de 0 à p. Quel qu'il soit, on peut résoudre p_1 des équations (A) par rapport à $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p_1}$. Si l'on porte les valeurs obtenues dans les équations restantes, on obtient $p - p_1$

équations linéaires entre $Y_{p_1+2}, Y_{p_1+3}, \ldots, Y_n$. Il est à remarquer en effet, que la variable Y_{p_1+1} disparaît nécessairement, du fait que tous les déterminants Δ_{p_1+1} sont nuls. Opérons sur ces nouvelles équations comme sur les premières. Nous calculerons Y_{p_1+2}, $Y_{p_1+3}, \ldots, Y_{p_2}$ en fonction des Y_i d'indice supérieur. En portant dans les équations non utilisées, il nous restera $p - p_2 + 1$ équations entre $Y_{p_2+2}, Y_{p_2+3}, \ldots, Y_n$, sur lesquelles nous opérerons encore de la même manière. En continuant ainsi, on arrivera évidemment à épuiser toutes les équations (A). Supposons que la dernière résolution nous donne $Y_{p_{q-1}+2}, Y_{p_{q-1}+3}, \ldots, Y_{p_q}$ en fonction de $Y_{p_q+1}, \ldots, Y_n$. Il est clair que si, maintenant, nous reprenons en sens inverse toutes les équations résolues pour remplacer dans leurs seconds membres les Y_i déjà calculés par leurs valeurs, nous finirons par mettre notre système sous la forme suivante :

$$
(B)\quad
\left\{
\begin{array}{l}
Y_{p_q} = \alpha_{p_q}^{p_q+1} Y_{p_q+1} + \alpha_{p_q}^{p_q+2} Y_{p_q+2} + \ldots + \alpha_{p_q}^{n} Y_n, \\
Y_{p_q-1} = \alpha_{p_q-1}^{p_q+1} Y_{p_q+1} + \ldots + \alpha_{p_q-1}^{n} Y_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
Y_{p_{q-1}+2} = \alpha_{p_{q-1}+2}^{p_q+1} Y_{p_q+1} + \ldots + \alpha_{p_{q-1}+2}^{n} Y_n ; \\
Y_{p_{q-1}+1} = \alpha_{p_{q-1}+1}^{p_q+1} Y_{p_q+1} + \alpha_{p_q-1}^{p_q+1} Y_{p_q+1} + \ldots + \alpha_{p_q-1}^{n} Y_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
Y_{p_{q-2}+2} = \alpha_{p_{q-2}+2}^{p_q+1} Y_{p_{q-1}+1} + \alpha_{p_{q-2}+2}^{p_q+1} Y_{p_q+1} + \ldots + \alpha_{p_{q-2}+2}^{n} Y_n ; \\
Y_{p_{q-2}+1} = \alpha_{p_{q-2}+1}^{p_q+1} Y_{p_q+1} + \alpha_{p_{q-2}}^{p_q+1} Y_{p_q+1} + \alpha_{p_{q-2}}^{p_q+1} Y_{p_q+1} + \ldots + \alpha_{p_{q-2}}^{n} Y_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
Y_1 = \alpha_1^{p_1+1} Y_{p_1+1} + \alpha_1^{p_2+1} Y_{p_2+1} + \ldots + \alpha_1^{p_q+1} Y_{p_q+1} + \ldots + \alpha_1^{n} Y_n.
\end{array}
\right.
$$

D'après la convention sur les indices, on voit que ces équations sont écrites dans leur ordre de simplicité, les plus simples étant les premières. C'est donc dans cet ordre qu'il conviendra de les examiner. Si l'on remplace, dans (1), les Y_i qui se trouvent résolus dans (B) par leur valeur, on devra annuler les coefficients de $Y_{p_1+1}, Y_{p_2+1}, \ldots, Y_{p_q+1}, Y_{p_q+2}, \ldots, Y_n$, quantités linéairement indépendantes. On obtiendra, de cette façon, sous une forme réduite, les $n - p$ relations qui doivent lier les Z_i.

Lorsqu'on fera la discussion, il faudra, pour chaque valeur de p, envisager toutes les combinaisons possibles, qui peuvent être choisies pour les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_q$, en remarquant qu'on

doit toujours avoir

$$(2) \qquad p_q = p - q - 1, \qquad p_k - p_{k-1} = 2.$$

On pourra, par exemple, supposer d'abord $q = 1$ et, par suite, $p_1 = p$. Puis, on supposera $q = 2$ et, par suite, $p_2 = p + 1$. Ici, il faudra faire des hypothèses secondaires, qui seront $p_1 = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$. Dans un troisième cas, on prendra $q = 3$, $p_3 = p + 2$; on fera ensuite différentes suppositions sur les valeurs de p_1 et p_2; et ainsi de suite.

D'ailleurs, nous allons maintenant traiter un exemple, qui achèvera de faire comprendre, de façon nette, comment on doit appliquer les considérations qui précèdent.

3. Dans les *Comptes rendus* du 2 mars 1910, nous avons indiqué une famille de Lamé définie par l'équation

$$(3) \qquad e^x(\cos by - \cos bz) = \rho,$$

où b et c sont deux constantes vérifiant la relation

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1.$$

Proposons-nous de trouver, plus généralement, les familles de Lamé définies par une équation de la forme

$$(4) \qquad e^x(Y + Z) = \rho,$$

Y et Z désignant respectivement une fonction de y et une fonction de z. Il est clair d'ailleurs que les surfaces d'une telle famille se déduisent de l'une d'elles par des translations suivant Ox.

Il nous faut tout d'abord former l'équation qui doit lier Y et Z pour que l'équation (4) représente une famille de Lamé. Pour cela, nous employons l'équation générale des familles de Lamé sous forme de déterminant, comme l'a indiqué M. Darboux [1]. Il n'y a aucune difficulté à former ce déterminant et à constater

---

[1] *Voir*, par exemple, G. Darboux, *Systèmes triples orthogonaux*, p. 20, équ. (43).

qu'on peut l'écrire, grâce à quelques combinaisons de lignes,

$$\begin{vmatrix} Y'^2+Z'^2 & 2Y''^2-Y'Y''' & 2Z''^2-Z'Z''' & 0 & Z'Z'' & Y'Y'' \\ -(Y+Z) & Y'' & Z'' & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2(Y+Z) & 0 & 0 & 0 & Z' & Y' \\ 0 & 2Y' & 0 & Z' & 0 & Y+Z \\ 0 & 0 & 2Z' & Y' & Y+Z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut le développer par rapport aux trois dernières colonnes, suivant la règle de Laplace. On peut aussi, et cela va plus vite, écrire les équations linéaires qui doivent exister entre les éléments des lignes et éliminer ensuite les coefficients de ces équations. On arrive ainsi à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &2Y'Z'(Z''-Y'')[-Z'^2(Y+Z+Y'')-Y'^2(Y+Z+Z'')] \\ &\quad+2(Y+Z)^2(Y''^2-Z''^2)Y'Z' \\ &\quad-2Y'Z'(Y+Z)[(Z''+Y+Z)(2Y''^2-Y'Y'''-Y'^2-Z'^2)] \\ &\qquad\qquad-(Y''+Y+Z)(2Z''^2-Z'Z'''-Z'^2-Y'^2)]=0, \end{aligned}$$

ou, en supprimant le facteur sans intérêt $Y'Z'$,

$$\begin{aligned} &(Y+Z)^2[(Y'Y'''-Y''^2)-(Z'Z'''-Z''^2)] \\ &\quad+(Y+Z)[Z''(Y'Y'''-Y''^2)-Y''(Z'Z'''-Z''^2)+Y''Z''(Z''-Y'')] \\ &\qquad\qquad+Y''^2Z''^2-Z''^2Y'^2+Y''Z''(Y'^2-Z'^2)=0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &(YY''-Y'^2)Z''^2-Y''(YY''-Y'^2)Z''+Y(Y'Y'''-Y''^2)(2Z+Z'') \\ &\quad+(Y'Y'''-Y''^2)Z(Z+Z'')-Y''^2(ZZ''-Z'^2)+Y''Z''(ZZ''-Z'^2)] \\ &\quad-(Y^2+YY'')(Z'Z'''-Z''^2)-(2Y+Y'')Z(Z'Z''-Z''^2) \\ &\qquad\qquad-Z^2(Z'Z'''-Z'^2)+Y^2(Y'Y'''-Y''^2)=0. \end{aligned}$$

Cette équation est précisément de la forme (1), avec $n=10$. Il s'agit de la résoudre.

4. Nous commencerons par la simplifier un peu, en posant

$$Y'^2=2u, \qquad Y''=u'=\frac{du}{dY}, \qquad Y'Y'''=2u\frac{d^2u}{dY^2}=2uu'',$$

$$Z'^2=2v, \qquad Z''=v'=\frac{dv}{dZ}, \qquad Z'Z'''=2v\frac{d^2v}{dZ^2}=2vv''.$$

Nous substituons ainsi les variables Y et Z aux variables indé-

pendantes y et z et les fonctions u et v aux fonctions inconnues Y et Z.

Notre équation est alors identique à l'équation (1) si l'on pose

$$(5)\quad \begin{cases} Y_1 = Y^2(2uu'' - u'^2), & Z_1 = 1, \\ Y_2 = Y(2uu'' - u'^2), & Z_2 = 2Z - v', \\ Y_3 = 2uu'' - u'^2, & Z_3 = Z(Z + v'), \\ Y_4 = -u'(Yu' - 2u), & Z_4 = v', \\ Y_5 = Yu' - 2u, & Z_5 = v'^2, \\ Y_6 = Y(Y + u'), & Z_6 = v'^2 - 2vv'', \\ Y_7 = 2Y + u', & Z_7 = Z(v'^2 - 2vv''), \\ Y_8 = u'^2, & Z_8 = 2v - Zv', \\ Y_9 = u', & Z_9 = -v'(2v - Zv'), \\ Y_{10} = 1, & Z_{10} = Z^2(v'^2 - 2vv''). \end{cases}$$

Il est à remarquer que les indices des Y_i croissent en même temps que les expressions correspondantes deviennent plus simples, conformément à la convention faite au n° 2. Pour les Z_i, c'est plutôt l'inverse qui a lieu.

5. Nous allons, maintenant, pour faciliter la rédaction, nous débarrasser d'une hypothèse particulière, qui se présente fréquemment dans la discussion. Cherchons toutes les solutions, s'il en existe, pour lesquelles on a

$$(6)\qquad u = aY^2 + bY + c,$$

a, b, c désignant des constantes convenables.

Si l'on remarque qu'il est permis, sans changer l'équation (4), d'ajouter une constante arbitraire à Y, quitte à la retrancher de Z, et de multiplier la même fonction par un facteur numérique quelconque, quitte à multiplier aussi Z par ce facteur, on voit aisément qu'il est possible de ramener l'équation (6) à différentes formes canoniques simples. Mais, pour cela, il faut faire des hypothèses sur les coefficients a, b, c.

I. $a = b = 0$. On a

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = 0, \qquad Y_5 = -2c, \qquad Y_6 = Y^2,$$
$$Y_7 = 2Y, \qquad Y_8 = Y_9 = 0, \qquad Y_{10} = 1.$$

Portant dans (1), on a

$$Z_6 = 0, \qquad Z_7 = 0, \qquad -2cZ_8 + Z_{10} = 0,$$

ce qui donne seulement $v' = 0$. De là résulte la solution suivante :

$$e^x(Ay + Bz) = \rho,$$

où A et B sont deux constantes quelconques. Cette solution est sans intérêt, car elle correspond à la translation d'un cylindre.

II. $a = 0$, $b \neq 0$. On peut supposer

$$u = Y,$$

d'où

$$Y_1 = -Y^2, \qquad Y_2 = -Y, \qquad Y_3 = -1, \qquad Y_4 = Y, \qquad Y_5 = -Y,$$
$$Y_6 = Y^2 + Y, \qquad Y_7 = 2Y - 1, \qquad Y_8 = Y_9 = Y_{10} = 1.$$

Portant dans (1), il vient

$$-Z_1 + Z_6 = 0, \qquad -Z_2 + Z_4 - Z_5 - Z_6 + 2Z_7 = 0,$$
$$-Z_3 - Z_7 + Z_8 + Z_9 + Z_{10} = 0,$$

ou

$$2vv'' - v'^2 + 1 = 0, \qquad vv'' = 0, \qquad (v' - 1)(Zv' - v) = 0;$$

ce qui donne les deux solutions

$$v = \pm Z,$$

auxquelles correspondent les équations

$$e^x(y^2 + z^2 + A) = \rho,$$
$$e^x(y^2 - z^2 + A) = \rho.$$

Les surfaces de la première famille sont de révolution autour de Ox et constituent une solution évidente. La seconde, au contraire, se compose de surfaces admettant des hyperboles équilatères comme sections par les plans parallèles à yOz. Elle constitue une solution qui semble entièrement nouvelle et loin d'être évidente.

III. $a \neq 0$. On peut supposer $b = 0$ et prendre

$$u = aY^2 + c,$$

d'où

$$Y_1 = 4acY,\quad Y_2 = 4acY,\quad Y_3 = 4ac,\quad Y_4 = 4acY,\quad Y_5 = -2c,$$
$$Y_6 = (1+2a)Y^2,\quad Y_7 = 2(1-a)Y,\quad Y_8 = 4a^2Y^2,\quad Y_9 = 2aY,\quad Y_{10} = 1.$$

Portons dans (1), il vient

$$4acZ_1 + (1-2a)Z_6 - 4a^2Z_8 = 0,$$
$$4ac(Z_2 + Z_4) + 2(1-a)Z_7 - 2aZ_9 = 0,$$
$$4acZ_3 - 2cZ_5 + Z_{10} = 0,$$

ou

$$(7)\quad \begin{cases} (1+2a)Z_6 + 4a^2Z_8 = -4ac, \\ (1+a)ZZ_6 - av'Z_8 = -4ac(Z+v'), \\ Z^2Z_6 \qquad\qquad = 2c[v'^2 - 2aZ(Z+v')]. \end{cases}$$

Si l'on élimine Z_6 et Z_8 entre ces trois équations, ce qui n'offre aucune difficulté, on obtient une équation homogène et du troisième degré en Z, v', et dont le terme en Z^3 ne peut disparaître tant que a n'est pas nul. Cette équation ne peut donc se réduire à une identité et donne, par suite,

$$\frac{v'}{Z} = \text{const.} = 2a'.$$

D'où

$$v = a'Z^2 + c'.$$

Si l'on porte dans (7), on obtient les trois conditions

$$(8)\quad \begin{cases} ac - a'c' + 2ac'(a-a') = 0, \\ ac - a'c' + 2aa'(c-c') = 0, \\ ac - a'c' + 2a'c(a-a') = 0. \end{cases}$$

Retranchons la troisième de la première

$$(a-a')(a'c - c'a) = 0.$$

D'où plusieurs solutions :

1° $c = c' = 0$; les trois équations (8) sont vérifiées; on arrive à une équation de la forme

$$e^x(e^{my} + e^{nz}) = 0 \qquad (m, n = \text{const.}).$$

Les surfaces correspondantes sont encore des cylindres; cette solution est donc sans intérêt.

2° $a = a'$; les trois équations (8) donnent $c = c'$; on obtient alors l'équation

$$e^x(\cos my + \cos mz) = \rho \qquad (m = \text{const.}).$$

En faisant tourner les axes de $\frac{\pi}{4}$ et changeant la valeur de m, on peut encore l'écrire

$$x + \log \cos my - \log \cos mz = \rho,$$

de sorte que cette solution doit faire partie de la solution de Bouquet [1], ce qu'il est aisé de vérifier au moyen des résultats établis par ce géomètre.

3° $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$; les équations (8) se réduisent à

$$a + a' + 2aa' = 0.$$

Un calcul simple conduit ensuite à l'équation (3).

6. Commençons maintenant notre discussion générale. Nous allons supposer successivement qu'on donne à p les valeurs 10, 9, 8, 7, 6, 5. Il sera inutile d'examiner les autres valeurs, car elles donneraient entre les Z_i un nombre de relations supérieur à 5, ce qui nous ramènerait à des cas déjà étudiés, puisque les variables Y et Z jouent des rôles entièrement symétriques.

L'hypothèse $p = 10$ ne peut convenir, puisque Y_{10} ne saurait être nul.

De même, si $p = 9$ ou 8, comme on a $p_q \geqq p$, d'après (2), on voit qu'il y aura nécessairement au moins une relation entre Y_8, Y_9, Y_{10}, ce qui donnera *une valeur constante pour* u' et, par suite, pour u, une expression rentrant dans la forme (6).

Supposons maintenant $p = 7$. Si nous voulons éviter de retomber sur le cas précédent, il nous faut prendre $p_q = 7$; d'où $q = 1$, d'après (2). Les deux premières équations (B) s'écrivent alors

$$Y = \alpha u'^2 - \beta u' + \gamma. \tag{9}$$

$$Y^2 - Y u' + \alpha' u'^2 - \beta' u' + \gamma' = 0. \tag{10}$$

---

[1] *Voir* G. Darboux, *loc. cit.*, p. 21.

Éliminons Y,

$$(\alpha u'^2 + \beta u' + \gamma)^2 + u'(\alpha u'^2 + \beta u' + \gamma) - \alpha' u'^2 + \beta' u' + \gamma' = 0.$$

Comme u' ne peut être constant, il faut que cette équation soit identique; or, en annulant le coefficient de u'^4, on a $\alpha = 0$. Mais alors u' est fonction linéaire de Y; on retombe encore sur (6).

Supposons $p = 6$. Pour que u' ne soit pas constant, il faut prendre $q = 1$, ou $q = 2$.

I. $q = 1$. La première équation (B) s'écrit

$$\text{(11)} \qquad Y(Y + u' + m) + \alpha u'^2 + \beta u' + \gamma = 0.$$

Nous pourrions écrire en même temps les autres équations (B) et voir, par des éliminations convenables, si elles sont compatibles avec la précédente. Mais, nous arriverons au même résultat en étudiant directement cette dernière, ce qui nous servira pour les cas suivants.

Remarquons d'abord qu'en ajoutant une constante à Y, on peut supposer $m = 0$. Débarrassons-nous maintenant du *cas particulier où* α *est nul*. Nous avons

$$u' = -\frac{Y^2 + \gamma}{Y + \beta}.$$

Si $\gamma = -\beta^2$, on retombe, en intégrant, sur l'équation (6). Si $\gamma \neq -\beta^2$, on obtient, dans l'expression de u, un terme en $\log(Y + p)$; or, ceci n'est pas possible, car la seconde équation (B) montre que *u doit être fonction algébrique de* Y.

Soit maintenant $\alpha \neq 0$. L'équation (11) représente une conique, quand on y regarde Y et u' comme des coordonnées courantes. On peut donc exprimer Y et u' en fonction rationnelle d'un paramètre t. Dans ce but, écrivons (11) sous la forme

$$Y(Y + u') = K(u' - a)(u' - b) \qquad (a, b, K = \text{const.}).$$

Posons

$$u' - a = tY,$$

il vient

$$u' = \frac{a - Kbt^2}{1 + t - Kt^2}, \qquad Y = \frac{-a + K(a - b)t}{1 + t - Kt^2}.$$

Il est utile maintenant de décomposer ces deux fractions ra-

tionnelles en éléments simples, ce qui nous conduit à distinguer deux cas, suivant que le dénominateur admet une racine double ou non.

Premier cas: $K = -\frac{1}{4}$. — En posant $\theta = t + 2$, nous avons

$$(12) \qquad Y = \frac{A}{\theta} - \frac{B}{\theta^2}, \qquad u' = b - \frac{4b}{\theta} + \frac{2B}{\theta^2}$$

avec

$$A = b - a, \qquad B = 2(a + b), \qquad 4b = 2A + B.$$

De là, on tire

$$du = u'\,dY = \left(b - \frac{4b}{\theta} - \frac{2B}{\theta^2}\right)\left(-\frac{A}{\theta^2} + \frac{2B}{\theta^3}\right)d\theta,$$

d'où

$$(13) \qquad u = u_0 + \frac{Ab}{\theta} - \frac{4b^2}{\theta^2} + \frac{2B(3A + B)}{3\theta^3} - \frac{B^2}{\theta^4}.$$

Portons maintenant ces valeurs de Y, u', u dans la troisième (B), qui s'écrit

$$(14) \qquad u'(Yu' - 2u) = m'Y + \alpha' u'^2 + \beta' u' + \gamma'.$$

Le second membre est du quatrième degré au plus en $\frac{1}{\theta}$. Or, $Yu' - 2u$ admet pour terme de plus haut degré $-\frac{B^2}{3\theta^3}$. Donc, le premier membre contient le terme $-\frac{2B^3}{3\theta^5}$. Il faut, par conséquent, que B soit nul. Mais alors, si l'on se reporte aux équations (12), on voit que u' est fonction linéaire de Y; on retombe donc sur (6).

Deuxième cas: $K \neq -\frac{1}{4}$. — Appelons t_1 et t_2 les deux racines du dénominateur commun à u' et Y. On a

$$(15) \qquad u' = b - \frac{t_1\omega_1}{t - t_1} + \frac{t_2\omega_2}{t - t_2}, \qquad Y = \frac{\omega_1}{t - t_1} + \frac{\omega_2}{t - t_2}$$

avec

$$\omega_1 = \frac{bt_1 + at_2}{t_1 - t_2}, \qquad \omega_2 = \frac{at_1 + bt_2}{t_2 - t_1}.$$

Puis

$$\frac{du}{dt} = \left[b - \frac{t_1\omega_1}{t - t_1} - \frac{t_2\omega_2}{t - t_2}\right]\left[-\frac{\omega_1}{(t - t_1)^2} - \frac{\omega_2}{(t - t_2)^2}\right]$$
$$= -b\left[\frac{\omega_1}{(t - t_1)^2} + \frac{\omega_2}{(t - t_2)^2}\right] - \frac{t_1\omega_1^2}{(t - t_1)^3} - \frac{t_2\omega_2^2}{(t - t_2)^3} - \omega_1\omega_2 P.$$

en posant

$$P = \frac{t_2(t-t_1)+t_1(t-t_2)}{(t-t_1)^2(t-t_2)^2}$$
$$= \frac{1}{t_1-t_2}\left[\frac{t_1}{(t-t_1)^2} - \frac{t_2}{(t-t_2)^2} + \frac{1}{t-t_2} - \frac{1}{t-t_1}\right].$$

En intégrant, nous aurons donc les termes

$$\frac{\omega_1\omega_2}{t_1-t_2}\log\frac{t-t_1}{t-t_2}.$$

Comme *u doit être fonction algébrique de* Y *et, par suite, de t*, il faut que $\omega_1\omega_2$ soit nul. Or, si $\omega_2 = 0$, par exemple, les équations (15) donnent, pour u', une fonction linéaire de Y. On retombe encore sur (6).

II. $q = 2$. La première équation (B) donne (9). Si $p_1 \leq 4$, la deuxième donne (10), et l'on retombe sur une hypothèse examinée. *Il nous faut donc prendre* $p_1 = 5$.

Procédons comme plus haut. Posons

$$u' = t, \qquad Y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma, \tag{16}$$

d'où

$$u = u_0 + \frac{\beta t^2}{2} + \frac{2\alpha t^3}{3}. \tag{17}$$

Or, la deuxième (B) s'écrit

$$Yt - 2u = mY(Y+t) + \alpha' t^2 + \beta' t + \gamma'. \tag{18}$$

Si $\alpha \neq 0$, le premier membre admet comme terme de plus haut degré $-\frac{\alpha t^3}{3}$; le second membre est du quatrième degré, si m n'est pas nul, du second degré si m est nul. Dans les deux cas, on arrive à une impossibilité. D'autre part, si $\alpha = 0$, on retombe toujours sur (6).

7. Arrivons enfin à la *dernière hypothèse pour p, qui est* $p = 5$.

Pour que u' ne soit pas constant, il faut prendre $q = 1$, 2 ou 3.

I. $q = 1$. La première équation (B) est de la forme

$$Yu' - 2u = AY(Y+u') - mY + \alpha u'^2 + \beta u' - \gamma. \tag{19}$$

En portant dans la seconde, il vient

$$(20)\qquad (A' + Au')Y(Y + u') + (m' + mu')Y + (\alpha' + \alpha u')u'^2 + (\beta' + \beta u')u' + \gamma' + \gamma u' = 0.$$

Voyons d'abord si ceci peut être une identité relativement à Y et u'.

On aurait successivement

$$A = 0, \qquad A' = 0, \qquad m = 0, \qquad m' = 0, \qquad \alpha = 0.$$

Arrivé ici, il est inutile d'aller plus loin, car l'équation (19) se réduit à

$$u'(Y - \beta) - 2u = \gamma,$$

qui a pour intégrale générale

$$u = -\frac{\gamma}{2} - K(Y - \beta)^2 \qquad (K = \text{const.});$$

on retombe sur l'équation (6).

Donc *l'équation* (20) *ne saurait être vérifiée identiquement.* Voyons si elle est compatible avec (19). A cet effet, posons $u' = t$ et transformons l'équation différentielle (19) en gardant les variables t et Y. Pour cela, il suffit de la différentier par rapport à Y, on trouve de suite

$$\frac{dt}{dY}[(A - 1)Y + 2\alpha t + \beta] + [2AY + (A + 1)t + m] = 0.$$

ou

$$(21)\qquad \frac{dt}{P} = \frac{dY}{Q},$$

en posant

$$P = 2AY + (A + 1)t + m, \qquad Q = (1 - A)Y - 2\alpha t - \beta.$$

D'autre part, l'équation (20) est de la forme

$$(22)\qquad F(Y, t) = Y^2(a + At) + Y(At^2 + ct + d) + et^3 + ft^2 + gt + h = 0.$$

Différentiant totalement et tenant compte de (21) on a

$$(23)\qquad Q\frac{\partial F}{\partial Y} + P\frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Les équations (22) et (23) doivent admettre une infinité de

solutions communes en Y et t. Cela revient à dire que les deux cubiques qu'elles représentent, quand Y et t sont regardées comme les coordonnées courantes, coïncident, ou bien se décomposent et ont une partie commune.

Si les cubiques ne se décomposent pas, il ne peut y avoir de terme en Y^3 dans (23); ceci nous donne $A = 0$. Mais alors l'équation (21) est linéaire en Y, et admet pour intégrale générale

$$Y = -2\alpha(t+m)\log(t+m) + K(t+m) + \beta - 2\alpha m \qquad (K = \text{const.}).$$

On voit que Y n'est algébrique en t que si $\alpha = 0$, auquel cas on retombe de nouveau sur (6).

Il faut donc que les cubiques se décomposent. Si leur partie commune est une droite, la relation entre Y et t est linéaire, ce qui conduit toujours à l'équation (6). Supposons donc que cette partie commune soit une conique

$$G(Y, t) = 0. \tag{24}$$

Tous ses points devront vérifier l'équation

$$Q\frac{\partial G}{\partial Y} + P\frac{\partial G}{\partial t} = 0, \tag{25}$$

laquelle représente aussi une conique, qui ne peut que coïncider avec la première. Or, l'équation (25) est vérifiée pour

$$\frac{\partial G}{\partial Y} = \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

La conique (24) contient donc son propre centre et, par suite, se décompose en deux droites. On retombe sur une équation linéaire entre Y et t.

II. $q = 2$. La première équation (B) est de la forme (11). La seconde définit nécessairement *u comme fonction algébrique de* Y, car il est facile de voir que, quelle que soit la valeur de p_1 ($p_1 = 4$, ou $p_1 < 4$), u ne peut disparaître de cette équation, si l'on suppose toutefois que u' n'est pas constant, ce qui est permis. Si l'on se reporte au numéro précédent, on voit qu'on se trouve nécessairement dans le cas des équations (12) et (13), seul cas où u peut être algébrique en Y.

Ceci étant, si $p_1 = 4$, la deuxième équation (B) est de la forme

$$u'(Yu' - 2u) = m'(Yu' - 2u) - n'Y + \alpha' u'^2 + \beta' u' + \gamma'.$$

Le second membre est au plus du quatrième degré en $\frac{1}{\theta}$, tandis qu'au premier, il y a le terme $-\frac{2B^3}{3\theta^5}$. Il faut donc que B soit nul; or, cette hypothèse a été examinée.

Si $p_1 < 4$, la deuxième équation (B) est

$$Yu' - 2u = m'(2Y + u') - \alpha' u'^2 + \beta' u' + \gamma'.$$

Le second membre est du quatrième ou du second degré en $\frac{1}{\theta}$ suivant que α' est différent de zéro ou nul. Or, le premier est du troisième degré; l'équation ne peut donc être vérifiée.

III. $q = 3$. La première équation (B) est de la forme (9).

Si $p_2 < 5$, la seconde est de la forme (10); les conclusions du cas de $p = 7$ sont applicables.

Si $p_2 = 5$, elle est, au contraire, de la forme (18), et l'on rentre dans l'hypothèse $p = 6$, $q = 2$, examinée plus haut.

En résumé, nous avons prouvé que, si l'on excepte les solutions comprenant des cylindres ou des surfaces de révolution coaxiales, il n'existe que les trois familles suivantes qui soient de la forme demandée :

$$e^x(y^2 - z^2 + A) = 0,$$

$$e^x(\cos my + \cos mz) = 0 \qquad (m = \text{const.}),$$

$$e^x(\cos by + \cos cz) = 0 \qquad \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1\right).$$

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES COURBES DANS UN ESPACE D'ORDRE QUELCONQUE;

PAR M. C. GUICHARD.

CHAPITRE I. — *Propriétés communes à toutes les courbes.*

1. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des fonctions d'une variable u; on dit que le point M, qui a pour coordonnées $X_1, X_2, \ldots X_n$, décrit, quand u varie, une courbe située dans l'espace à n dimensions.

Si l'on effectue, sur les variables X, une substitution orthogonale à coefficients constants, on obtient de nouvelles fonctions de u, Y_1, $Y_2, \ldots, Y_n$. Par définition, la courbe décrite par le point Y_1, $Y_2, \ldots, Y_n$ est *dite égale* à la courbe primitive.

Une *propriété métrique* d'une courbe est une propriété qui subsiste quand on effectue, sur les variables X, une substitution orthogonale à coefficients constants.

Nous supposerons toujours qu'il n'existe pas de relations linéaires à coefficients constants entre les n fonctions X; s'il en était autrement, on pourrait, par une substitution orthogonale, réduire cette relation à l'une ou l'autre des formes

$$Y_n = \text{const.}, \qquad Y_{n-1} + Y_n = \text{const.}$$

Dans le premier cas, on pourrait supprimer la coordonnée Y_n; dans le second, les coordonnées Y_{n-1} et Y_n. On serait ramené à étudier une courbe relevée dans un espace d'ordre moindre que n.

Il résulte de là que le déterminant

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{dX_1}{du} & \frac{dX_2}{du} & \cdots & \frac{dX_n}{du} \\ \frac{d^2X_1}{du^2} & \frac{d^2X_2}{du^2} & \cdots & \frac{d^2X_n}{du^2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d^nX_1}{du^n} & \frac{d^nX_2}{du^n} & \cdots & \frac{d^nX_n}{du^n} \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul.

2. Soient toujours $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les coordonnées du point N qui décrit une courbe C; considérons le point N, dont les coordonnées sont

$$(2)\qquad Y_1 = X_1 + \lambda \frac{dX_1}{du}, \qquad Y_2 = X_2 + \lambda \frac{dX_2}{du}, \quad Y_n = X_n + \lambda \frac{dX_n}{du}.$$

Si u reste fixe et si λ varie, on dit que le point N décrit une droite. Cette droite est la *tangente* à la courbe C au point M. Les *paramètres directeurs* de la tangente sont des quantités proportionnelles à $\frac{dX_1}{du}, \frac{dX_2}{du}, \ldots, \frac{dX_n}{du}$; si donc on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les paramètres directeurs de la courbe, on aura

$$(3)\qquad \frac{\frac{dX_1}{du}}{x_1} = \frac{\frac{dX_2}{du}}{x_2} = \ldots = \frac{\frac{dX_n}{du}}{x_n}.$$

Ces paramètres directeurs sont des fonctions de v. Le déterminant Δ n'étant pas identiquement nul, il en sera de même du déterminant

$$(4)\qquad D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dx_2}{du} & \ldots & \frac{dx_n}{du} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^{n-1}x_1}{du^{n-1}} & & \ldots & \frac{d^{n-1}x_n}{du^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Si, dans la formule (2), on fait varier u et λ le point N décrit une variété ∞^2 qui est la *première développable* circonscrite à la courbe C.

3. Considérons maintenant le point P, dont les coordonnées sont

$$(5)\qquad \begin{cases} Z_1 = X_1 + \lambda_1 \frac{dX_1}{du} + \lambda_2 \frac{d^2X_1}{du^2}, \quad Z_2 = X_2 + \lambda_1 \frac{dX_2}{du} + \lambda_2 \frac{d^2X_2}{du^2}, \quad \ldots, \\ \qquad Z_n = X_n + \lambda_1 \frac{dX_n}{du} + \lambda_2 \frac{d^2X_n}{du^2}. \end{cases}$$

Si, dans la formule (5), on suppose u fixe et qu'on fasse varier λ_1 et λ_2, le point P décrit une variété linéaire ∞^2; c'est le 1 — *plan osculateur* à la courbe C au point M. Si l'on fait varier u aussi, c'est-à-dire si l'on prend tous les 1 — plans osculateurs de la

courbe, le point P décrit une variété ∞^3, c'est la *deuxième développable* circonscrite à la courbe C.

D'une manière générale, si l'on pose

$$(6)\qquad T_i = X_i + \lambda_1 \frac{dX_i}{du} + \lambda_2 \frac{d^2 X_i}{du^2} + \ldots + \lambda_p \frac{d^p X_i}{du^p} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ p \leqq n-1. \end{pmatrix}$$

Le point qui a pour coordonnées T_i, décrit, quand u est fixe et les λ variables, le $p-1$ — *plan osculateur* à la courbe au point M ; et si l'on fait ensuite varier u, on a la $p^{\text{ième}}$ *développable* circonscrite à la courbe.

Il est clair que le p — plan osculateur en un point contient le $p-1$ — plan osculateur au même point.

Il est clair aussi que les variétés qui viennent d'être définies restent identiques à elles-mêmes si l'on effectue un changement de variable.

Si l'on introduit les paramètres directeurs de la tangente x_1, x_2, ..., x_n, les formules (6) se mettent sous la forme

$$(7)\qquad T_i = X_i + \rho_1 x_i + \rho_2 \frac{dX_i}{du} + \ldots + \rho_p \frac{d^{p-1} x_i}{du^{p-1}}.$$

4. *Courbes parallèles.* — Soient C et C′ deux courbes décrites par les points M (X_1, X_2, ..., X_n) et M′ (X'_1, X'_2, ..., X'_n) ; on appelle *points correspondants* sur ces courbes les points qui correspondent à la même valeur de la variable u. Cela posé, les courbes C et C′ sont dites *parallèles* si aux points correspondants M et M′ les tangentes à ces courbes sont parallèles, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{\frac{dX_1}{du}}{\frac{dX'_1}{du}} = \frac{\frac{dX_2}{du}}{\frac{dX'_2}{du}} = \frac{\frac{dX_3}{du}}{\frac{dX'_3}{du}} = \ldots = \frac{\frac{dX_n}{du}}{\frac{dX'_n}{du}}.$$

On peut encore dire : *Pour que deux courbes soient parallèles, il suffit que les paramètres des tangentes à ces courbes soient les mêmes.*

Les formules (7) montrent que *les p — plans osculateurs à ces courbes, aux points correspondants, sont parallèles.*

5. Problème. — *Déterminer une courbe connaissant les paramètres directeurs de ses tangentes.* — Je suppose donné x_1, x_2, ..., x_n; il s'agit de trouver X_1, X_2, ..., X_n. Le déterminant D (§ 2) étant différent de zéro, on pourra trouver des fonctions P_1, P_2, ..., P_n telles qu'on ait

$$(8)\qquad \frac{d^n X_i}{du^n} = \rho_1 \frac{d^{n-1} x_i}{du^{n-1}} = \rho_2 \frac{d^{n-2} x_i}{du^{n-2}} + \ldots + \rho_n x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Je pose ensuite

$$(9)\qquad X_i = r_1 \frac{d^{n-1} x_i}{du^{n-1}} + r_2 \frac{d^{n-2} x_i}{du^{n-2}} + \ldots + r_n x_i,$$

r_1, r_2, ..., r_n étant des fonctions de u qu'il s'agit de déterminer.

En différentiant la formule (9) on aura, en tenant compte des formules (8),

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dX_i}{du} = {} & \frac{d^{n-1} x_i}{du^{n-1}}\left(r_2 + \frac{dr_1}{du} - r_1\rho_1\right) + \frac{d^{n-2} x_i}{du^{n-1}}\left(r_3 + \frac{dr_2}{du} - r_1\rho_2\right) + \ldots \\ & + \frac{dx_i}{du}\left(r_n + \frac{dr_{n-1}}{du} + r_1\rho_{n-1}\right) + x_i\left(\frac{dr_n}{du} + \rho_n r_1\right). \end{aligned}\right.$$

On devra donc avoir

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} & r_2 + \frac{dr_1}{du} + r_1\rho_1 = 0, \\ & r_3 + \frac{dr_2}{du} + r_1\rho_2 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & r_n + \frac{dr_{n-1}}{du} + r_1\rho_{n-1} = 0. \end{aligned}\right.$$

On voit qu'on peut prendre arbitrairement la fonction r_1; les formules (11) déterminent ensuite, de proche en proche, r_2, r_3, ..., r_n. On voit que la solution générale dépend d'une fonction arbitraire d'une variable.

Il est clair que nous avons aussi résolu le problème suivant : *Déterminer toutes les courbes parallèles à une courbe donnée.*

Si x_1, x_2, ..., x_n sont des fonctions algébriques de u, P_1, P_2, ..., P_n seront aussi des fonctions algébriques; si donc on prend pour r_1 une fonction algébrique de u, les fonctions r_2, r_3, ..., r_n seront algébriques, il en sera de même des X ; et, par conséquent,

la courbe sera une courbe algébrique. On établit facilement la réciproque.

6. *Propriété des courbes parallèles.* — Soient $M(X_1, \ldots X_n)$ et $M'(X'_1, \ldots X'_n)$ deux points qui décrivent des courbes parallèles. On aura

$$(12) \qquad \frac{dX_i}{du} = Hx_i, \qquad \frac{dX'_i}{du} = H'x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Un point N de la droite MM′ a des coordonnées $r_1, r_2, \ldots, r_n$ qui sont de la forme

$$(13) \qquad Z_i = X_i + \lambda[X'_i - X_i].$$

En différentiant, on aura

$$\frac{dZ_i}{du} = [H + \lambda(H' - H)]x_i + \frac{d\lambda}{du}[X'_i - X_i].$$

Si λ est constant, la courbe décrite par le point N est parallèle aux courbes données.

Si l'on choisit λ de telle sorte que

$$(14) \qquad H + \lambda(H' - H) = 0,$$

la courbe décrite par le point N est tangente à la droite MM′, donc :

La droite qui joint les points correspondants de deux courbes parallèles reste tangente à une courbe fixe, ou encore *deux courbes parallèles appartenant à une même première développable.*

Dans le cas particulier où $H' = H$, λ est infini ; dans ce cas les deux courbes sont égales et la droite MM′ conserve une direction fixe.

Considérons maintenant trois points $M(X_1, X_n)$; $M'(X'_1, \ldots, X'_n)$; $M''(X''_1, \ldots, X''_n)$ qui décrivent des courbes parallèles et supposons de plus que les trois points M, M′, M″ ne soient pas en ligne droite. Un point $N(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ situé dans le 1— plan M, M′, M″ a des coordonnées de la forme

$$(15) \qquad Z_i = X_i + \lambda(X'_i - X_i) + \mu(X''_i - X_i).$$

On a d'ailleurs

$$(16)\qquad \frac{dX_i}{du} = Hx_i, \qquad \frac{dX'_i}{du} = H'x_i, \qquad \frac{dX''_i}{du} = H''x_i.$$

En différentiant l'équation (15) on a d'abord

$$\frac{dZ_i}{du} = x_i[H + \lambda(H' - H) + \mu(H'' - H)] + \frac{d\lambda}{du}(X'_i - X_i) - \frac{d\mu}{du}(X''_i - X_i).$$

En établissant entre λ et μ la relation

$$(17)\qquad H + \lambda(H' - H) + \mu(H'' - H) = 0,$$

on aura

$$(18)\qquad \frac{dZ_i}{du} = \frac{d\lambda}{du}(X'_i - X_i) + \frac{d\mu}{du}(X''_i - X_i).$$

En différentiant encore une fois

$$\frac{d^2Z_i}{du^2} = x_i\left[(H' - H)\frac{d\lambda}{du} + (H'' - H)\frac{d\mu}{du}\right] + \frac{d^2\lambda}{du^2}(X'_i - X_i) + \frac{d^2\mu}{du^2}(X''_i - X_i).$$

Établissons la relation

$$(19)\qquad (H' - H)\frac{d\lambda}{du} + (H'' - H)\frac{d\mu}{du} = 0,$$

on aura

$$(20)\qquad \frac{d^2Z_i}{du^2} = \frac{d^2\lambda}{du^2}(X'_i - X_i) + \frac{d^2\mu}{du^2}(X''_i - X_i).$$

Des relations (17) et (19) on déduit

$$(21)\qquad \frac{dH}{du} + \lambda\frac{d(H' - H)}{du} + \mu\frac{d(H'' - H)}{du} = 0.$$

Si donc, on détermine λ et μ par les équations (17) et (21) les équations (18) et (20) seront vérifiées ; elles montrent que le plan M, M', M'' est le 1—plan osculateur de la courbe décrite par le point N. Donc :

Le 1—plan qui contient les points correspondants de trois courbes parallèles est le 1—plan osculateur d'une courbe.

On arrive à des résultats analogues pour les p—plans qui contiennent les points correspondants de $p + 2$ courbes parallèles.

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

NIEWENGLOWSKI (B.). — *Cours de Géométrie analytique*. T. I : Sections coniques. 2e édit. In-8. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

STAMATI (Leonid v.). — *Das Problem, m. den vermeintlichen Mars-Bewohnern e. Verbindung herzustellen, erreicht*. Gr. in-8, 31 p. Zürich, Art. Institut Orell Füssli. 2 m.

STOLZ (Otto) u. GMEINER (J.-A.). — *Theoretische Arithmetik*. 1. Abtlg. Allgemeines. Die Lehre v. den rationalen Zahlen. 2. Aufl., umgearb. v. *J.-Ant. Gmeiner*. (3. Aufl. der Abschnitte I-IV des 1. Teiles der Vorlesgn. üb. allgemeine Arithmetik v. O. Stolz). (*B.-G. Teubner's, Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.*) Gr. in-8, VI-148 p. avec 8 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 5 m. 20.

YOUNG (J.-W.-A.). — *Monograph on topics of modern mathematics relevant to the elementary field;* by various Authors. In-8. London, Longmans. 10 s. 6 d.

CHWOLSON (O.-D.). — *Traité de Physique*. Ouvrage traduit sur les éditions russe et allemande par *E. Davaux*. T. III, 3e fascicule : Propriétés des vapeurs. Equilibre des substances en contact. In-8, VI- p. 745 à 1008 avec 93 fig. dans le texte. Paris, A. Hermann et fils. 9 fr.

PÉCHEUX (H.). — *Les lampes électriques*. In-8, 180 p. avec 38 fig. Paris, Gauthier-Villars, Masson et Cie. 2 fr. 50; cart., 3 fr.

BROGGI (Hugo). — *Versicherungsmathematik*. Deutsche Ausg. In-8 VIII-360 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 7 m.; relié, 8 m.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous la direction de Jules MOLK. T. II, vol. 2, fasc. 1. Analyse algébrique, d'après *A. Pringsheim* et *G. Faber*, par *Jules Molk*. Fonctions analytiques, d'après *F.-W. Osgood* par *P. Boutroux* et *Jean Chazy*. In-8, 96 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 75.

— T. III, vol. 1, fasc. 1. Coniques d'après *F. Dingeldey*, par *E. Fabry*. In-8, 160 p. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr.

GRANVILLE (W.-Anthony). — *Elements of the differential and integral calculus*, with the editorial coöperation of *Percey F. Smith*. Rev. ed. XV-463 p. Boston, Ginn. 2,50 dollars.

London mathematical Society, Proceedings. 2e série. Vol. 9. In-8. London, F. Hodgson. 25 s.

MANGOLDT (Hans v.). — *Einführung in die höhere Mathematik f. Studierende u. zum Selbststudium.* 1. Bd. : Anfangsgründe der Infinitesimalrechng. u. der analyt. Geometrie. Gr. in-8, XIV-477 p. avec 121 fig. Leipzig, S. Hirzel. 12 m.; relié, 13 m.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. IX. Bd. Nr. 2. Ergebnisse der Arbeiten des Samoa-Observatoriums der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. VI. *Angenheister* (*G.*) : Die luftelektrischen Beobachtungen am Samoa-Observatorium 1906, 1907, 1908. In-8, III-43 p. avec 8 fig. et 3 pl. Berlin, Weidmann. 5 m.

Annales de l'Observatoire de Paris, publiées sous la direction de *B. Baillaud.* Observations 1893. XII-518 p. Paris, Gauthier-Villars. 40 fr. — Observations 1905. VII-412 p. Paris, Gauthier-Villars. 40 fr.

Annales de l'Observatoire de Nice, publiées sous la direction de M. le général *Bassot.* T. XIV, 518 p. Paris, Gauthier-Villars. 30 fr.

ERRATA.

Dans l'article relatif aux paramètres cayléens des substitutions orthogonales, inséré au numéro de juin 1911 de ce *Bulletin*, une faute de calcul rend inexacte une des dernières formules à laquelle on devra substituer la suivante :

Si, pour abréger, on pose

$$\begin{aligned} \pi &= \Sigma p_i' p_i'' = \Sigma q_i' q_i'', & \pi' &= \Sigma p_i p_i'' = \Sigma q_i q_i'', & \pi'' &= \Sigma p_i p_i' = \Sigma q_i q_i', \\ \rho &= \Sigma p_i' q_i'' = \Sigma q_i' p_i'', & \rho' &= \Sigma p_i q_i'' = \Sigma q_i p_i'', & \rho'' &= \Sigma p_i q_i' = \Sigma q_i p_i'. \end{aligned} \qquad \omega = 1,$$

on doit écrire

$$D''(\omega_1 + \omega_2') = (\pi' + \rho')(\omega_1 + \omega_2)(\omega_1'\omega_2' - 1) + (\pi - \rho)(\omega_1' + \omega_2')(\omega_1\omega_2 - 1).$$

En permutant les accents dans cette relation et dans celle du texte entre déterminants

$$|E|E'| = |E''|1 + \tau\tau'|$$

on obtient les six relations fondamentales annoncées. B. ÉLIE.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CATALOG MATHEMATISCHER MODELLE *für den höheren mathematischen Unterricht veröffentlicht durch die Verlagshandlung* von MARTIN SCHILLING in Leipzig, mit 106 Abbildungen, siebente Auflage. 1 vol. in-8°, VI-172 pages. Leipzig, Martin Schilling; 1911.

C'est avec grand plaisir que nous signalons cette nouvelle et septième édition de la liste des modèles mathématiques qui, depuis près de 34 ans, ont été édités successivement par M. L. Brill de Darmstadt et M. Martin Schilling de Leipzig. Ces modèles, publiés avec la collaboration scientifique et sous la direction des professeurs de Mathématiques des Universités allemandes, Brill, Klein, Dyck, Finsterwalder, Kummer, Rodenberg, Rohn, Schœnflies, H.-A. Schwarz, Ch. et H. Wiener, etc., ont rendu les plus grands services dans l'enseignement des Universités. Ils ont été utiles à la fois à ceux qui les ont fait construire et à ceux qui les ont étudiés. Pour nous, chargé depuis 30 ans de l'enseignement de la Géométrie supérieure à l'Université de Paris, nous avons tenu à présenter à nos élèves ces représentations concrètes des plus belles propositions géométriques.

La nouvelle édition du Catalogue est divisée en deux Parties. La première et la plus importante comprend la description, par ordre chronologique, des 40 séries de modèles qui ont été successivement publiées.

La seconde, beaucoup moins étendue, contient une classification naturelle de ces modèles, rapprochés d'après leurs affinités. C'est ainsi, par exemple, que les quatre premières divisions se rapportent respectivement aux surfaces du deuxième ordre, du troisième, du quatrième ordre et aux surfaces de degré supérieur; qu'il y a une section pour la théorie des fonctions, une autre pour la Mécanique et la Cinématique, une autre pour la Physique mathématique, etc.

G. D.

MÉLANGES.

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES COURBES DANS UN ESPACE D'ORDRE QUELCONQUE;

PAR M. C. GUICHARD.

CHAPITRE II. — *Courbes générales. Courbures.*

7. Une droite située dans un espace à n dimensions est dite *ordinaire* si la somme des carrés de ses paramètres directeurs est différente de zéro. Dans le cas contraire, la droite est *singulière* ou *isotrope*.

S'il s'agit d'un 1 — plan, 3 cas pourront se présenter : 1° on peut, par un point de la variété, mener dans cette variété deux droites ordinaires rectangulaires ; il y a alors dans la variété deux directions isotropes ; 2° la variété ne contient qu'une seule direction isotrope ; cette droite est perpendiculaire à toutes les droites de la variété ; 3° toutes les droites de la variété sont isotropes; ce cas ne peut se présenter que si $n \geqq 4$. Dans le premier cas, le 1 — plan est *ordinaire* ; dans les cas (2) et (3) le 1 — plan est *singulier*.

D'une manière générale, un p — plan sera dit *ordinaire*, si, par un point, on peut mener dans la variété $(p+1)$ droites ordinaires deux à deux rectangulaires. Dans le cas contraire, le p — plan sera dit *singulier*.

Cela posé une courbe sera dite *générale* si sa tangente, ses plans osculateurs d'ordre $1, 2, \ldots, n-2$ sont des variétés générales.

Elle sera *singulière* si l'une au moins des variétés suivantes : tangente, 1 — plan osculateur, 2 — plan osculateur, etc., etc., $n-2$ — plan osculateur est constamment singulière.

J'étudierai d'abord les courbes générales.

8. Soit $M(X_1 - X_n)$ un point qui décrit une courbe ordinaire ; je vais mener par le point M un système de n droites, attachées à la courbe, deux à deux rectangulaires. La première sera la tangente à la courbe ; la seconde sera la perpendiculaire à la tangente située dans le 1 — plan osculateur.

Cette droite sera la *première normale* à la courbe. Dans le 2 — plan osculateur, je mène une droite perpendiculaire à la tangente et à la première normale ; cette droite est la *deuxième normale* à la courbe. On définit, de même, de proche en proche, la 3e, la 4e, ... la $(n-1)^{\text{ième}}$ normale. Par analogie avec ce qui se passe dans l'espace ordinaire, le système de ces n droites sera appelé le *n—èdre de Serret* attaché à la courbe.

Je vais en déduire des formules analogues aux formules de Serret. Pour éviter des notations compliquées, je me placerai dans le cas où $n = 5$, on verra facilement que le raisonnement est tout à fait général.

Je désignerai par $x_1, x_2, \ldots, x_5$ les cosinus directeurs de la tangente; par $y_1, y_2, \ldots, y_5$ ceux de la première normale; par $z_1, z_2, \ldots, z_5$ ceux de la seconde; par $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_5$ ceux de la troisième, et enfin par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_5$ ceux de la quatrième, de sorte que les éléments de

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_5 \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_5 \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_5 \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_5 \end{vmatrix}$$

sont des fonctions de u qui sont les éléments d'une substitution orthogonale. Je vais chercher les rotations de ce déterminant. Les quantités $\frac{dx_i}{du}$ sont les paramètres d'une droite située dans le 1 — plan osculateur, elles sont donc égales à une combinaison linéaire de x_i et y_i ; on sait que le coefficient de x_i doit être nul. On a donc

$$\frac{dy_i}{du} = a y_i. \tag{1}$$

Les quantités $\frac{dy_i}{du}$ sont les paramètres d'une droite située dans le 2 — plan osculateur ; elles s'expriment linéairement à l'aide de x_i,

y_i, z_i. D'après les équations (1) le coefficient de x_i est $-a$; on sait que celui de y_i est nul; je désigne celui de z_i par b. J'ai donc

$$(2) \qquad \frac{dy_i}{du} = -ax_i - bz_i.$$

De même, les quantités $\frac{dz_i}{du}$ sont les paramètres directeurs d'une droite du 3 — plan osculateur; $\frac{dz_i}{du}$ est donc une combinaison linéaire de x_i, y_i, z_i, ξ_i. Le coefficient de x_i est nul d'après les équations (1); le coefficient de y_i est $-b$ à cause de (2); celui de z_i est nul; je désigne le coefficient de ξ_i par c. On a donc

$$(3) \qquad \frac{dz_i}{du} = -by_i + c\xi_i.$$

On voit de même qu'on peut poser

$$(4) \qquad \frac{d\xi_i}{du} = -cz_i + d\eta_i.$$

$$(5) \qquad \frac{d\eta_i}{du} = -d\xi_i.$$

On a d'ailleurs

$$(6) \qquad \frac{dX_i}{du} = hx_i.$$

On a donc le tableau suivant, où l'on ne fait aucune hypothèse sur le choix de la variable indépendante

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_i}{du} = hx_i, \quad \frac{dx_i}{du} = ay_i, \quad \frac{dy_i}{du} = -ax_i + bz_i, \quad \frac{dz_i}{du} = -by_i + c\xi_i, \\ \qquad \frac{d\xi_i}{du} = -cz_i + d\eta_i, \qquad \frac{d\eta_i}{du} = -d\xi_i. \end{array} \right.$$

Il y a avantage, dans certains cas, à spécifier la variable indépendante. J'indique les deux choix suivants :

1° Je pose

$$ds^2 = \Sigma\, dX_i^2 = h^2\, du^2, \qquad ds = h\, du,$$

s est appelé l'arc de la courbe donnée. Si l'on prend comme va-

riable indépendante s on aura

$$
(\mathrm{II})\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\dfrac{dX_i}{ds} = x_i, & \dfrac{dx_i}{ds} = \omega_1 y_i, & \dfrac{dy_i}{ds} = -\omega_1 x_i - \omega_2 z_i, \\[2ex]
\dfrac{dz_i}{ds} = -\omega_2 y_i + \omega_3 \xi_i, & \dfrac{d\xi_i}{ds} = -\omega_3 z_i + \omega_4 y_i, & \dfrac{dy_i}{ds} = -\omega_4 \eta_i, \\[2ex]
\omega_1 = \dfrac{a}{h}, & \omega_2 = \dfrac{b}{h}, & \omega_3 = \dfrac{c}{h}, \qquad \omega_4 = \dfrac{d}{h}.
\end{array}
\right.
$$

ω_1 est la *première courbure* de la courbe, ω_2 la *seconde*, etc.

2° Le point m qui a pour coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se trouve sur une sphère qui a pour centre l'origine, pour rayon 1. Ce point m est la *représentation sphérique* du point M de la courbe. Je désigne par σ l'arc décrit par le point m; on a

$$d\sigma^2 = \Sigma\, dx_i^2 = a^2\, du^2, \qquad d\sigma = a\, du,$$

je prends pour variable indépendante σ; on a

$$
(\mathrm{III})\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\dfrac{dX_i}{d\sigma} = \theta x_i, & \dfrac{dx_i}{d\sigma} = y_i, & \dfrac{dy_i}{d\sigma} = -x_i + \pi_1 z_i, \\[2ex]
\dfrac{dz_i}{d\sigma} = -\pi_1 y_i + \pi_2 \xi_i, & \dfrac{d\xi_i}{d\sigma} = -\pi_2 z_i - \pi_3 \eta_i, & \dfrac{d\eta_i}{d\sigma} = -\pi_3 \xi_i, \\[2ex]
\theta = \dfrac{h}{a}, & \pi_1 = \dfrac{b}{a}, & \pi_2 = \dfrac{c}{a}, \qquad \pi_3 = \dfrac{d}{a}.
\end{array}
\right.
$$

Ce deuxième groupe est plus commode que le précédent quand on veut étudier des propriétés qui ne dépendent que de la direction des éléments, c'est-à-dire de la représentation sphérique.

9. Problème. *Déterminer une courbe connaissant ses courbures.* — Je suppose connues les courbures $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Le groupe de formules II montre que les rotations du déterminant Δ sont connues; on est donc ramené à trouver les éléments de Δ connaissant les rotations; ensuite les quantités X_i sont déterminées par les quadratures

$$X_i = \int x_i\, d\sigma.$$

Il résulte de là que toutes les solutions du problème se déduisent de l'une d'elles par une substitution orthogonale et par conséquent :

Deux courbes qui ont les mêmes courbures sont superposables.

Chapitre III. — *Développantes et développées.*

10. *Trajectoires orthogonales des tangentes à une courbe.* — Un point $N(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, situé sur la tangente en M à la courbe C, a pour coordonnées

$$Y_i = X_i + \rho x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En différentiant et en appliquant les formules (II) (§ 8), on a

$$\frac{dY_i}{ds} = x_i\left(1 + \frac{d\rho}{ds}\right) + \rho\omega_1 y_i.$$

Pour que la courbe Γ décrite par N soit orthogonale à la tangente, il faut et il suffit que

$$1 + \frac{d\rho}{ds} = 0 \qquad (\rho = C - s).$$

On a ainsi une infinité de courbes dépendant d'une constante arbitraire C; ce sont les *développantes* de la courbe donnée. La tangente à une développante est parallèle à la première normale de la courbe.

11. *Trajectoires orthogonales des plans osculateurs à une courbe.* — Je prends d'abord un point $R(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ dans le 1 — plan osculateur de la courbe. On aura

$$(1) \qquad Z_i = X_i + r x_i + \rho y_i.$$

Et en différentiant

$$(2) \qquad \frac{dZ_i}{ds} = x_i\left(1 + \frac{dr}{ds} - \omega_1\rho\right) + y_i\left(r\omega_1 + \frac{d\rho}{ds}\right) + Z_i[\omega_2\rho].$$

Pour que la courbe décrite soit normale au 1 — plan osculateur, il faut que

$$(3) \qquad 1 + \frac{dr}{ds} - \omega_1\rho = 0, \qquad r\omega_1 + \frac{d\rho}{ds} = 0.$$

Ce sont les équations qui déterminent r et ρ. Au lieu de les discuter analytiquement, je rappelle l'image géométrique suivante, qui est bien connue.

Soient $M'(X'_1, X'_2)$ un point qui décrit une courbe C' dans un espace d'ordre 2; x'_1, x'_2 les cosinus directeurs de la tangente; y'_1, y'_2 ceux de la normale à C'; je suppose de plus que la courbure de C' soit ω_1, je prends un point $R'(Z'_1, Z'_2)$ ayant pour coordonnées

$$Z'_i = X'_i + r x'_i + \rho y'_i.$$

Si r et ρ satisfont aux équations (3) on aura

$$\frac{dZ'_i}{ds} = 0.$$

Le point R' est un point fixe du plan; donc: *Les valeurs de r et ρ qui satisfont aux équations* (3) *sont les coordonnées d'un point fixe du plan par rapport à l'angle droit de Serret attaché à la courbe* C'.

Il y a donc une double infinité de trajectoires orthogonales; la tangente à une trajectoire est parallèle à la deuxième normale de la courbe. Si l'on considère plusieurs de ces trajectoires et les points où elles sont normales au 1 — plan osculateur, ces points forment une figure de forme invariable.

Je prends maintenant un point $S(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ dans le 2 — plan osculateur de la courbe. On aura

$$T_i = X_i + p x_i + q y_i + r z_i; \tag{4}$$

d'où, en différentiant,

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{ds} = {} & x_i\left(1 + \frac{dp}{ds} + q\omega_1\right) + y_i\left(p\omega_1 + \frac{dq}{ds} - r\omega_2\right) \\ & + z_i\left(q\omega_2 + \frac{dr}{ds}\right) + \xi_i(\omega_3 r). \end{aligned} \tag{5}$$

Pour que la courbe décrite par le point S soit normale au 2 — plan osculateur, il faut et il suffit que

$$\left\{\begin{aligned} & 1 + \frac{dp}{ds} + q\omega_1 = 0, \\ & p\omega_1 + \frac{dq}{ds} - r\omega_2 = 0, \\ & q\omega_2 + \frac{dr}{ds} = 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Ces équations s'interprètent facilement. Je considère dans un espace d'ordre 3 une courbe dont les courbures sont ω_1 et ω_2; alors :

p, q, r sont les coordonnées d'un point fixe de l'espace par rapport au trièdre de Serret attaché à cette courbe.

Il y a donc une triple infinité de trajectoires; la tangente à une trajectoire est parallèle à la troisième normale à la courbe; enfin les points où ces trajectoires sont normales à un même 2 — plan osculateur forment une figure de forme invariable.

On arrive à des résultats analogues pour les trajectoires orthogonales des p — plans osculateurs.

Je vais maintenant prendre les problèmes inverses de ceux qui viennent d'être traités, c'est-à-dire : Étant donnée une courbe C trouver toutes les courbes telles que C soit une trajectoire orthogonale des tangentes; ces courbes sont les *développées* de C; ensuite, trouver toutes les courbes telles que C soit une trajectoire orthogonale de leurs p — plans osculateurs.

12. *Développées d'une courbe.* — Par chaque point M d'une courbe C menons une normale L à la courbe, et cherchons s'il existe un point N sur L qui décrit une courbe tangente à la droite L. Je supposerai la courbe C placée dans un espace à cinq dimensions. Les paramètres directeurs de L sont

$$\alpha y_i + \beta z_i + \gamma \xi_i + \delta \eta_i,$$

et l'on peut supposer

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1 \text{ ou } 0, \tag{7}$$

suivant que la normale considérée est une normale ordinaire ou isotrope. Les coordonnées $(Y_1, Y_2 \ldots Y_5)$ du point N sont

$$Y_i = X_i + \rho(\alpha y_i + \beta z_i + \gamma \xi_i + \delta \eta_i). \tag{8}$$

En différentiant et en appliquant les formules III (§ 8) on aura

$$\begin{aligned} \frac{dY_i}{d\sigma} = {} & x_i[1 + \alpha\rho] + y_i\left(\rho'\alpha + \rho\frac{d\alpha}{d\sigma} + \rho\beta\pi_1\right) \\ & + z_i\left(\rho\alpha\pi_1 + \rho'\beta + \rho\frac{d\beta}{d\sigma} + \rho\gamma\pi_2\right) \\ & + \xi_i\left(\rho\beta\pi_2 + \rho'\gamma + \rho\frac{d\gamma}{d\sigma} + \rho\delta\pi_3\right) + \eta_i\left(\rho\gamma\pi_3 + \rho'\delta + \rho\frac{d\delta}{d\sigma}\right), \end{aligned} \tag{9}$$

on devra avoir

$$\theta - \alpha\rho - \rho \tag{10}$$

et

$$\frac{\rho'\alpha + \rho\frac{d\alpha}{d\sigma} - \rho\delta\pi_1}{\alpha} = \frac{\rho\alpha\pi_1 + \rho'\beta + \rho\frac{d\beta}{d\sigma} - \rho\gamma\pi_2}{\beta}$$
$$= \frac{\rho\beta\pi_2 - \rho'\gamma\rho\frac{d\gamma}{d\sigma} - \rho\delta\pi_3}{\gamma} = \frac{\rho\gamma\pi_3 - \rho'\delta + \rho\frac{d\delta}{d\sigma}}{\delta},$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{\frac{d\alpha}{d\sigma} - \beta\pi_1}{\alpha} = \frac{\alpha\pi_1 + \frac{d\beta}{d\sigma} - \gamma\pi_2}{\beta} = \frac{\beta\pi_2 - \frac{d\gamma}{d\sigma} - \delta\pi_3}{\gamma} = \frac{\gamma\pi_3 + \frac{d\delta}{d\sigma}}{\delta}. \tag{11}$$

La valeur commune des rapports (II) est

$$\frac{\alpha\frac{d\alpha}{d\sigma} + \beta\frac{d\beta}{d\sigma} - \gamma\frac{d\gamma}{d\sigma} + \delta\frac{d\delta}{d\sigma}}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}.$$

Si donc L est une normale ordinaire, ces rapports sont nuls. Si L est une normale isotrope on pourra multiplier α, β, γ, δ par un même facteur, fonction de σ, de façon à les rendre nuls. On voit donc que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions de σ satisfaisant aux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{d\sigma} = \beta\pi_1, \quad \frac{d\beta}{d\sigma} = -\alpha\pi_1 - \gamma\pi_2, \\ &\frac{d\gamma}{d\sigma} = -\beta\pi_2 + \delta\pi_3, \quad \frac{d\delta}{d\sigma} = -\gamma\pi_3. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

On reconnaît les équations qui permettent de déterminer les éléments d'une substitution orthogonale dans un espace d'ordre 4 quand on connaît les rotations; ρ sera donné ensuite par l'équation (10).

Des équations (12) on tire immédiatement la conclusion suivante :

Deux normales qui touchent des développées forment un angle constant.

Plus généralement :

Si l'on considère un nombre quelconque de normales qui

touchent des développées, la figure formée par l'ensemble de ces normales est une figure de forme invariable.

D'autre part, les formules (12) ne contiennent que π_1, π_2, π_3, c'est-à-dire les rotations de la représentation sphérique; donc

Deux courbes parallèles ont leurs développées parallèles.

Des formules (12) et des formules III (§ 8) on déduit

$$\frac{d}{d\sigma}(\alpha y_i + \beta z_i + \lambda \xi_i + \delta \eta_i) = -\alpha x_i. \tag{13}$$

Il est quelquefois commode de mettre en évidence les développées d'une courbe. Soit alors M $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un point qui décrit une courbe, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les cosinus directeurs de la tangente; par le point M je mène $(n-1)$ normales $L_1, L_2, \ldots, L_n$, deux à deux rectangulaires et qui touchent des développées. Je désignerai les cosinus directeurs de L_k par $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}$. Il en résulte que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \ldots & y_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

est le déterminant d'une substitution orthogonale. On aura l'équation (13) quelle que soit la variable indépendante u des équations de la forme

$$\frac{dy_i^{(k)}}{du} = a_k x_i \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{matrix} \tag{14}$$

et par suite

$$\frac{dx_i}{du} = -\sum_k a_k y_i^{(k)} \tag{15}$$

et enfin

$$\frac{dX_i}{du} = h x_i. \tag{16}$$

On voit facilement que :

1° *Tout point fixe par rapport au $n-1^{\text{edre}}$ $ML_1, ML_2, \ldots, M_n$ décrit une courbe parallèle à la courbe donnée;*

2° *Toute droite fixe par rapport à ce $n-1^{\text{èdre}}$ touche une*

développée et, réciproquement, toute normale qui touche une développée est fixe par rapport à ce $(n-1)^{\text{ème}}$.

13. *Courbes dont les plans osculateurs sont normaux à une courbe donnée.* — Soient H et K deux normales à la courbe C qui engendrent des développées; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les paramètres directeurs de H; $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ceux de K. On peut supposer qu'on a

$$y_i = \alpha_1 y_i^{(1)} + \alpha_2 y_i^{(2)} + \ldots + \alpha_{n-1} y_i^{(n-1)}$$
$$z_i = \beta_1 y_i^{(1)} + \beta_2 y_i^{(1)} + \ldots + \beta_{n-1} y_i^{(n-1)},$$

les quantités α et β étant des constantes. On aura

$$(17) \qquad \frac{dy_i}{du} = a x_i, \qquad \frac{dz_i}{du} = b x_i.$$

Cela posé, je prends un point N $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ dans le $1-$plan HMK. On aura

$$(18) \qquad Z_i = X_i + r y_i + \rho z_i,$$

d'où en différentiant

$$\frac{dZ_i}{du} = x_i [h + ar + b\rho] + y_i \frac{dz}{du} + z_i \frac{d\rho}{du}.$$

Si donc on établit entre r et ρ la relation

$$(19) \qquad h + ar + b\rho = 0,$$

on aura

$$(20) \qquad \frac{dZ_i}{du} = y_i \frac{dr}{du} + z_i \frac{d\rho}{du}.$$

En différentiant encore une fois

$$\frac{d^2 Z_i}{du^2} = x_i \left(a \frac{dr}{du} + b \frac{d\rho}{du} \right) + y_i \frac{d^2 r}{du^2} + z_i \frac{d^2 \rho}{du^2}.$$

Si l'on établit entre r et ρ la relation

$$(21) \qquad a \frac{dr}{du} + b \frac{d\rho}{du} = 0,$$

on aura

$$(22) \qquad \frac{d^2 Z_i}{du^2} = y_i \frac{d^2 r}{du^2} + z_i \frac{d^2 \rho}{du^2}.$$

Des équations (19) et (21) on déduit

$$\frac{dh}{du} + r\frac{da}{du} + \rho\frac{db}{du} = 0. \tag{23}$$

Si donc on détermine r et ρ par les équations (19) et (23), les coordonnées du point N satisfont aux équations (20) et (22) et par conséquent le point N décrit une courbe Γ dont le 1 — plan osculateur est le 1 — plan HMT. La courbe Γ est donc telle que ses 1 — plans osculateurs soient normaux à la courbe donnée C.

Je dis qu'on obtient ainsi toutes les courbes possédant la propriété indiquée. En effet, soit Γ une courbe dont le 1 — plan osculateur est normal à la courbe C en M; dans ce 1 — plan il existe des points M′, M″ (11) que décrivent des trajectoires orthogonales des 1 — plans osculateurs à Γ, la figure MM′M″ conserve une forme invariable. La droite MM′ est tangente à une courbe (6), par conséquent MM′ est une normale à C qui touche une développée: il en est de même de MM″. Le 1 — plan osculateur de Γ contient donc bien deux normales de C qui touchent des développées.

On démontre de même que le p — plan formé par $p+1$ normales qui engendrent des développées est le p — plan osculateur d'une courbe et l'on obtient ainsi toutes les courbes dont les p — plans osculateurs admettent comme trajectoire orthogonale la courbe donnée C.

14. Il est quelquefois commode d'avoir explicitement les coordonnées d'une courbe et les cosinus directeurs de la tangente et des normales qui engendrent des développées; autrement dit, il faut avoir sous forme finie les expressions de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et des éléments Δ (§ 12). Je vais montrer comment on peut, de proche en proche, arriver au résultat. Pour cela je suppose connu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et les éléments de Δ et je formerai un déterminant analogue à Δ, mais d'ordre $n+1$. Je pose

$$X_i = p x_i + q_1 y_i^1 + q_2 y_i^2 + \ldots + q_{n-1} y_i^{n-1}. \tag{24}$$

En différentiant et en tenant compte des formules (14), (15) et

(16) on aura

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{dq_k}{du} = p\,a_k, \\ h = \dfrac{dp}{du} + \Sigma\, a_k q_k. \end{cases}$$

Soit alors

$$(26)\qquad 2\theta = X_1^2 - X_2^2 + \ldots + X_n^2,$$

on aura

$$(27)\qquad \frac{d\theta}{du} = \Sigma\, X_i \frac{dX_i}{du} = h\,\Sigma\, X_i x_i = hp.$$

Cela posé, je fais

$$(28)\qquad |Z_i| = \frac{2X_i}{2-\theta}, \qquad |Z_{n+1}| = \frac{2-\theta}{2-\theta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les $(n+1)$ quantités Z sont bien les cosinus d'une droite, puisque la somme de leurs carrés est égale à l'unité.

En différentiant, on trouve

$$\sum_1^{n+1} d\,|Z_i|^2 = \frac{4h^2}{(2-\theta)^2}\,du^2$$

et

$$\frac{d\,|Z_i|}{du} = \frac{2h}{2-\theta}\left[x_i - \frac{p}{2+\theta}X_i\right], \qquad \frac{d\,|Z_{n+1}|}{du} = \frac{2h}{2-\theta}\left[\frac{-2p}{2+\theta}\right].$$

Je prendrai comme première ligne du nouveau déterminant

$$|x_i| = x_i - \frac{p}{2+\theta}X_i, \qquad |x_{n+1}| = \frac{-2p}{2+\theta};$$

pour deuxième ligne

$$|Z_i| = \frac{2X_i}{2-\theta}, \qquad |Z_{n+1}| = \frac{2-\theta}{2+\theta}.$$

A la ligne $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^k$ du déterminant Δ je fais correspondre la ligne

$$|y_i^k| = y_i^k - \frac{q}{2-\theta}X_i, \qquad |y_{n+1}^k| = \frac{-2q_k}{2-\theta}.$$

On voit bien que les éléments sont les éléments d'une substi-

tution orthogonale, et comme on a

$$\left.\begin{aligned} \frac{d|z_i|}{du} &= \frac{2h}{2+\theta}|x_i| \\ \frac{d|y_i^{(k)}|}{du} &= \left(a_k - \frac{hq_k}{2+\theta}\right)|x_i| \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

le déterminant ainsi formé possède bien toutes les propriétés du déterminant Δ. En reprenant les calculs en sens inverse, on voit que tout déterminant Δ d'ordre $n+1$ peut être obtenu par cette méthode,

Pour avoir une courbe correspondante, il suffira de trouver, dans un espace d'ordre $n+1$, une courbe dont les tangentes ont pour cosinus directeurs les quantités $|x_i|$. On sait résoudre ce problème (5) et la solution dépend d'une fonction arbitraire $\theta(u)$.

Si la courbe donnée C et les éléments de Δ sont algébriques, tous les éléments de Δ_1 sont algébriques et réciproquement. Si, de plus, la fonction θ est algébrique la courbe cherchée sera aussi algébrique.

On voit donc que, de proche en proche, on peut déterminer toutes les courbes algébriques telles que les éléments de Δ (§ 12) soient aussi algébriques; ou encore, on peut trouver ainsi *toutes les courbes algébriques dont toutes les développées sont algébriques.*

Chapitre IV. — *Courbes plusieurs fois isotropes.*

15. *Courbes simplement isotropes.* — On dit qu'un point $M(X_1, \ldots, X_n)$ décrit une courbe simplement isotrope lorsque

$$\sum\left(\frac{dX_i}{du}\right)^2 = 0, \qquad \sum\left(\frac{d^2X_i}{du^2}\right)^2 \neq 0.$$

La tangente à la courbe est une droite isotrope, dans le 1—plan osculateur il n'y a qu'une seule série de droites isotropes, savoir : les parallèles à la tangente. Il est facile d'obtenir sous forme finie l'expression des coordonnées de cette courbe dans un espace d'ordre n. Pour cela, je suppose $x_1 = u$, je prends pour x_2, $x_3, \ldots, x_{n-2}$ des fonctions arbitraires de u, puis je pose

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} x_{n-1} + i\,x_n &= -\sum_1^{n-2} x_i^2, \\ x_{n-1} - i\,x_n &= 1. \end{aligned}\right.$$

Je forme ensuite [§ 5] une courbe telle que les paramètres de sa tangente soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La courbe ainsi obtenue est bien isotrope. Je dis que, réciproquement, on obtient par cette méthode toutes les courbes isotropes dans un espace d'ordre n. En effet, soient C une telle courbe, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les paramètres de la tangente. En multipliant tous les paramètres par une même fonction je puis supposer que

$$x_{n-1} - i x_n = 1, \tag{2}$$

je puis prendre comme variable indépendante u la nouvelle valeur de x_1, c'est-à-dire, en somme, le rapport $\frac{x_1}{x_{n-1} - i x_n}$. Comme on doit avoir

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = 0,$$

l'équation (2) montre qu'on doit avoir

$$x_{n-1} + i x_{n+1} = -\sum_1^{n-2} x_i^2.$$

L'expression générale des coordonnées d'une telle courbe renferme donc $n-2$ fonctions arbitraires de u, savoir : les fonctions $x_2, x_3, \ldots, x_{n-2}$ et la fonction θ qui permet de déterminer la courbe quand on connaît les paramètres de ses tangentes. Si toutes ces fonctions sont algébriques, la courbe sera algébrique. Je dis que, réciproquement, si la courbe est algébrique toutes ces fonctions doivent être algébriques.

En effet, supposons que les coordonnées $X_1, X_2, \ldots, X_n$ d'une courbe isotrope soient des fonctions algébriques d'un paramètre λ. L'expression

$$u = \frac{dX_1}{dX_{n-1} - i\, dX_n}$$

sera une fonction algébrique de λ; toute fonction algébrique de λ est donc une fonction algébrique de u; or la fonction x_k

$$x_k = \frac{dX_k}{dX_{n-1} - i\, dX_n} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-2)$$

est une fonction algébrique de u. On sait [§ 5] qu'il doit en être de même de la fonction θ.

Si, en particulier, je suppose $n = 3$, on devra poser

$$x_1 = u, \qquad x_2 - i x_3 = 1, \qquad x_2 - i x_3 = -(1 - u^2).$$

L'équation du troisième ordre à laquelle se confond x_1, x_2, x_3 est

$$\frac{d^3 x}{du^3} = 0.$$

Les quantités p_1, p_2, p_3 du paragraphe 5 sont nulles. On aura donc

$$r_1 = \theta(u), \qquad r_2 = -\theta'(u), \qquad r_3 = \theta''(u),$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad \begin{cases} X_1 = \theta' - u\theta'', \\ X_2 - iX_3 = \theta'', \\ X_2 + iX_3 = -2\theta + 2u\theta' - (1 + u^2)\theta. \end{cases}$$

Elles coïncident avec celles qui ont été données par M. Darboux dans son Ouvrage sur la théorie des surfaces [Ire Partie, *Surfaces minima*].

16. Problème. — *Trouver dans l'espace ordinaire toutes les courbes algébriques telles que l'arc de courbe soit une fonction algébrique des coordonnées de son extrémité.* — Soient X_1, X_2, X_3 les coordonnées du point decrivant, s l'arc compté à partir d'une origine arbitraire. La courbe étant supposée algébrique, X_1, X_2, X_3 sont des fonctions algébriques d'un paramètre λ; s sera aussi une fonction algébrique de λ. Si donc on pose

$$X_4 = is,$$

on aura

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2 = 0.$$

Le point M de l'espace d'ordre 4 qui a pour coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4 décrit une courbe isotrope algébrique.

Il est clair que la réciproque est exacte. On est donc ramené à un problème traité au paragraphe précédent.

17. *Courbes deux fois isotropes.* — On dit qu'un point $M(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ décrit une courbe deux fois isotrope lorsque

l'on a

$$(4)\qquad \sum\left(\frac{dX_i}{du}\right)^2=0,\qquad \sum\left(\frac{d^2X_i}{du^2}\right)^2=0,\qquad \sum\left(\frac{d^3X_i}{du^3}\right)^2\neq 0.$$

Si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les paramètres de la tangente à la courbe, on aura, quel que soit le facteur de proportionnalité par lequel on peut multiplier les paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$(5)\qquad \sum x_i^2=0,\qquad \sum\left(\frac{dx_i}{du}\right)^2=0,\qquad \sum\left(\frac{d^2x_i}{du^2}\right)^2\neq 0.$$

Je suppose, en particulier, que le facteur de proportionnalité soit choisi de telle sorte que

$$(6)\qquad x_{n-1}-ix_n=1;$$

on aura alors

$$(7)\qquad x_{n-1}+ix_n=-\sum_1^{n-2}x_i^2,\qquad \sum_1^{n-2}\left(\frac{dx_i}{du}\right)^2=0,\qquad \sum_1^{n-2}\left(\frac{d^2x_i}{du^2}\right)^2\neq 0.$$

Il en résulte que le point $N(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ décrit, dans un espace d'ordre $n-2$, une courbe simplement isotrope.

Réciproquement, si l'on prend dans un espace d'ordre $n-2$ un point $N(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ qui décrit une courbe simplement isotrope et si l'on pose

$$(8)\qquad x_{n-1}-ix_n=1,\qquad x_{n-1}+ix_n=-\sum_1^{n-2}x_i^2,$$

toute courbe, située dans un espace d'ordre n et dont les paramètres directeurs de la tangente sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une courbe deux fois isotrope. On a donc un moyen d'obtenir sous forme explicite l'expression des coordonnées d'une telle courbe. Cette expression renfermera $n-3$ fonctions arbitraires, savoir : $n-4$ fonctions pour définir la courbe isotrope décrite par le point N dans un espace d'ordre $n-2$. Je choisirai ces fonctions et la variable indépendante comme au paragraphe 15. Il faudra y ajouter une fonction θ pour déterminer la courbe quand on connaît les paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de sa tangente.

Si toutes ces fonctions sont algébriques, la courbe cherchée sera algébrique et réciproquement.

Il résulte d'ailleurs de l'analyse qui précède qu'une courbe deux fois isotrope ne peut exister que dans un espace dont l'ordre est au moins égal à 5.

18. *Courbes plusieurs fois isotropes.* — On dit qu'un point $M(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ décrit une courbe k fois isotrope lorsque

$$(9)\quad \begin{cases} \sum \left(\frac{dX_i}{du}\right)^2 = 0, \quad \sum \left(\frac{d^2X_i}{du^2}\right)^2 = 0, \quad \ldots, \\ \sum \left(\frac{d^kX_i}{du^k}\right)^2 = 0, \quad \sum \left(\frac{d^{k+1}X_i}{du^{k+1}}\right)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les paramètres directeurs de la tangente à une telle courbe, on aura

$$(10)\quad \begin{cases} \sum x_i^2 = 0, \quad \sum \left(\frac{dx_i}{du}\right)^2 = 0, \quad \ldots, \\ \sum \left(\frac{d^{k-1}x_i}{du^{k-1}}\right)^2 = 0, \quad \sum \left(\frac{d^kx_i}{du^k}\right)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Les équations (10) sont, en somme, équivalentes aux équations (9).

La méthode, employée au paragraphe précédent, montre que toute courbe k fois isotrope dans un espace d'ordre n se déduit d'une courbe $k-1$ fois isotrope dans un espace d'ordre $n-2$. Ensuite on fait usage de la méthode employée au paragraphe 5 pour déterminer une courbe quand on connaît les paramètres directeurs de sa tangente.

Il en résulte que l'expression des coordonnées d'une telle courbe dépend de $n-k-1$ fonctions arbitraires. Si l'on choisit la variable indépendante et les fonctions arbitraires comme aux paragraphes précédents, on voit que *la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe soit algébrique est que toutes ces fonctions soient algébriques.*

D'autre part, on voit qu'une véritable courbe k fois isotrope ne peut exister que dans un espace dont l'ordre surpasse $2k$.

Chapitre V. — *Réseaux déduits de courbes.*

19. *Réseaux situés dans le p-plan osculateur d'une courbe.* — Soient $A_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un point qui décrit une courbe dans

un espace d'ordre n, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les paramètres directeurs des tangentes. On a

$$\frac{dX_i}{du} = h x_i. \tag{1}$$

Cela posé, un point $M(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ situé dans le plan p — plan osculateur de la courbe $(p \leqq n-2)$ a des coordonnées de la forme

$$Y_i = X_i + r x_i + r_1 \frac{dx_i}{du} + r_2 \frac{d^2 x_i}{du^2} + \ldots + r_p \frac{d^p x_i}{du^p}. \tag{2}$$

Je suppose que $r, r_1, r_2, \ldots, r_p$ soient des fonctions de u et d'une autre variable v ; je vais chercher les conditions pour que le point M décrive un réseau.

On a, en différentiant l'équation (2),

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial Y_i}{\partial u} &= x_i \left[h + \frac{\partial r}{\partial u}\right] + \frac{dx_i}{du}\left(r + \frac{\partial r_1}{du}\right) + \ldots \\
&\quad + \frac{d^p x_i}{du^p}\left(r_{p-1} + \frac{\partial r_p}{\partial u}\right) + \frac{d^{p+1} x_i}{du^{p+1}} r_p, \\
\frac{\partial Y_i}{\partial v} &= x_i \frac{\partial r}{\partial v} + \frac{dx_i}{du}\frac{\partial r_1}{\partial v} + \ldots + \frac{d^p x_i}{du^p}\frac{\partial r_p}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2 Y_i}{\partial u\, \partial v} &= x_i \left[\frac{\partial^2 r}{\partial u\, \partial v}\right] + \frac{dx_i}{du}\left(\frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial^2 r_1}{\partial u\, \partial v}\right) + \ldots \\
&\quad + \frac{d^p x_i}{du^p}\left(\frac{\partial r_{p-1}}{\partial v} + \frac{\partial^2 r_p}{\partial u\, \partial v}\right) + \frac{d^{p+1} x_i}{du^{p+1}}\frac{\partial r_p}{\partial v}.
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Si P et Q sont des fonctions quelconques de u et v, on aura des équations de la forme

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial u\, \partial v} - P\frac{\partial Y_i}{\partial u} - Q\frac{\partial Y_i}{\partial v} = A x_i + A_1 \frac{dx_i}{du} + \ldots + A_p \frac{d^p x_i}{du^p} + A_{p+1}\frac{d^{p+1} x_i}{du^{p+1}}.$$

Comme tous les déterminants d'ordre $p+2$ tirés de la matrice

$$\begin{vmatrix}
x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\
\frac{dx_1}{du} & \frac{dx_2}{du} & \ldots & \frac{dx_n}{du} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{d^{p+1} x_1}{du^{p+1}} & \frac{d^{p+1} x_2}{du^{p+1}} & \ldots & \frac{d^{p+1} x_n}{du^{p+1}}
\end{vmatrix}$$

sont différents de zéro, pour que les n coordonnées Y_i satisfassent

à l'équation

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial u\,\partial v} - P\frac{\partial Y}{\partial u} - Q\frac{\partial Y}{\partial v} = 0,$$

il faut et il suffit que $A_1, \ldots, A_2$ soient nuls. Or

$$(5)\qquad \begin{cases} A_{p+1} = \dfrac{\partial r_p}{\partial v} - P\,r_p = 0, \\ A_p = \dfrac{\partial^2 r_p}{\partial u\,\partial v} - \dfrac{\partial r_{p-1}}{\partial v} - P\left(\dfrac{\partial r_p}{\partial u} + r_{p-1}\right) - Q\dfrac{\partial r_p}{\partial v}. \end{cases}$$

La première des équations (5) donne

$$(6)\qquad P = \frac{1}{r_p}\frac{\partial r_p}{\partial v}.$$

La seconde donne ensuite la valeur de Q. P et Q étant calculés, on pourra former les valeurs de $A, A_1, \ldots, A_{p-2}$; en égalant ces expressions à zéro on a les conditions cherchées.

20. Remarque I. — Si $p+2$ des coordonnées Y_i satisfont à une équation de la forme (4), les quantités $A, A_1, \ldots, A_{p-1}$ sont nulles; le point M décrit un réseau. Comme deux coordonnées satisfont toujours à une équation de la forme (4), on voit que si $p = 0$ le point M décrit un réseau. Ainsi le point qui a pour coordonnées

$$(7)\qquad Y_i = X_i + r x_i,$$

où r est une *fonction arbitraire* de u et de v, décrit un réseau; ou encore :

Les génératrices de la première développable circonscrite à une courbe et un système simplement infini de courbes tracées sur cette développable forment un réseau.

21. Remarque II. — Si $h = 0$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des constantes, toutes les conclusions précédentes subsistent. On peut dire qu'on a cherché les réseaux situés dans les p plans tangents d'un cône.

22. *Transformation de Laplace.* — Effectuons, sur le réseau précédent, la transformation de Laplace, du côté des v. Le point

transformé $N(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ aura pour coordonnées

$$(8) \qquad Z_i = Y_i + \lambda \frac{\partial Y_i}{\partial v}.$$

On en déduit, en tenant compte de l'équation (4),

$$\frac{\partial Z_i}{\partial u} = \frac{\partial Y_i}{\partial u}(1 - \lambda P) + \frac{\partial Y_i}{\partial v}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \lambda Q\right).$$

On devra donc avoir

$$1 + \lambda P = 0,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{1}{P} = -\frac{r_p}{\frac{\partial r_p}{\partial v}}.$$

On aura donc

$$Z_i = X_i + r_1 x_i - r_2 \frac{dx_i}{du} - \ldots + r_p \frac{d^p x_i}{du^p}$$
$$- \frac{r_p}{\frac{\partial r_p}{\partial v}}\left[\frac{\partial r_1}{\partial v} x_i + \frac{\partial r_1}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u} - \ldots - \frac{\partial r_p}{\partial v}\frac{d^p x_i}{du^p}\right].$$

Le coefficient de $\left|\frac{d^p x_i}{du^p}\right|$ est nul; donc.

Le réseau transformé (N) *est situé dans le* $p-1$ *plan osculateur de la courbe.*

En continuant cette transformation, toujours dans le même sens, on arrivera à un réseau situé sur la première développable de la courbe.

Or pour un tel réseau, on peut prendre arbitrairement la fonction r (§ 20). On a donc un moyen de former les réseaux cherchés; il suffit de prendre un réseau arbitraire tracé sur la première développable et d'effectuer sur ce réseau, p fois du côté des u, la transformation de Laplace. On voit qu'au point de vue analytique, la solution dépend d'une fonction arbitraire de deux variables.

25. *Réseaux formés à l'aide de deux courbes.* — Soient $A(X_1, \ldots, X_n)$ un point qui décrit une courbe dépendant d'un paramètre u et $B(X'_1, X'_2, \ldots, X_m)$ un point qui décrit une courbe

dépendant d'un paramètre v. Je poserai

$$(9)\quad \begin{cases} Z_i = X_i + r x_i + r_1 \dfrac{dx_i}{du} + \ldots + r_p \dfrac{d^p x_i}{du^p} & p \leq n+2, \\ Y'_i = X'_i + \rho x'_i + \rho_1 \dfrac{dx'_i}{dv} + \ldots + \rho_q \dfrac{d^q x'_i}{dv^q} & q \leq m-2. \end{cases}$$

Si les $n+m$ fonctions Y_i et Y'_i satisfont à une même équation de Laplace, cette équation sera la suivante (19) :

$$\theta(Y) = \frac{\partial^2 Y}{\partial u\, \partial v} - \frac{1}{r_p}\frac{\partial r_p}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{1}{\rho_q}\frac{\partial \rho_q}{\partial u}.$$

Si l'on remplace, dans $\theta(Y)$, Y par Y_i ou par Y'_i, on a des expressions de la forme

$$\theta(Y_i) = A x_i + A_1 \frac{dx_i}{du} + A_2 \frac{d^2 x_i}{du^2} + \ldots + A_p \frac{d^p x_i}{du^p},$$

$$\theta(Y'_i) = B x'_i + B_1 \frac{dx'_i}{dv} + \ldots + B_q \frac{d^q x'_i}{dv^q}.$$

Pour que ces expressions soient nulles, il faut et il suffit (19) que les quantités A_i, B_i soient nulles.

24. Remarque I. — Si l'on établit, entre les Y_i et les Y'_i, $p+q+2$ relations linéaires

$$(10)\qquad Z_1 = C_1, \qquad Z_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad Z_{p+q+2} = C_{p+q+2},$$

$C_1, C_2, \ldots, C_{p+q+2}$ étant des constantes, on aura un système de $p+q+2$ équations du premier degré pour déterminer r, r_1, ..., r_p, ρ, ρ_1, ..., ρ_q. La détermination est possible et unique, car le déterminant des inconnues est différent de zéro.

Cela posé, on aura $p+q+2$ équations

$$\theta(Z_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p+q+2.$$

Ces équations sont homogènes par rapport aux fonctions A_i, B_k; donc ces fonctions sont nulles et l'on a un réseau.

25. Remarque II. — Si l'on effectue sur ce réseau la transformation de Laplace du côté des u, on a un réseau analogue dans lequel p a augmenté d'une unité et q a diminué d'une unité.

Chapitre VI. — *Applications aux réseaux* O.

26. *Mode de formation de certains réseaux* O. — Je considère dans l'espace à n dimensions un point $A(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ qui décrit une courbe k fois isotrope dépendant d'un paramètre u : je prends un point $M(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ situé dans le $k-1$ plan osculateur de la courbe. On aura

$$(1) \qquad Y_i = X_i + p_1 x_i + p_2 \frac{dx_i}{du} + \ldots + p_k \frac{d^{k-1}x_i}{du^{k-1}},$$

$$(2) \qquad \frac{dX_i}{du} = h x_i,$$

et je suppose que $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des fonctions arbitraires de deux variables u et v. On sait qu'on a

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum x_i^2 = 0, \qquad \sum \left(\frac{dx_i}{du}\right)^2 = 0, \qquad \ldots, \\ \sum \left(\frac{d^{k-1}x_i}{du^{k-1}}\right)^2 = 0, \qquad \sum \left(\frac{d^k x_i}{du^k}\right)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Des équations (3) on déduit facilement, par une suite de différentiations,

$$(4) \qquad \sum x_i \frac{d^\alpha x_i}{du^\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k),$$

et

$$(5) \qquad \sum \frac{d^\alpha x_i}{du^\alpha} \frac{d^\beta x_i}{du^\beta} = 0 \qquad \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, \ldots, k \\ \beta = 1, 2, \ldots, k-1. \end{array}$$

Cela posé, si l'on différentie les équations (1) par rapport à u et à v, on aura

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y_i}{\partial u} = x_i \left(h + \frac{\partial p_1}{\partial u}\right) + \frac{dx_i}{du}\left(p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial u}\right) + \ldots \\ \qquad + \frac{d^{k-1}x_i}{du^{k-1}}\left(p_{k-1} + \frac{\partial p_k}{\partial u}\right) + \frac{d^k x_i}{du^k} p_k, \\ \frac{\partial Y_i}{\partial v} = x_i \frac{\partial p_1}{\partial v} + \frac{dx_i}{du}\frac{\partial p_1}{\partial v} + \ldots + \frac{d^{k-1}x_i}{du^{k-1}}\frac{\partial p_k}{\partial v}. \end{array} \right.$$

D'où l'on déduit

$$(7) \qquad \sum dY_i^2 = p_k^2 \sum \left(\frac{d^k x_i}{du^k}\right)^2 du^2 = p_k^2 U^2 du^2,$$

U étant une fonction de u seul.

Cela posé, je prends un point $B(X'_1, \ldots, X'_m)$ qui décrit dans l'espace à m dimensions une courbe k' fois isotrope qui dépend d'un paramètre v et je pose

$$(8) \qquad Y'_i = X'_i + q_1 x'_i + q_2 \frac{dx'_i}{dv} + \ldots + q_{k'} \frac{d^{k'-1} x_i}{dv^{k'-1}}.$$

J'aurai, comme dans le cas précédent, en supposant $q_1, q_2, \ldots, q_{k'}$ fonctions de u et v,

$$(9) \qquad \Sigma\, dY'^2_i = q^2_{k'} V^2\, dv^2,$$

V étant une fonction de v seulement; on a donc

$$(10) \qquad \Sigma\, dY^2 + \Sigma\, dY'^2 = p^2_k U^2\, du^2 + q^2_{k'} V^2\, dv^2.$$

J'effectue alors sur les $n+m$ fonctions Y et Y' une substitution orthogonale à coefficients constants; soient $Z_1, Z_q, \ldots, Z_{m+n}$ les nouvelles coordonnées. J'aurai

$$(11) \qquad \Sigma\, dZ^2 = p^2_k U^2\, du^2 + q^2_{k'} V^2\, dv^2.$$

Cela posé, je détermine $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_{k'}$ par les $k+k'$ équations du premier degré

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \quad \ldots, \quad Z_r = 0, \\ Z_{r+1} + iZ_{r+2} = 0, \quad Z_{r+3} + iZ_{r+4} = 0, \quad \ldots, \quad Z_{r+2q-1} + iZ_{r+2q} = 0, \\ \qquad\qquad r + q = k + k'. \end{array} \right.$$

Toutes les fonctions Z satisfont à une même équation de Laplace (24). On pourra laisser de côté les coordonnées Z_1, $Z_2, \ldots, Z_{r+2q}$; les coordonnées restantes $Z_{r+2q+1}, Z_{r+2q+2}, \ldots, Z_{n+m}$ sont les coordonnées d'un point N qui décrit un réseau. Ce réseau est O car, en tenant compte des équations (11) et (12), on a

$$(13) \qquad \sum_{r+2q+1}^{n+m} dZ^2_i = p^2_k U^2\, du^2 + q^2_{k'} V^2\, dv^2.$$

Ce point N se trouve dans un espace dont l'ordre μ est égal à

$$(14) \qquad \mu = n + m - r - 2q = n + m - r - 2(k + k').$$

Or on a (18)

$$(15) \qquad n = 2k + \alpha, \qquad m = 2k + \beta.$$

α et β étant des entiers positifs ; d'où

$$\mu = \alpha + \beta + r. \tag{16}$$

27. Remarque I. — Si des $k + k'$ relations (12) on pouvait déduire une relation entre les Y_i seuls, cela reviendrait à réduire k d'une unité ; même conclusion en ce qui concerne les Y'_i. Si donc on veut obtenir des systèmes qui ne se réduisent pas, il faut supposer

$$k + k' \leqq n \qquad \text{et} \qquad k + k' \leqq m. \tag{17}$$

28. Remarque II. — La méthode qui vient d'être exposée permet de former, dans un espace d'ordre quelconque, tous les réseaux O, tels que l'équation du réseau soit intégrable par la méthode de Laplace. Je laisse de côté, pour ne pas trop étendre ce Mémoire, la démonstration de ce résultat.

29. Remarque III. — On peut, dans le mode de formation indiqué, supposer $k = 0$; les Y_i seront des fonctions de u seul, on aura encore

$$\Sigma\, dY^2 + \Sigma\, dY'^2 = U^2\, du^2 + q_{k'}^2\, V^2\, dv^2$$

et le raisonnement qui a été fait (§§ 23 et 24) montre que les Y_i et Y'_i sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{q_{k'}} \frac{\partial q_{k'}}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v}.$$

30. *Cas de l'espace ordinaire ; types de réseaux.* — Si $\mu = 3$ on doit avoir

$$\alpha + \beta - r = 3,$$

d'où deux groupes de solutions :

1° $$\alpha = \beta = r = 1,$$

2° $$\alpha = 1, \qquad \beta = 2, \qquad r = 0.$$

Le cas de

$$\alpha = 2, \qquad \beta = 1, \qquad r = 0$$

se déduit du précédent en permutant u et v.

Premier groupe. — On a

$$n = 2k + 1, \qquad m = 2k' + 1.$$

Les formules (17) donnent

$$k + k' = 2k + 1, \qquad k + k' = 2k' + 1.$$

On voit que les deux nombres k et k' doivent être égaux ou différer d'une unité, d'où deux types appartenant à ce premier groupe :

(I) $\qquad n = 2k + 1, \qquad m = 2k + 1.$

(II) $\qquad n = 2k + 3, \qquad m = 2k + 1.$

Deuxième groupe. — On a

$$n = 2k + 1, \qquad m = 2k' - 2.$$

Les formules (17) donnent

$$k + k' \leqq 2k + 1, \qquad k + k' \leqq 2k' + 2.$$

Si k est donné, on voit que k' peut prendre les valeurs $k - 2$, $k - 1$, k, $k + 1$, d'où les quatre nouveaux types suivants :

(III) $\qquad n = 2k + 1, \qquad m = 2k - 2,$

(IV) $\qquad n = 2k + 1, \qquad m = 2k,$

(V) $\qquad n = 2k + 1, \qquad m = 2k + 2,$

(VI) $\qquad n = 2k + 1, \qquad m = 2k - 4.$

31. *Remarque sur l'application de la méthode de Laplace.* — Je désignerai par M le point qui décrit le réseau O dans l'espace ordinaire, par R_1 $R_2, \ldots,$ les points qui s'en déduisent successivement par l'application de la méthode de Laplace du côté des u; par S_1, $S_2, \ldots,$ du côté des v. On sait (§ 25) qu'on passe de M à R_1, en conservant les mêmes courbes, les mêmes équations linéaires, mais en diminuant d'une unité le nombre des paramètres q et en augmentant d'une unité le nombre des paramètres p.

32. *Premier type.* — On a $m = n = 2k + 1$; on a donc

$$Y_i = X_i + p_1 x_i + \ldots + p_k \frac{d^{k-1} x_i}{du^{k-1}}, \qquad Y'_i = X'_i + q_1 x_i + \ldots + q_k \frac{d^{k-1} x'_i}{dv^{k-1}}.$$

On peut, *en général*, ramener les relations linéaires à la forme suivante :

$$(18)\quad \begin{cases} Y_1 + iY'_1 = 0, \quad Y_2 + iY'_2 = 0, \quad \ldots, \quad Y_{2k-1} + iY'_{2k-1} = 0, \\ Y_{2k}\cos\alpha + Y'_{2k}\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Il restera alors, pour les trois coordonnées Z_1, Z_2, Z_3 du point M,

$$(19)\quad \begin{cases} Z_1 = -Y_{2k}\sin\alpha + Y'_{2k}\cos\alpha = -\frac{1}{\sin\alpha}Y_{2k} = +\frac{1}{\cos\alpha}Y'_{2k}, \\ Z_2 = Y_{2k+1}, \quad Z_3 = Y'_{2k+1}. \end{cases}$$

Pour obtenir les coordonnées $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ du point S_k, je pose

$$(20)\quad T_i = X_i, \quad T'_i = X'_i + r_1 x'_i + r_2\frac{dx'_i}{dv} + \ldots + r_{2k}\frac{d^{2k-1}x'_i}{dv^{2k-1}}.$$

je détermine les $2k$ paramètres $r_1, r_2, \ldots, r_{2k}$ par les équations

$$(21)\quad \begin{cases} T_1 + iT'_1 = 0, \quad T_2 + iT'_2 = 0, \quad \ldots, \quad T_{2k-1} + iT'_{2k-1} = 0, \\ T_{2k}\cos\alpha + T'_{2k}\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

J'aurai ensuite

$$(22)\quad \theta_1 = -\frac{1}{\sin\alpha}X_{2k}, \quad \theta_2 = X_{2k+1}, \quad \theta_3 = T'_{2k-1};$$

θ_1 et θ_2 sont des fonctions de u seul; le point S_k décrit un cylindre dont les génératrices sont parallèles au troisième axe de coordonnées. Si les quantités X_i sont des constantes, ce cylindre se réduit à une droite.

On voit de même que, le point R_k décrit un cylindre dont les génératrices sont parallèles au deuxième axe de coordonnées.

On voit facilement que si l'on remplace les courbes décrites par (A) et (B) par des courbes parallèles, toutes les surfaces (M) obtenues ont même représentation sphérique. On peut d'ailleurs obtenir très facilement cette représentation sphérique. Si l'on suppose que X_i et X'_i sont des constantes, on aura

$$(23)\quad \Sigma(Y_i - X_i)^2 + \Sigma(Y'_i - X'_i)^2 = 0,$$

ce qui donne, en tenant compte des équations (18) et (19),

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - 2\sum_1^{2k-1}(X'_r - iX_r)Y'_r + 2(X_{2k}\sin\alpha + X'_{2k}\cos\alpha)Z_1$$
$$- 2X_{2k+1}Z_2 - 2X'_{2k+1}Z_3 + \Sigma X^2 + \Sigma X'^2 = 0.$$

Si l'on suppose

$$(24) \qquad X'_r - i X_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2k-1),$$

on a bien l'équation d'une sphère.

Si $k = 1$, les lignes de courbure sont des lignes planes situées dans les plans tangents aux cylindres décrits par R_1 et S_1. Si de plus les X_i et les X'_i sont des constantes et si l'équation

$$X'_1 - i X_1 = 0$$

n'est pas vérifiée, on a une cyclide de Dupin.

Supposons $k = 2$. On a

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_i = X_i + p_1 x_i + p_2 \dfrac{dx_i}{du}, \qquad Y'_2 = X'_i + q_1 x'_i + q_2 \dfrac{dx'_i}{dv}, \\ Y_1 + i Y'_1 = 0. \qquad Y_2 - i Y'_2 = 0. \qquad Y_3 - i Y'_3 = 0. \\ \qquad\qquad Y_4 \cos\alpha + Y'_4 \sin\alpha = 0. \\ Z_1 = - Y_4 \sin\alpha + Y'_4 \cos\alpha = - \dfrac{1}{\sin\alpha} Y_4 = \dfrac{1}{\cos\alpha} Y'_4, \\ Z_2 = Y_5, \qquad Z_3 = Y'_5. \end{array} \right.$$

On a encore

$$\Sigma (Y_i - X_i)^2 + \Sigma (Y'_i - X'_i)^2 = 0$$

ou

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - 2 \Sigma X_i Y_i - 2 \Sigma X_i Y'_i + \Sigma X_i^2 + \Sigma X'^2_i = 0.$$

Cela posé, je suppose que les X_i soient constants. Les équations qui donnent les Y_i montrent que Y_1, Y_2, Y_3 peuvent s'exprimer en fonction linéaire de Y'_4, Y'_5 ou de Z_1 et Z_3, les coefficients de l'expression étant des fonctions de v; les équations (25) permettront ensuite d'exprimer de la même façon Y_1, Y_2, Y_3. On remplacera aussi Y_4, Y_5, Y'_4, Y'_5 par leurs valeurs à l'aide de Z_1, Z_2, Z_3. On aura alors

$$(26) \qquad Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - 2 A Z_1 - 2 X_5 Z_2 - 2 B Z_3 - C = 0,$$

où A, B, C sont des fonctions de v. On voit que, si u varie seul, le point M décrit une courbe tracée sur la sphère (26). Le lieu des centres de ces sphères est une courbe plane; le plan de cette courbe est perpendiculaire au troisième axe de cordonnées.

Si les X_i et les X_i sont constants, les deux systèmes de lignes de courbure sont sphériques, les centres des sphères de chaque

système décrivent une courbe plane. Les plans de ces deux courbes sont perpendiculaires.

33. *Deuxième type.* — On a $n = 2k + 1$, $m = 2k - 3$.

$$Y_i = X_i + p_1 \frac{dx_i}{du} + \ldots + p_k \frac{d^{k-1}x_i}{du^{k-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k+1),$$

$$Y'_i = X'_i + q_i \frac{dx'_i}{dv} + \ldots + q_{k+1} \frac{d^k x'_i}{dv^k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k+3).$$

On peut, *en général*, ramener les relations linéaires à la forme suivante :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_1 + i Y'_1 = 0, \quad Y_2 - i Y'_2 = 0, \quad \ldots \quad Y_{2k} + i Y'_{2k} = 0, \\ \qquad Y_{2k+1} \cos\alpha + Y'_{2k+1} \sin\alpha = 0. \end{array} \right.$$

Les trois coordonnées Z_1, Z_2, Z_3 du point M sont

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_1 = -Y_{2k+1} \sin\alpha - Y'_{2k+1} \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sin\alpha} Y_{2k+1} = \dfrac{1}{\cos\alpha} Y'_{2k+1}, \\ \qquad Z_2 = Y'_{2k+2}, \qquad Z_3 = Y'_{2k+3}. \end{array} \right.$$

Pour obtenir les coordonnées du point $S_k(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ on pose

$$(29) \qquad T_i = X_i, \qquad T'_i = X'_i + r_1 x'_i - r_2 \frac{dx'_i}{dv} + \ldots - r_{2k+1} \frac{d^{2k} x'_i}{dv^{2k}}.$$

On détermine les $2k + 1$ paramètres r par les équations

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 + i T'_1 = 0, \quad T_2 + i T'_2 = 0, \quad \ldots \quad T_{2k} - i T'_{2k} = 0, \\ \qquad T_{2k+1} \cos\alpha + T'_{2k+1} \sin\alpha = 0. \end{array} \right.$$

On aura alors

$$(31) \qquad \theta_1 = -\frac{1}{\sin\alpha} X_{2k+1}, \qquad \theta_2 = T'_{2k+2}, \qquad \theta_3 = T'_{2k+2}.$$

θ_1 est une fonction de u seul; dans le réseau S_k les courbes $u = \text{const.}$ sont des courbes planes : le plan de ces courbes est perpendiculaire au premier axe de coordonnées. Si, de plus, les X_i sont constants, θ_1 est constant, θ_2 et θ_3 sont des fonctions de v ; le réseau S_k se réduit à une courbe plane.

Pour obtenir les coordonnées (W_1, W_2, W_3) du point R_k, je pose

$$V_i = X_i + \rho_1 x_i + \rho_2 \frac{dx_i}{du} + \ldots + \rho_{2k} \frac{d^{2k-1} x_i}{du^{2k-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k+1),$$

$$V'_i = X'_i + \rho x'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k+3).$$

Je détermine les $2k+1$ paramètres ρ par les équations

$$V_1 + i V'_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad V_{2k} + i V'_{2k} = 0,$$
$$V_{2k+1} \cos\alpha + V'_{2k+1} \sin\alpha = 0.$$

J'aurai ensuite

$$W_1 = \frac{1}{\cos\alpha} V'_{2k+1}, \qquad W_2 = V'_{2k+2}, \qquad W_3 = V'_{2k+3}.$$

On voit que le réseau R_k est tracé sur une développable. Si les X'_i sont constants, cette développable se réduit à un cône.

Si $k = 0$, la surface (M) est un hélicoïde développable.

Si $k = 1$, les lignes de courbure $v =$ const. sont planes, les plans tangents à la développable sur laquelle est placée R_1. Si de plus les X_i sont constants, les courbes $u =$ const. sont sphériques; le lieu des centres des sphères est une droite.

Si $k = 2$, les courbes $v =$ const. sont des courbes sphériques. Le lieu des centres des sphères est une courbe gauche.

34. *Troisième type.* — On a $n = 2k+1$, $m = 2k-2$.

$$Y_i = X_i + p_1 \frac{dx_i}{du} + \ldots + p_k \frac{d^{k-1} x_i}{du^{k-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k+1),$$

$$Y'_i = X'_i + q_1 \frac{dx'_i}{dv} + \ldots + q_{k-2} \frac{d^{k-3} x'_i}{dv^{k-3}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k-2).$$

On peut, *en général*, ramener les relations linéaires à la forme

$$Y_1 + i Y'_1 = 0, \qquad Y_2 + i Y'_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_{2k-2} + i Y'_{2k-2} = 0.$$

Les coordonnées Z_1, Z_2, Z_3 du point M sont

$$Z_1 = Y_{2k-1}, \qquad Z_2 = Y_{2k}, \qquad Z_3 = Y_{2k+1}.$$

Le point S_{k-1} se trouve sur une développable; le point qui décrit l'arête de rebroussement a pour coordonnées $X_{2k-1}, X_{2k}, X_{2k+1}$. Dans le réseau R_{k-2} la tangente à la courbe $v =$ const. conserve une direction fixe quand v varie seul. Si, de plus, les X_i sont des

constantes, le réseau R_{k-2} se réduit à une courbe, la tangente à cette courbe est normale au plan osculateur de la développable S_{k-1}.

Pour $k = 2$, on a les surfacs de Monge. Si, de plus, les X_i sont constants, les courbes $v =$ const. sont situées sur des sphères concentriques; ce sont les trajectoires orthogonales des plans tangents d'un cône.

Si $k = 3$ et si $\Sigma X'^2 = C$, les courbes $u =$ const. sont sphériques. On voit en effet qu'on a

$$Y'_1 = X'_2 + q x'_1, \quad Y'_2 = X'_2 + q x'_2, \quad Y'_3 = X'_3 + q x'_3, \quad Y'_4 = X'_4 + q x'_4;$$

on a donc

$$Y'^2_1 + Y'^2_2 + Y'^2_3 + Y'^2_4 = \Sigma X'^2 + 2q \Sigma X' x' + q^2 \Sigma x'^2 = C;$$

on aura donc

$$\Sigma (Y - X)^2 + \Sigma Y'^2 = C,$$

ce qui donne

$$(32) \qquad Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - 2\Sigma XY - \Sigma X^2 - C = 0.$$

Or ici on peut exprimer p_1, p_2, p_3 en fonction linéaire de Z_1, Z_2, Z_3, les coefficients étant des fonctions de u; il en sera donc de même de Y_1, Y_2, Y_3, Y_4; en portant dans l'équation (32) on obtient une expression de la forme

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - 2\alpha Z_1 - 2\beta Z_2 - 2\gamma Z_3 + \delta = 0,$$

α, β, γ, δ étant des fonctions de u seul; ce qui démontre la proposition.

35. *Quatrième type.* — On a $n = 2k + 1$, $m = 2k$.

$$Y_i = X_i + p_1 x_i + \ldots + p_k \frac{d^{k-1} x_i}{du^{k-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k + 1),$$

$$Y'_i = X'_i + q_1 x'_i + \ldots + q_{k-1} \frac{d^{k-2} x'_i}{du^{k-2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k).$$

On peut, *en général*, ramener les relations linéaires à la forme

$$Y_1 + i Y'_1 = 0, \qquad Y_2 = i Y'_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_{2k+1} + i Y'_{2k+1} = 0.$$

Les coordonnées du point M sont

$$Z_1 = Y_{2k}, \qquad Z_2 = Y_{2k+1}, \qquad Z_3 = Y_{2k}.$$

Le point S_k se trouve sur un cylindre; car les deux premières coordonnées θ_1 et θ_2 de ce point sont X_{2k} et X_{2k+1}. Dans le réseau R_{k-1} la troisième coordonnée est X'_{2k}, c'est une fonction de v; quand u varie seul, le point R_{k-1} décrit une courbe plane, dont le plan est perpendiculaire au troisième axe de coordonnées. Si, de plus, les quantités X'_i sont des constantes, ce réseau se réduit à une courbe plane.

Si $k = 1$, on obtient les surfaces moulures.

Si $k = 2$ et si les quantités X_i sont des constantes, les lignes de courbure $v =$ const. sont sphériques; le lieu des centres des sphères est une droite.

Si $k = 2$ et si les quantités X'_i sont telles que

$$\Sigma X'^2_i = \text{const},$$

les courbes $u =$ const. sont sphériques. Le lieu des centres des sphères est une courbe plane.

36. *Cinquième type.* — On a $n = 2k + 1$, $m = 2k + 2$.

$$Y_i = X_i + p_1 x_i + \ldots + p_k \frac{d^{k-1} x_i}{du^{k-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k + 1).$$

$$Y'_i = X'_i + q_1 x'_i + \ldots + q_k \frac{d^{k-1} x'_i}{dv^{k-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k + 2).$$

On peut, *en général*, ramener les relations linéaires à la forme

$$Y_1 + i Y'_1 = 0, \qquad Y_2 + i Y'_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_{2k} + i Y'_{2k} = 0.$$

Les coordonnées du point M sont

$$Z_1 = Y_{2k+1}, \qquad Z_2 = Y'_{2k+1}, \qquad Z_3 = Y'_{2k+2}.$$

Dans le réseau S_k les courbes $u =$ const. sont des courbes planes, car la première coordonnée de S_k est X_{2k+1}. Le réseau R_k est tracé sur un cylindre, car les deux dernières coordonnées de R_k sont X'_{2k+1} et X'_{2k+2}. Si les quantités X' sont des constantes, le cylindre se réduit à une droite.

Si $k = 1$, les courbes $v =$ const. sont des courbes planes; les plans de ces courbes enveloppent un cylindre. Si, de plus, $\Sigma X'^2$ est constant, les courbes $u =$ const. sont sphériques; le lieu des centres des sphères est une droite.

Si $k=2$ et si les quantités X_i sont des constantes, les courbes $v=$ const. sont sphériques; le lieu des centres des sphères est une courbe plane.

37. *Sixième type.* — On a $n=2k+1$, $m=2k+4$.

$$Y_i = X_i + p_1 x_i + \ldots + p_k \frac{d^{k-1} x_i}{du^{k-1}} \qquad (i=1, 2, \ldots, 2k+1),$$

$$Y'_i = X'_i + q_1 x'_i + \ldots + q_{k+1} \frac{d^k x'_i}{dv^k} \qquad (i=1, 2, \ldots, 2k+4).$$

On peut, *en général*, mettre les relations linéaires sous la forme

$$Y_1 + i Y'_1 = 0, \qquad Y_2 + i Y'_2 = 0, \qquad \ldots \qquad Y_{2k+1} + i Y'_{2k+1} = 0.$$

Les coordonnées du point M sont

$$Z_1 = Y'_{2k+2}, \qquad Z_2 = Y'_{2k+3}, \qquad Z_3 = Y'_{2k+4}.$$

Dans le réseau S_k la tangente à la courbe $u=$ const. conserve une direction fixe quand u varie; si, de plus, les X_i sont des constantes, ce réseau se réduit à une courbe, car les trois coordonnées de S_k seront des fonctions de v seul.

Le réseau R_k est tracé sur une développable; le point qui décrit l'arête de rebroussement a pour coordonnées X'_{2k+2}, X'_{2k+3}, X'_{2k+4}.

Si $k=0$, le réseau (M) est formé par les génératrices d'une développable et leurs trajectoires orthogonales.

Si $k=1$, les courbes $v=$ const. sont des courbes planes; on obtient ainsi les surfaces les plus générales qui admettent un système de lignes de courbures planes.

Si $k=2$ et si les X_i sont constants, les courbes $v=$ const. sont sphériques.

Chapitre VII. — *Application aux couples de surfaces applicables.*

38. Je considère encore une courbe $A(X_1, \ldots, X_{2k+1})$, k fois isotrope, dans un espace d'ordre $2k+1$; et une courbe $B(X'_1, \ldots, X'_{2k'+1})$, k' fois isotrope dans un espace d'ordre $2k'+1$. Je suppose que les X sont des fonctions de u et les X′ des fonctions de v.

Je pose

$$(1)\quad \begin{cases} Y_i = X_i + p_1 x_i + \ldots + p_{k-1}\dfrac{d^{k-2}x_i}{du^{k-2}} & (i = 1, 2, \ldots, 2k+1), \\ Y'_i = X'_i - q_1 x'_i + \ldots - q_{k'-1}\dfrac{d^{k'-2}x'_i}{dv^{k'-2}} & (i = 1, 2, \ldots, 2k'+1), \end{cases}$$

où p et q désignent des fonctions arbitraires de u et v. En différentiant les équations (1) on trouve

$$(2)\qquad \Sigma\, dY_i^2 = 0, \qquad \Sigma\, dY_i'^2 = 0.$$

J'effectue sur les $2(k+k')+2$ coordonnées Y_i et Y'_i une solution orthogonale à coefficients constants; soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2(k+k')+2}$ les nouvelles coordonnées. On aura encore

$$\Sigma\, dZ^2 = 0,$$

Je garde les coordonnées $Z_1, Z_2, \ldots, Z_6$ et je détermine les $k+k'-2$ fonctions p et q par $k+k'-2$ équations :

$$(3)\quad Z_7 - iZ_8 = 0, \qquad Z_9 + iZ_{10} = 0, \qquad Z_{2(k+k')+1} + iZ_{2(k+k')+2} = 0.$$

Les fonctions Z sont solutions d'une même équation de Laplace (§ 24) et l'on a, en tenant compte des équations (3),

$$(4)\qquad dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 + dZ_4^2 - dZ_5^2 + dZ_6^2 = 0.$$

Les points $M(Z_1, Z_2, Z_3)$ et $N(iZ_4, iZ_5, iZ_6)$ décrivent des surfaces applicables. Ces surfaces sont rapportées à leur réseau conjugué commun.

Si des équations (5) on pouvait déduire une relation entre les Y seuls, cela reviendrait en somme à diminuer k d'une unité. On doit donc avoir

$$k + k' - 2 \leq 2k + 1$$

et de même

$$k + k' - 2 \geq 2k' + 1;$$

d'où les quatre types suivants :

1° Les nombres k et k' sont égaux;
2° Ils diffèrent d'une unité;
3° Ils diffèrent de deux unités;
4° Ils diffèrent de trois unités.

39. *Premier type.* — $k' = k$. On a

$$\begin{aligned} Y_i &= X_i + p_1 x_i + \ldots + p_{k-1} \frac{d^{k-2} x_i}{du^{k-2}} \\ Y'_i &= X'_i + q_1 x'_i + \ldots + q_{k-1} \frac{d^{k-2} x'_i}{dv^{k-2}} \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \ldots, 2k+1).$$

On peut, en général, mettre les relations linéaires sous la forme

$$Y_1 + i Y'_1 = 0, \qquad Y_2 + i Y'_2 = 0, \qquad \ldots \qquad Y_{2k+2} + i Y'_{2k+2} = 0.$$

On aura

$$\begin{aligned} Z_1 &= Y_{2k-1}, & Z_2 &= Y_{2k}, & Z_3 &= Y_{2k+1}, \\ Z_4 &= Y'_{2k-1}, & Z_5 &= Y'_{2k}, & Z_6 &= Y'_{2k+1}. \end{aligned}$$

Si l'on suppose $k = 3$, le point Z_1, Z_2, Z_3 décrit quand u reste fixe une courbe plane; de même si v reste fixe, le point Z_4, Z_5, Z_6 décrit une courbe plane. On obtient des réseaux C, formés d'une série de courbes planes (*Comptes rendus*, 1er semestre 1911).

40. *Deuxième type.* — $k' = k + 1$. On a

$$Y_i = X_i + p_1 x_i + \ldots + p_{k-1} \frac{d^{k-2} x_i}{du^{k-2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k-1),$$

$$Y'_i = X'_i + p_1 x'_i + \ldots + q_k \frac{d^{k-1} x'_i}{dv^{k-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k+3).$$

On peut mettre les relations linéaires sous la forme

$$Y_1 + i Y'_1 = 0, \qquad Y_2 + i Y'_2 = 0, \qquad \ldots \qquad Y_{2k-1} + i Y'_{2k-1} = 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} Z_1 &= Y_{2k}, & Z_2 &= Y_{2k+1} & Z_3 &= Y'_{2k}, & Z_4 &= Y'_{2k+1}, \\ Z_5 &= Y'_{2k+2}, & Z_6 &= Y'_{2k+3}. \end{aligned}$$

Si $k = 2$. Le point Z_1, Z_2, Z_3 décrit quand v varie seul une courbe plane. Les plans de ces courbes enveloppent un cylindre.

41. *Troisième type.* — $k' = k + 2$. On a

$$Y_i = X_i + p_i x_i + \ldots + p_{k-1} \frac{d^{k-2} x_i}{du^{k-2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k-1),$$

$$Y'_i = X'_i + q_1 x'_i + \ldots + q_{k+1} \frac{d^k x_i}{dv^k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k+5).$$

On peut mettre les relations linéaires sous la forme

$$Y_1 - iY'_1 = 0, \qquad Y_2 - iY'_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_{2k} - iY'_{2k} = 0.$$

On a

$$Z_1 = Y_{2k-1}, \qquad Z_2 = Y'_{2k-1}, \qquad Z_3 = Y_{2k-2}, \qquad Z_4 = Y'_{2k-3},$$
$$Z_5 = Y_{2k-4}, \qquad Z_6 = Y'_{2k-5}.$$

Si $k = 1$, le point Z_1, Z_2, Z_3 décrit, quand v varie, une courbe plane; les plans de ces courbes sont parallèles.

42. *Quatrième type.* — $k' = k - 3$. On a

$$Y_i = X_i - p_1 x_i - \ldots - p_{k-1} \frac{d^{k-2} x_i}{du^{k-2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k+1),$$

$$Y'_i = X'_i - q_1 x_i - \ldots - q_{k-2} \frac{d^{k+1} x_i}{dv^{k-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k-7).$$

On peut prendre les relations linéaires

$$Y_1 - iY_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_{2k-1} - iY_{2k-1} = 0.$$

On aura

$$Z_1 = Y_{2k-2}, \qquad Z_2 = Y'_{2k-3}, \qquad \ldots, \qquad Z_6 = Y_{2k-7}.$$

CHAPITRE VIII. — *Application aux systèmes triple-orthogonaux.*

43. Soient $A(X_1, X_2, \ldots, X_{2k+1})$ un point qui décrit une courbe k fois isotrope dépendant du paramètre u; $B(X'_1, \ldots, X'_{2k'+1})$ un point qui décrit une courbe k' fois isotrope dépendant du paramètre v; enfin $C(X''_1, \ldots, X''_{2k''-1})$ une courbe k'' fois isotrope et qui dépend du paramètre w. Je pose

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} Y_i &= X_i - p_1 x_i - \ldots - p_k \frac{d^{k-1} x_i}{du^{k-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k-1), \\ Y'_i &= X'_i - q_1 x_i - \ldots - q_{k'} \frac{d^{k'-1} x_i}{dv^{k'-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k'-1), \\ Y''_i &= X''_i - r_1 x_i - \ldots - r_{k''} \frac{d^{k''-1} x_i}{dw^{k''-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k''-1), \end{aligned} \right.$$

où les quantités p, q, r sont des fonctions arbitraires de u, v, w. On sait qu'on a

$$(2) \quad \Sigma\, dY_i^2 = U^2 p_k^2\, du^2, \qquad \Sigma\, dY'^2_i = V^2 q_{k'}^2\, dv^2, \qquad \Sigma\, dY''^2_i = W^2 r_{k''}^2\, dw^2.$$

et, par conséquent,

$$(3)\qquad \Sigma\, dY_i^2 + dY_i'^2 + dY_i''^2 = U^2 p_k^2\, du^2 + V^2 q_k^2\, dv^2 + W^2 r_k^2\, dw^2,$$

U, V, W étant respectivement des fonctions de u, de v, de w.

Cela posé sur les $n = 2(k + k' + k'') - 3$ coordonnées Y, Y_1, Y'' j'effectue une substitution orthogonale à coefficients constants; soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ les nouvelles coordonnées. J'aurai encore

$$(4)\qquad dZ_1^2 + dZ_2^2 + \ldots + dZ_n^2 = U^2 p_k^2\, du^2 + V^2 q_k^2\, dv^2 + W^2 r_k^2\, dw^2.$$

Je détermine les $k + k' + k''$ paramètres p, q, r par les équations du premier degré

$$(5)\qquad Z_1 + iZ_2 = 0, \qquad Z_3 + iZ_4 = 0, \qquad \ldots \qquad Z_{n-1} + iZ_{n-3} = 0.$$

En tenant compte des équations (4) et (5), on aura

$$(6)\qquad dZ_{n-2}^2 + dZ_{n-1}^2 + dZ_n^2 = U^2 p_k^2\, du^2 + V^2 q_k^2\, dv^2 + W^2 r_k^2\, dw^2,$$

et, par conséquent, le point qui a pour coordonnées Z_{n-2}, Z_{n-1}, Z_n décrit un système triple-orthogonal.

44. Remarque. — Les équations (5) doivent être telles qu'elles permettent de déterminer les paramètres p, q, r.

Si de ces équations il était possible de déduire une relation entre les Y seuls, cela reviendrait, en somme, à diminuer k d'une unité; si donc on veut éviter une pareille réduction il faut que

$$k + k' + k'' \leq 2k' + 1 + 2k'' + 1,$$

d'où

$$k \leq k' + k'' + 2.$$

Le plus grand des nombres k, k', k'' est au plus égal à la somme des deux autres augmentée de deux unités.

45. Cas où $k = k' = k'' = 1$. On a

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + px_1, & Y_1' &= X_1' + qx_1, & Y_1'' &= X_1'' + rx_1, \\ Y_2 &= X_2 + px_2, & Y_2' &= X_2' + qx_2, & Y_2'' &= X_2'' + rx_2, \\ Y_3 &= X_3 + px_3, & Y_3' &= X_3' + qx_3, & Y_3'' &= X_3'' + rx_3. \end{aligned}$$

Prenons les relations linéaires sous la forme

$$(6)\qquad Y_2 + iY_2' = 0, \qquad Y_3 + iY_3' = 0, \qquad Y_3'' + iY_3'' = 0$$

qui permettent bien de déterminer p, q, r. Les coordonnées du point qui décrit le système triple sont

$$(7) \qquad Z_1 = Y_1, \qquad Z_2 = Y'_1, \qquad Z_3 = Y''_1.$$

Je suppose que u varie seul. On a

$$Y'_3 = X'_3 + \frac{x'_3}{x'_1}(Z_2 - X'_1),$$

$$Y''_2 = X''_2 + \frac{x''_2}{x''_1}(Z_3 - X''_1).$$

Je porte ces valeurs dans la seconde des équations (6). On a

$$X'_3 + \frac{x'_3}{x'_1}(Z_2 - X'_1) + i\left[X''_2 + \frac{x''_2}{x''_1}(Z_3 - X''_1)\right] = 0.$$

Si v et w sont constants, le point est situé dans un plan parallèle au premier axe de coordonnées; on arrive à des conclusions analogues lorsque v ou w varient seuls. Les trois séries de courbes de Lamé sont des courbes planes. (G. Darboux, *Leçons sur les Systèmes orthogonaux*, 2e édition, Note.)

Si X_1, X_2, X_3 sont constants, les premières courbes de Lamé sont des cercles. En effet, on a

$$\Sigma(Y_i - X_i)^2 + \Sigma(Y'_i - X'_i)^2 - \Sigma(Y''_i - X''_i)^2 = 0,$$

ce qui, en vertu des équations (6), devient

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - 2\Sigma X_i Y_i - 2\Sigma X'_i Y'_i - 2\Sigma X''_i Y''_i - \Sigma X_i^2 + \Sigma X'^2_i + \Sigma X''^2_i = 0.$$

On peut exprimer Y'_2, Y'_3, en fonction de Z_2 et v: il en sera de même de Y_2 en vertu de la première des équations (6); de même on peut exprimer Y''_2 et Y''_3 en fonction de Z_3 et w; il en sera de même de Y_3 à cause de la troisième équation (6). L'équation précédente devient donc

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - 2X_1 Z_1 - 2aZ_2 - 2bZ_3 + c = 0.$$

a, b, c étant des fonctions de v et de w. Quand u varie, seul le point décrivant est à la fois sur un plan et sur une sphère; les premières courbes de Lamé sont donc des cercles.

Si les X, X', X'' sont des constantes, toutes les courbes de Lamé

sont des cercles. Les surfaces $u = \text{const.}$ sont, en général, des cyclides de Dupin. Il y a exception si l'on a

$$X'_3 + iX''_2 = 0.$$

Les surfaces $u = \text{const.}$ sont des sphères; le centre de ces sphères décrit une droite.

46. Cas où $k = k' = k'' = 2$. On a

$$\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 + p_1 x_1 + p_2 \frac{dx_1}{du}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Y_5 &= X_5 - p_1 x_5 + p_2 \frac{dx_5}{du}, \\
Y'_1 &= X'_1 + q_1 x'_1 + q_2 \frac{dx'_1}{dv}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Y'_5 &= X'_5 + q_1 x'_5 + q_2 \frac{dx'_5}{dv}, \\
Y''_1 &= X''_1 + r_1 x''_1 - r_2 \frac{dx''_1}{dv}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Y''_5 &= X''_5 + r_1 x''_5 + r_2 \frac{dx''_5}{dv}.
\end{aligned}$$

Nous prendrons les relations linéaires suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} Y_2 + iY'_2 = 0, & Y'_4 + iY''_2 = 0, & Y''_4 + iY_5 = 0, \\ Y_3 + iY'_3 = 0, & Y'_5 - iY''_3 = 0, & Y''_3 + iY_5 = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées du point décrivant sont alors

$$Z_1 = Y_1, \qquad Z_2 = Y'_1, \qquad Z_3 = Y''_1.$$

Si $X_1, X_2, \dots, X_5$ sont constants, on pourra, des quatre équations

$$\begin{aligned}
Z_2 &= X'_1 + q_1 x'_1 + q_2 \frac{dx'_1}{dv}, \\
Z_3 &= X''_1 - r_1 x''_1 + r_2 \frac{dx''_1}{dv}, \\
Y'_4 + iY''_2 &= 0, \qquad Y'_5 + iY''_3 = 0.
\end{aligned}$$

déduire q_1, q_2, r_1, r_2 en fonction linéaire de Z_1 et Z_2, les coefficients étant des fonctions de v et de w. Il en sera de même des Y

et des Y' et, en tenant compte des équations (7), il en sera de même de Y_2, Y_3, Y_4, Y_5. Cela posé, on a, comme au paragraphe précédent,

$$Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 - 2\Sigma XY - 2\Sigma X'Y' - 2\Sigma X''Y'' - \Sigma X^2 - \Sigma X'^2 - \Sigma X''^2 = 0.$$

En remplaçant dans cette équation les Y par leurs valeurs, on a une expression de la forme

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - 2X_1 Z_1 - 2\alpha Z_2 - 2\beta Z_3 - \gamma = 0,$$

α, β, γ, δ étant des fonctions de v et w; il en résulte que la première courbe de Lamé est une courbe sphérique. Le lieu des centre des sphères est un plan perpendiculaire au premier axe de coordonnées.

Si les X, X', X'' sont tous constants, on a un système triple dans lequel toutes les courbes de Lamé sont des courbes sphériques.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ARRHENIUS (Svante). — *Das Weltall*. Vortrag. gr. in-8, 31 p. Leipzig, A. Kröner. 1 m.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne, avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules MOLK. Tome I (vol. 4) : Statistique (Oltramare). Assurances (Poterin du Motel). Économie mathématique (Pareto). Fasc. 4. In-8, p. 481-640. Leipzig, B.-G. Teubner; Paris, Gauthier-Villars. 7 fr.

STUDY (E.). — *Vorlesungen üb. ausgewählte Gegenstände der Geometrie*. 1. Heft. Ebene analyt. Kurven u. zu ihnen gehör. Abbildgn. gr. in-8, IV-126 p. avec 9 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m. 80.

Der mathematische Unterricht in Schweden. Berichte der schwed. Abteilg. der internationalen mathemat. Unterrichtskommission. Hersg. v. *H. v. Koch* u. *E. Göransson*. In-8, VII-52-28-51-23-22-21 et 18 p. avec 1 fig. Stockholm, C.-E. Fritze. 3 m. 40.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MINKOWSKI (H.). — GESAMMELTE ABHANDLUNGEN, unter Mitwirkung von A. SPEISER und H. WEYL, herausgegeben von D. HILBERT, 2 vol. gr. in-8° de XXI-371 et 465 pages. Leipzig, Teubner, 1911.

Une mort brutale est venue, le 12 janvier 1911, ajouter le nom de Minkowski à la trop longue liste des hommes que la Science a vu disparaître, en plein talent et en pleine activité, alors qu'elle était encore en droit de fonder sur eux de longues espérances.

Avec l'aide de MM. Speiser et Weyl, M. Hilbert a rassemblé l'œuvre, déjà si considérable et si variée, que cette mort est venue interrompre. Il la fait précéder d'une belle Notice biographique, dont nous publions ci-après la plus grande partie : il ne saurait exister de meilleure analyse de ce recueil, monument élevé à la mémoire de Minkowski.

Nous engageons d'ailleurs le lecteur à se reporter à la Notice originale. Nous avons été obligés, en effet, pour abréger de supprimer les passages (particulièrement toute la fin) où, à côté de l'œuvre scientifique, M. Hilbert montre le savant lui-même et l'homme.

Cela est d'autant plus à regretter que si la mémoire de Minkowski s'impose à l'admiration de tout mathématicien, elle doit attirer particulièrement la sympathie des savants de notre pays. Elle restera éternellement associée à celle d'Hermite. C'est de notre grand Géomètre français que Minkowski tient la tradition scientifique qu'il a si bien su poursuivre dans toute la partie arithmétique de son œuvre. Il a tenu à rapporter à Hermite l'honneur de ses premières et précoces productions, si bien marquées pourtant, dès l'abord, de son génie propre et qui l'ont immédiatement classé parmi les Maîtres. Les idées d'Hermite n'étaient pas, en effet, de celles qui prêtent aux faciles développements ; elles attendaient un continuateur et non un élève. En fait, Minkowski a été, pour ainsi dire, le seul qui ait pu, jusqu'ici, assumer ce rôle magnifique et difficile. On verra plus loin, dans les lettres que cite M. Hilbert,

avec quelle joie pleine de noblesse et d'abnégation Hermite salue les débuts de celui qui devait, pendant 20 années, apporter de si beaux fleurons à sa couronne. J. H.

. . . . . .

L'heure des travaux mathématiques profonds et puissants ne se fit pas attendre chez Minkowski. Au printemps de 1881, l'Académie des Sciences de Paris avait mis au concours le problème de la décomposition des nombres entiers en sommes de cinq carrés. C'est à cette question que l'étudiant de 16 ans [1] s'attaqua de toute son énergie : il la résolut de la manière la plus brillante, en développant la théorie des formes quadratiques bien au delà du sujet proposé par l'Académie, particulièrement en ce qui concerne leur classification en ordre et en genres, même pour des valeurs quelconques de l'indice d'inertie [2] ... Quoique son travail [3] fût rédigé en allemand, contrairement aux stipulations de l'Académie, celle-ci ne lui en décerna pas moins, en avril 1883, le Grand Prix des Sciences mathématiques, tout en spécifiant le caractère exceptionnel de cette décision, parce qu'elle n'admit pas « qu'il y eût lieu de repousser pour une irrégularité de forme un travail de cette importance ».

Lorsque l'attribution du prix à Minkowski fut connue à Paris, on put lire contre lui, dans une certaine presse, les attaques et les accusations les plus dénuées de fondement. Les académiciens français C. Jordan et J. Bertrand prirent immédiatement et sans réserve le parti de Minkowski. « Travaillez, je vous prie, à devenir un géomètre éminent ». C'est à ce conseil donné par le grand mathématicien français C. Jordan au jeune étudiant allemand qu'aboutit la correspondance engagée à cette occasion entre Jordan et Minkowski. Ce conseil, Minkowski a pris à cœur de s'y conformer : dès cette époque commence pour lui une ère de labeur joyeux et fécond.

---

(1) Minkowski était né le 22 juin 1864, à Alexoten (Russie).

(2) *Voir* t. I, p. 5, des *Gesammelte Abhandlungen* dont nous rendons compte en ce moment.

(3) *Ges. Abhandl.*, t. I, p. 3-144.

Gauss, dans ses *Disquisitiones arithmeticæ*, a fondé la théorie de formes quadratiques à coefficients entiers et du même coup, au fond, notre théorie actuelle des corps quadratiques. La généralisation de la théorie de Gauss pouvait se faire dans deux directions: d'une part, par la théorie des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables; de l'autre, par celle des formes décomposables de degré supérieur, c'est-à-dire des corps algébriques de degrés quelconques. La question posée par l'Académie conduisait tout d'abord Minkowski à la première de ces deux généralisations: en fait, on le voit, dans les années qui suivent, consacrer toute son activité scientifique à la *théorie des formes quadratiques* et aux questions qui y sont le plus étroitement liées. La théorie de Gauss avait trouvé un complément essentiel dans les considérations nouvelles, empruntées au domaine transcendant, par lesquelles Dirichlet avait pu obtenir l'expression du nombre des classes de formes quadratiques de déterminant donné. Cette méthode demandait à être généralisée dans chacune des deux directions précédemment mentionnées. C'est ce qui avait été fait, pour la seconde d'entre elles, celle des corps algébriques, par Kummer d'abord et, d'une manière entièrement générale, par Dedekind; mais au premier point de vue (formes quadratiques à un nombre quelconque de variables), il n'existait que des indications préliminaires dues à St. Smith, arithméticien anglais déjà âgé qui avait été le concurrent de Minkowski devant l'Académie de Paris. Minkowski opéra la détermination du nombre des classes contenues dans un genre de formes quadratiques à un nombre quelconque de variables, car tel était le fond de la question, d'après la méthode de Dirichlet. Les résultats ainsi obtenus forment le contenu essentiel de la dissertation inaugurale [1] qui valut à son auteur le titre de Docteur de la Faculté de Königsberg.

..... Une suggestion de Kronecker conduisit Minkowski à l'étude intéressante de la manière dont les substitutions linéaires à coefficients entiers se comportent au point de vue de la congruence par rapport à un module quelconque [2]. Il obtint la proposition, féconde en applications, d'après laquelle une substi-

---

(1) *Ges. Abhandl.*, t. I, p. 157-202.
(2) *Ges. Abhandl.*, t. I, p. 203-211, 212-218.

tution d'ordre fini à n variables qui est congrue, par rapport à un module plus grand que 3, à la substitution identique, ne peut être que la substitution identique elle-même. A l'aide de ce théorème il parvint à montrer que l'ordre d'un groupe fini de substitutions linéaires et homogènes à n variables est toujours un diviseur du nombre

$$2^n(2^n-1)(2^n-2)\ldots(2^n-2^{n-1}),$$

et, de même, il indique un entier dépendant de n seul et que doit nécessairement diviser le nombre des substitutions à coefficients entiers qui transforment en elle-même une forme quadratique à n variables. Les deux Mémoires qui contiennent ce résultat furent présentés à l'Université de Bonn comme Habilitationsschrift.

Mentionnons ici un autre travail de Minkowski, en le rangeant encore dans la période de début parce qu'il est, lui aussi, exclusivement relatif aux formes quadratiques : c'est celui [1] dans lequel il établit les conditions pour qu'une forme quadratique à coefficients rationnels puisse être transformée, par une substitution linéaire à coefficients rationnels, en une autre forme quadratique ou encore multiple rationnel de celle-ci, et qui fut occasionnné par un Mémoire rédigé en commun par M. Hurwitz et moi-même, sur les équations indéterminées à trois variables de genre zéro. Nos raisonnements aboutissaient à établir que toute équation de cette nature pouvait, par transformation birationnelle, se ramener à une équation quadratique ; les questions qui se présentaient ensuite, en particulier celle de reconnaître si une équation indéterminée du second degré à n inconnues admet des solutions rationnelles, sont complètement élucidées par Minkowski ; mais son analyse a une portée beaucoup plus grande et donne une théorie complète des invariants des formes quadratiques au point de vue de la théorie des nombres.

Ensuite commence, dans la production mathématique de Minkowski, la période la plus riche et la plus importante : ses recherches, limitées jusque-là au domaine spécial des formes quadratiques, acquièrent de plus en plus de généralité et aboutissent finalement à la création de la doctrine qu'il a lui-même caractérisée d'une

---

[1] *Ges. Abhandl.*, t. I, p. 219-239.

manière frappante par la dénomination de *Geometrie der Zahlen* et exposée dans le grandiose Ouvrage qui porte ce même titre.

Le problème qui consiste à faire un choix déterminé dans la liste indéfinie des formes quadratiques qui appartiennent à une même classe (autrement dit, le problème de la réduction des formes quadratiques) avait déjà occupé Minkowski à plusieurs reprises. Il fut séduit, avant tout, par les célèbres lettres que Ch. Hermite, en 1850, adressait à Jacobi sur ce sujet, en particulier par le théorème établi en cet endroit par Hermite : « La plus petite quantité différente de zéro et représentable par une forme quadratrique positive à n variables de déterminant 1 (les variables ayant des valeurs entières) ne dépasse pas une limite fixe fonction de n seul. » C'est en s'occupant de cette proposition qu'il fut conduit aux considérations sur lesquelles nous avons à insister maintenant.

Imaginons, avec Minkowski, le système des points (disposés en rangées de cubes remplissant tout l'espace) qu'on obtient en donnant aux coordonnées rectangulaires x, y, z toutes les valeurs entières possibles. C'est ce que Minkowski nommait un *grillage de nombres* (Zahlengitter). Soit d'autre part, $F(x, y, z)$ une forme quadratique positive en x, y, z de déterminant 1 : l'équation $F(x, y, z) = c$ représente, pour une valeur positive déterminée quelconque de la constante c, un ellipsoïde déterminé ayant l'origine pour centre. Construisons, autour de chaque point de notre grillage, un ellipsoïde égal au premier et semblablement orienté : si la constante c a une valeur assez petite, ces ellipsoïdes seront manifestement tous extérieurs les uns aux autres. Soit $\frac{1}{4}M$ la plus grande valeur de c pour laquelle il en est encore ainsi, les ellipsoïdes étant seulement tangents en des points isolés. Comme en moyenne on doit trouver un des ellipsoïdes par cube de côté 1, le volume de l'ellipsoïde $F(x, y, z) = \frac{1}{4}M$ est nécessairement plus petit que celui du cube, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{4\pi}{3}\sqrt{\left(\frac{M}{4}\right)^3} < 1.$$

D'autre part, il est aisé de voir que l'ellipsoïde $F(x, y, z) = M$ ne contient certainement, l'origine exceptée, aucun sommet du

grillage; par contre, sur la surface se trouvent les sommets qui sont les centres d'ellipsoïdes tangents à $F(x, y, z) = \frac{1}{4}M$. Cela revient à dire que M est la plus petite valeur différente de zéro qui soit représentable en nombres entiers par la forme F, et notre inégalité fournit pour ce minimum la limite supérieure

$$M < \sqrt[3]{\frac{6^2}{\pi^2}}.$$

Cette démonstration d'une proposition si cachée de la théorie des nombres par une simple intuition géométrique, sans aucun calcul, est un chef-d'œuvre de la puissance inventive de Minkowski. La méthode se généralise d'elle-même aux formes à n variables : elle fournit alors une limite plus naturelle que celle obtenue par Hermite et notablement inférieure. Mais ce qui est bien plus important, c'est que cette déduction utilise uniquement deux propriétés de l'ellipsoïde, celle d'être convexe et celle d'avoir un centre de symétrie, et peut par conséquent s'étendre sans modification à toute figure convexe pourvue d'un centre. Minkowski était dès lors amené à reconnaître pour la première fois que la notion du *corps convexe* est fondamentale dans notre Science et compte parmi les plus précieux moyens d'investigation dont elle dispose.

Un corps convexe est défini, au point de vue de Minkowski, par cette propriété que le segment de droite qui joint deux quelconques de ses points en fait tout entier partie. L'importance de la notion de corps convexe, au point de vue des principes de la Géométrie, tient à la liaison étroite qui, comme l'a reconnu Minkowski, existe entre cette notion et le théorème fondamental d'Euclide sur la somme de deux côtés d'un triangle. Ce théorème qui ne fait intervenir que des notions immédiatement empruntées aux axiomes, est, il est vrai, déduit par Euclide d'une égalité de triangles. Mais on peut, au contraire, conserver tous les axiomes de de la Géométrie euclidienne à l'exception de celui qui conserve l'égalité des triangles, en se contentant (au lieu et place de ce dernier axiome) d'admettre que, dans tout triangle, la somme de deux côtés quelconques est supérieure au troisième. On arrive alors à la Géométrie que Minkowski a créée et prise comme base de ses recherches.

Cette *Géométrie minkowskienne* est caractérisée essentiellement par les deux principes suivants :

1. Deux segments susceptibles de coïncider par une translation, sont dits égaux.

2. Le lieu des points également distants d'un point fixe quelconque O est, dans l'espace euclidien ordinaire, une certaine surface convexe ayant O pour centre, de sorte que le rôle des sphères concentriques de la Géométrie ordinaire est joué par un système de surfaces convexes homothétiques, emboîtées les unes dans les autres.

Comme, en Géométrie minkowskienne, l'axiome des parallèles subsiste, mais non l'axiome d'égalité des triangles, lequel est remplacé par l'inégalité entre un côté d'un triangle et la somme des deux autres, cette géométrie s'oppose, en quelque sorte, à celle de Bolyai-Lobatschewsky : elle montre, au point de vue Théorie des nombres, la même fécondité que cette dernière dans la théorie des fonctions analytiques automorphes.

Traduisons analytiquement les considérations géométriques que nous venons d'indiquer. La surface d'un corps convexe peut être représentée en coordonnées rectangulaires de l'espace à n dimensions par une équation de la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1, \tag{1}$$

f étant une fonction homogène (en général non rationnelle) du premier degré, laquelle possède la propriété fondamentale exprimée par l'inégalité

$$f(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \leqq f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

La distance minkowskienne entre deux points $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ est alors par définition

$$f(x_1-y_1, \ldots, x_n-y_n).$$

La surface prise pour point de départ et représentée par l'équation (1) est dite « Eichfläche » : c'est l'analogue minkowskienne de la sphère de l'espace euclidien ordinaire.

L'ellipsoïde de notre premier exemple s'obtient en prenant pour

f la racine carrée de la forme quadratique définie F considérée plus haut (*voir* p. 77).

Si maintenant l'« Eichkörper » supposé toujours convexe, possède, en outre, un centre de symétrie, on a, pour la distance minkowskienne ainsi définie, ce théorème que la plus petite distance entre deux sommets du grillage, c'est-à-dire la quantité M, a une limite supérieure dépendant du seul volume de l'ellipsoïde ; on constate aisément qu'un corps convexe ayant pour centre un sommet du grillage et pour volume 2^n contient encore à son intérieur ou sur sa surface, au moins deux autres sommets.

Cette proposition est une des plus fécondes de l'Arithmétique ; Minkowski en déduit son théorème bien connu d'après lequel, étant données n formes linéaires quelconques à n variables, à coefficients réels, leur déterminant étant égal à 1, on peut toujours donner aux variables des valeurs *entières* telles que toutes les formes en question aient des valeurs numériques comprises entre -1 et $+1$; il en déduit encore ce fait, d'une portée si profonde au point de vue de l'essence même du nombre algébrique, que tout corps algébrique de nombres (autre que le corps naturel) a un discriminant différent de $+1$, c'est-à-dire admet forcément des nombres premiers *critiques*, jouissant de propriétés analogues à celles des points critiques d'une fonction algébrique.

Mais ce théorème sur le volume de l' «Eichkörper», que je viens d'appeler l'un des plus féconds de l'Arithmétique, n'est que le commencement d'une série de déductions analogues d'une grande portée fondées, comme la première, sur l'intuition géométrique. C'est ainsi que, dans un « Eichkörper » de volume 2^n, non seulement, comme nous l'avons dit, le plus petit diamètre est au plus égal à 1, mais il en est de même du produit des n plus petits diamètres dont les directions sont indépendantes. Le fait que le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant donné est fini est, entre autres, une conséquence facile de cette proposition générale.

Le minimum exact d'une forme quadratique F de déterminant 1, c'est-à-dire la plus petite valeur (différente de zéro) que cette forme atteigne effectivement pour des valeurs entières des variables est une fonction des coefficients de F : en faisant varier ces derniers, le déterminant restant égal à 1, on obtient pour le

minimum en question un maximum k_n. Par des moyens tout différents des premiers, mais également de nature géométrique, où intervient le « *Strahlenkörper* », solide différent de l' « Eichkörper » en ce qu'il est assujetti seulement à être convexe relativement à un point déterminé, Minkowski obtient, pour ce *maximum minimorum* k_n, une limite inférieure. Cette dernière est nécessairement plus petite que la limite supérieure précédemment trouvée pour le minimum de F; et ceci montre que cette dernière ne saurait être très notablement abaissée, car les deux limites sont très voisines pour n très grand.

Ch. Hermite, le doyen des mathématiciens français à cette époque, avait, dès l'abord, suivi les travaux mathématiques de Minkowski avec le plus haut intérêt et la plus vive joie. Il est émouvant de voir avec quel élan sans réserve il proclame, vis-à-vis de ses propres développements, les avantages de la méthode de Minkowski, lorsque celui-ci lui communique les résultats dont nous venons de parler. « Au premier coup d'œil j'ai reconnu », écrit-il à Minkowski, « que vous avez été bien au delà de mes recherches, en ouvrant dans le domaine arithmétique des voies toutes nouvelles ». Et, dans une lettre postérieure de deux ans (novembre 1892) : « Je me sens rempli d'étonnement et de plaisir devant vos principes et vos résultats; ils m'ouvrent comme un monde arithmétique entièrement nouveau, où les questions fondamentales de notre Science sont traitées avec un éclatant succès auquel tous les géomètres rendront hommage. Vous voulez bien, Monsieur, et je vous en suis sincèrement reconnaissant, rapporter à mes anciennes recherches le point de départ de vos beaux travaux, mais vous les avez tant dépassées qu'elles ne gardent plus d'autre mérite que d'avoir ouvert la voie dans laquelle vous êtes entré. »

Aussi l'enthousiasme d'Hermite pour les méthodes de Minkowski ne connut-il plus de bornes lorque parut, en 1896, la *Geometrie der Zahlen*. « Je crois voir la terre promise », écrit-il à Laugel, auquel il fit traduire le livre de Minkowski pour son usage personnel. Et, en effet, quelle gerbe de vérités arithmétiques les plus diverses et les plus cachées se trouve ainsi rassemblée grâce au lieu géométrique! Théorie des unités dans les corps algébriques, propositions sur l'ordre d'un groupe fini de substitutions linéaires et

sur le nombre des transformations automorphes d'une forme quadratique, nombre fini des classes de formes quadratiques pour un déterminant donné, approximation simultanée de plusieurs nombres réels par des fractions à même dénominateur, minima des sommes de puissances de formes linéaires, théorie des fractions continues, etc., entrent, en même temps que les questions déjà mentionnées, dans le cadre de la *Geometrie der Zahlen*....

Le dernier fascicule de cet Ouvrage n'a pas paru (1); mais ce qui devait en constituer la matière a été exposé par Minkowski dans ses Mémoires ultérieurs.

Nous devons, avant tout, noter un problème auquel Minkowski s'intéressa de très bonne heure et auquel il appliqua avec un remarquable succès les méthodes développées dans son premier fascicule : la généralisation du théorème de Lagrange sur les irrationnelles quadratiques. Ce théorème donnant une condition nécessaire et suffisante permettant de reconnaître une telle irrationnalité, il était indiqué de chercher un critérium analogue pour les irrationnelles de degré quelconque : cependant toutes les tentatives dirigées dans ce sens (je rappelle, à cet égard, l'algorithme de Jacobi pour le développement de l'irrationnelle cubique, algorithme dont la périodicité n'est pas encore établie) étaient restées vaines. Minkowski réussit pour la première fois (2), en utilisant encore ses méthodes géométriques, à trouver le critérium rêvé pour les irrationnelles algébriques de degré quelconque n. Toutefois son algorithme n'est pas tout à fait simple : il consiste dans la formation d'une série de substitutions linéaires à n variables : le nombre considéré est algébrique et de degré n si cette série est indéfinie et si, en même temps, les formes dont elle se compose dérivent d'un nombre fini d'entre elles par multiplication par des facteurs.

Un Mémoire suivant sur les approximations périodiques de nombres algébriques (3) a pour objet, entre autres, la recherche des nombres algébriques α pour lesquels ces substitutions manifestent une périodicité, et, par conséquent, une analogie complète

---

(1) Le deuxième fascicule de la *Geometrie der Zahlen* (posthume, Leipzig, 1910) ne répond pas au plan primitif de Minkowski, mais complète seulement le cinquième Chapitre du premier fascicule.

(2) *Ges. Abhandl.*, t. I, p. 293-315.

(3) *Ges. Abhandl.*, t. I, p. 357-371.

avec la propriété découverte par Lagrange pour les irrationnelles quadratiques ; Minkowski constate que cette périodicité ne se présente que dans cinq cas déterminés, le degré n ne pouvant avoir que les valeurs 3, 4, 6.

Tout en conservant à ses méthodes leur caractère général de *Geometrie der Zahlen*, c'est-à-dire d'intuition géométrique appliquée à l'obtention des propositions arithmétiques, Minkowski ne se lasse pas de les modifier de manière à en étendre et à en diversifier l'application. C'est ainsi que, à l'aide de certains réseaux de parallélogrammes qui recouvrent tout le plan, il est immédiatement conduit ([1]) à un théorème de Tchebycheff sur les équations indéterminées non linéaires, théorème qui prend une forme plus générale et plus parfaite que chez Tchebycheff lui-même.

C'est ainsi encore qu'il étudie la juxtaposition ([2]) dans l'espace des corps égaux et semblablement orientés, non plus autour des sommets d'un réseau cubique, mais suivant ceux d'un système réticulaire quelconque. S'il s'agit de sphères, on constate que, dans l'espace à trois dimensions, la densité (nombre moyen de sphères par unité de volume) maxima s'obtient avec le réseau tétraédral; mais il se trouve que le résultat analogue n'est nullement vrai pour $n > 3$. Ce problème de la juxtaposition la plus dense est en rapport avec le maximum k_n considéré plus haut et avec la réduction des formes quadratiques, problème qui, dans le Mémoire sur le domaine fondamental pour l'équivalence arithmétique ([3]), donne à Minkowski l'occasion de montrer toute la supériorité de ses méthodes nouvelles, plus géométriques, sur celles qu'il avait employées dans ses premiers travaux. Les théorèmes d'après lesquels on peut considérer comme domaine réduit, pour les formes quadratiques positives, une pyramide convexe ayant pour sommet l'origine et à un nombre fini de faces issues de ce point (toute forme quadratique positive à n variables étant équivalente à une autre dont les coefficients sont les coordonnées d'un point intérieur à la pyramide en question), le domaine réduit, pour les formes définies positives, n'étant contigu qu'à un nombre fini de domaines

---

([1]) *Ges. Abhandl.*, t. I, p. 336-391.
([2]) *Ges. Abhandl.*, t. II, p. 3-42.
([3]) *Ges. Abhandl.*, t. II, p. 53-100.

homologues ; le calcul du volume du domaine réduit pour toutes les formes dont le déterminant ne dépasse pas une limite donnée, ainsi que son application à la valeur asymptotique du nombre des classes, font de ce dernier Mémoire de Minkowski sur la Théorie des nombres, le plus riche de contenu qu'il ait publié sur cette matière.

. . . . . .

C'est grâce à Minkowski que, après la mort d'Hermite, le poste d'avant-garde, en Théorie des nombres, échut à la science allemande et que celle-ci conserve encore aujourd'hui une supériorité incontestée dans ce domaine, si tant est qu'on tienne à peser la part respective des nations aux progrès et aux conquêtes d'une science comme l'Arithmétique.

La notion de corps convexe et le sentiment qu'avait Minkowski de son importance forment le lien qui rattache l'œuvre arithmétique dont nous venons de parler [et à laquelle le petit Livre des *Diophantische Approximationen* (¹), rédaction d'une leçon professée à Göttingue en 1903-1904, peut servir de première introduction] à ses recherches purement géométriques.

Le premier but qu'il se proposa à cet égard (²) fut de faire rentrer les notions de longueur et de surface dans celle de volume « la plus élémentaire de toute l'analyse de l'infini ». Il y arrive par un passage à la limite très simple. Une courbe gauche étant donnée, Minkowski décrit, autour de chaque point de cette courbe comme centre, une sphère de rayon constant r. Le quotient du volume balayé par toutes ces sphères par la surface du cercle de rayon r tend, pour $r = 0$, vers une limite qui est la longueur de la courbe. Une définition toute semblable s'applique à l'aire d'une surface courbe, et c'est grâce à la définition ainsi obtenue que Minkowski arrive à une généralisation importante en remplaçant la sphère par un corps convexe arbitraire, tout comme il avait été conduit à le faire dans ses Mémoires d'Arithmétique.

Cette même idée de substitution d'un « Eichkörper » arbitraire à la sphère conduit Minkowski à la conception fondamentale de sa théorie, celle du *volume mixte* de trois corps convexes K_1, K_2, K_3.

(¹) Leipzig, 1907.

(²) Volume et surface, *Ges. Abhandl.*, t. II, p. 230-276.

Minkowski désigne sous ce nom une certaine intégrale triple V_{123} déduite de ces trois corps, et qui coïncide avec le volume ordinaire lorsque K_1, K_2, K_3 sont identiques entre eux, avec la surface lorsque deux seulement de ces corps coïncident, le troisième étant une sphère de rayon 1 ; si enfin on prend pour deux des corps des sphères-unités, le volume mixte devient la courbure moyenne intégrale de la surface du corps restant. Ces trois notions de volume, surface et courbure moyenne sont donc liées d'une manière inattendue, et particulièrement étroite, et l'on doit s'attendre à obtenir entre elle des relations nouvelles. Le résultat principal auquel aboutit à cet égard la théorie de Minkowski est exprimé par l'inégalité

$$V_{123}^2 \leq V_{122} V_{133},$$

inégalité de caractère purement quadratique; tandis que, par exemple, la proposition connue, d'après laquelle la sphère est de volume maximum pour une surface donnée, donne, entre le volume V et la surface O, la relation

$$36\pi V^2 \leq O^3,$$

par conséquent, une inégalité cubique, laquelle apparaît comme une conséquence de l'inégalité plus simple, purement quadratique, qui précède....

Minkowski s'occupe ensuite de la notion de polyèdre convexe, et trouve, dans ce sujet rebattu, des aspects nouveaux et féconds. Son résultat essentiel est qu'un polyèdre convexe est déterminé (à une translation près) lorsqu'on donne les directions et les aires de ses faces. De là dérive, aisément par passage à *la limite*, ce remarquable théorème que (à une translation près) il existe une surface fermée convexe et une seule pour laquelle la courbure (courbure totale de Gauss, cette fois) soit une fonction donnée des cosinus directeurs de la normale. La définition de la courbure par une condition intégrale, ce qui est d'ailleurs le point de vue initial de Gauss, évite toute difficulté relative aux dérivées secondes dans cette démonstration, laquelle y gagne singulièrement en simplicité et en généralité.

Ce problème de Minkowski (détermination d'une surface fermée convexe de courbure totale donnée) est identique à l'inté-

gration d'une certaine équation aux dérivées partielles du type Monge-Ampère, de sorte que l'étude d'une équation de second ordre non linéaire est éclairée et enrichie de questions et de moyens d'attaque inconnus jusqu'alors par des recherches d'origine purement géométrique et élémentaire.

Mentionnons enfin une petite Communication (¹) que fit Minkowski avant de s'installer à Göttingue et qui n'avait été jusqu'ici publiée qu'en russe : elle contient un théorème d'après lequel les corps de largeur constante (c'est-à-dire indépendante de la direction dans laquelle elle est prise) sont aussi ceux qui ont un contour apparent d'aire constante.

L'intérêt de Minkowski pour la Physique se manifeste de bonne heure. Dès les premières années de son séjour à Bonn comme Privatdocent, il s'occupa d'hydrodynamique et, en 1888, Helmholtz communiqua à l'Académie des Sciences de Berlin un travail (²) sur le mouvement d'un solide dans un liquide, où le problème de variations à six inconnues que fournit classiquement le principe de Hamilton est ramené à un autre ne comportant plus que deux fonctions inconnues du temps.

... Ces études de Physique théorique furent continuées à Königsberg et à Zürich, puis à Göttingue : elles eurent pour résultat la publication du magistral article de l'*Encyclopédie* sur la Capillarité (³), où, dans les quelques pages dont il disposait, Minkowski a su exposer tous les principes théoriques de cette branche de la Physique sous une forme originale et en partie toute nouvelle.

Mais il s'attacha surtout aux théories électrodynamiques modernes, dont il s'entretint avec moi pendant plusieurs semestres, à l'occasion des séminaires que nous dirigions l'un et l'autre. Les dernières créations de Minkowski provinrent de ces études.

... H.-A. Lorentz avait reconnu que les équations de l'Electrodynamique pour l'éther vide possédaient la propriété d'invariance vis-à-vis de toutes les transformations exécutées simultanément sur les coordonnées cartésiennes y, x, z et sur le temps t qui laissent inaltérée la quantité $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ (la vitesse de la lumière étant prise

(¹) *Ges. Abhandl.*, t. II, p. 277-279.
(²) *Ges. Abhandl.*, t. II, p. 283-307.
(³) *Ges. Abhandl.*, t. II, p. 298-351.

égale à 1). En raison de ce fait purement mathématique et, d'autre part, pour expliquer comment il se peut que le mouvement de la Terre par rapport à l'éther ne soit pas perçu, ce pénétrant chercheur était arrivé à l'idée audacieuse que l'électricité et la matière, lorsqu'elles sont animées d'un mouvement de vitesse v, doivent subir, dans la même direction, une contraction dans le rapport $\sqrt{1-v^2}$. Au physicien Einstein revient le mérite d'avoir reconnu qu'une telle idée entraîne une modification dans notre manière d'envisager la notion de temps.

C'est la suite d'idées ainsi développée par Lorentz et Einstein, et qu'on résume par le nom de *principe de relativité*, qui détermina les recherches capitales et aujourd'hui bien connues de Minkowski sur l'Électrodynamique [1]. Minkowski donne au fait mathématique de l'invariance des équations électrodynamiques pour les transformations de Lorentz une portée nouvelle : il la considère comme une propriété commune à toutes les lois de la nature et même déjà implicitement contenue dans les notions même de temps et d'espace, qu'elle relie entre elles et confond en quelque sorte l'une avec l'autre. A ce fait d'expérience courante, que les lois de la nature sont indépendantes du temps, ainsi que de l'orientation de l'espace, le principe de relativité, d'après Minkowski, ou, comme on l'a nommé depuis, le *postulat universel*, en superpose un autre plus général : l'indépendance de ces mêmes lois vis-à-vis de tout le groupe des transformations de Lorentz.

Mais, du moment que ces transformations font subir à la coordonnée temps, c'est-à-dire à la grandeur t qui représente le temps, des changements autres qu'une simple addition de constante, il en résulte que la simultanéité de deux événements cesse d'avoir une existence réelle. C'est seulement parce que nous avons l'habitude de garder sensiblement un seul et même système de comparaisons tant pour l'espace que pour le temps, que nous considérons une telle simultanéité comme une notion absolue. En réalité, deux phénomènes qui se passent en deux lieux différents peuvent toujours être considérés comme simultanés, du moment que l'intervalle du temps qui les sépare est inférieur à l'éloignement entre les deux lieux, c'est-à-dire au temps mis par la lumière pour aller

---

(1) *Ges. Abhandl.*, t. II, p. 352-404.

de l'un à l'autre. Cet arbitraire dans la définition de la simultanéité s'étend même à trois événements ayant lieu dans trois lieux difrents, sous certaines conditions d'inégalité. C'est seulement par quatre événements que le système de comparaison auquel sont rapportés l'espace et le temps est bien défini. « Désormais l'espace en soi et le temps en soi doivent n'être plus pour nous que des ombres, une sorte de réunion de tous deux gardant seule une existence propre. » Ainsi s'exprimait Minkowski au début de l'impressionnante Conférence [1] qu'il prononçait à la réunion des naturalistes à Cologne devant un nombreux auditoire de mathématiciens, de physiciens et de philosophes.

Pour se rendre compte exactement de cete invariance des lois de la nature, on doit remplacer les coordonnées x, y, z, t d'espace et de temps, ainsi que certaines fonctions de ces quantités qui interviennent dans les équations de la Physique, par leurs transformées par certaines substitutions linéaires : les équations doivent subsister après cette transformation. Par exemple, dans le cas des équations électrodynamiques, les composantes de la vitesse multipliées par la densité et cette densité ρ elle-même doivent être regardées comme quatre grandeurs qui sont transformées comme x, y, z, t ; mais les composantes des vecteurs électriques et magnétiques, ou celles de l'induction électrique et de l'induction magnétique transforment comme les six déterminants d'une matrice déduite de deux points complets (un point complet étant défini par un système de valeurs de x, y, z, t), c'est-à-dire comme six coordonnées pluckériennes de droite. Dès lors, dans nos transformations, les notions de vitesse et de densité se mêlent ensemble, ainsi que celles de champ électrique et magnétique ; il n'est donc plus possible de définir absolument la vitesse et la densité, ou le champ électrique et le champ magnétique : toutes ces notions dépendent ensemble et essentiellement du choix du système de comparaison.

Minkowski, et je vois là le principal résultat positif de son œuvre dans ce domaine, applique alors son postulat universel, ainsi caractérisé et mathématiquement formulé, à la formation des équations de l'électrodynamique des corps en mouvement, équations qui ont soulevé parmi les physiciens d'extraordinaires discus-

---

(1) *Ges. Abhandl.*, t. II, p. 431-444.

sions. Il n'a besoin de faire, à cet effet, que trois hypothèses fondamentales, savoir :

1° La vitesse de la matière est partout et toujours inférieure à 1, c'est-à-dire à celle de la lumière ;

2° En un point particulier et en un instant particulier, on a (quel que soit l'état de mouvement des points voisins), entre les vecteurs électrique et magnétique et leurs dérivées par rapport à x, y, z, t, les mêmes relations que si toute matière était en repos ;

3° Les équations (admises par tout le monde sans contestation) de l'électrodynamique des corps en repos.

Les équations électrodynamiques obtenues par cette voie (¹) ne laissent rien à désirer comme clarté et symétrie ; elles concordent avec les observations faites jusqu'ici, mais se distinguent des équations écrites auparavant par Lorentz et Cohn en ce que ces dernières ne vérifient pas le postulat universel.

De plus en plus convaincu de la généralité absolue et de la fécondité de ce postulat, convictions que les remarquables idées de M. Planck sur la Dynamique des systèmes en mouvement contribuèrent à fortifier, Minkowski travailla à modifier en conséquence les équations de la Physique.

En ce qui regarde la Mécanique, il parvint, grâce à la notion de temps propre d'un point matériel, à un système de quatre équations modifiées dont les trois premières se réduisent aux équations classiques lorsqu'on y suppose infinie la vitesse de la lumière, pendant que la quatrième, conséquence des trois premières, exprime la conservation de l'énergie. Mais de plus, les déductions de Minkowski conduisent à ce fait intéressant au point de vue des principes, que, en raison du postulat universel, les équations complètes du mouvement peuvent toutes se déduire de la dernière d'entre elles, c'est-à-dire de la conservation de l'énergie.

Puis Minkowski montra comment on doit modifier, dans le même sens, la loi de gravitation de Newton. La *loi de gravitation de Minkowski*, jointe à la *Mécanique minkowskienne*, n'est pas

(¹) Dans les dernières semaines de sa vie, Minkowski s'occupait de les obtenir en partant de la théorie des électrons. En se servant des notes trouvées après sa mort, M. Born en a exposé une démonstration sous ce point de vue : voir *Ges. Abhandl.*, t. II, p. 405-430.

moins propre à expliquer les observations astronomiques que la loi de Newton jointe à la Mécanique newtonienne. La loi de Minkowski comporte d'ailleurs une propagation de la gravitation, ce qui répond mieux à nos idées actuelles sur les actions à distances que l'action instantanée de Newton.

Comme exemple de la simplicité avec laquelle les considérations de Minkowski se montrent, pour la première fois, capable de dévoiler la véritable essence des lois de la nature, contentons-nous de noter encore l'expression merveilleusement claire donnée par lui pour l'action pondéromotrice extrêmement compliquée qu'exercent l'une sur l'autre deux particules électriques en mouvement.

Mais l'activité scientifique de Minkowski n'est nullement épuisée par les écrits livrés à l'impression et dont nous venons de résumer les principaux ; elle s'est manifesté dans beaucoup d'autres directions et sous nombre d'autres formes qu'on ne saurait méconnaître si l'on veut comprendre tout le rôle qu'a joué Minkowski dans les Mathématiques contemporaines.

. . . . . .

D. Hilbert.

LORIA (Gino). — Poliedri, Curve e Superficie secondo i metodi della geometria descrittiva. (*Manuali Hoepli, serie scientifica*, 148-149.) 1 vol in-12, XV-235 pages, 62 figures. Milano, Ulrico Hoepli : 1912.

Cet Ouvrage est le complément naturel de celui que M. Gino Loria a publié dans la même Collection et sous le titre de *Metodi della Geometria descrittiva*, car ces méthodes sont appliquées, dans le nouvel Ouvrage, aux figures géométriques qui se rencontrent le plus souvent en théorie et en pratique. Il importe de signaler, dès le début de cette courte analyse, le souci constant que l'auteur a eu d'employer la méthode de Monge à laquelle il assigne « la parte del leone ».

La Première Partie contient les constructions relatives aux problèmes suivants de Géométrie élémentaire : résolution de l'angle trièdre ; représentation, développement et section plane des polyèdres.

La Seconde Partie contient l'exposé sommaire des propriétés générales des courbes planes et de la représentation de ces courbes en coordonnées cartésiennes; la résolution, par des courbes d'erreur, des problèmes sur les tangentes aux courbes graphiques; la représentation des courbes planes en employant deux plans de projection ou un seul plan et des cotes.

Les courbes gauches sont traitées avec de plus amples développements que les courbes planes. Elles sont divisées en courbes hyperboliques, hyperbolico-paraboliques et paraboliques. L'Auteur a considéré la figure enveloppe des positions d'un plan se mouvant dans l'espace d'après une certaine loi. Il montre que la projection centrale d'une courbe gauche a des points doubles et des points d'inflexion. Par la méthode de Monge, par celle des plans cotés, M. G. Loria représente les courbes gauches, construit leurs plans osculateurs, détermine leurs points d'intersection par un plan.

La théorie de l'hélice tracée sur le cylindre droit est exposée en détail. Par l'analyse, l'Auteur démontre la nature de chacune des courbes obtenues en projetant orthogonalement l'hélice sur un plan parallèle à son axe, centralement sur un plan perpendiculaire à son axe, le centre de projection étant un point de cet axe, obliquement sur un plan perpendiculaire à l'axe. Il termine cette Seconde Partie en projetant l'hélice sur deux plans, dont l'un est perpendiculaire, l'autre parallèle à l'axe de l'hélice, et en résolvant, dans ce mode de représentation, les problèmes de la construction de la tangente et du plan osculateur en un des points de l'hélice.

La Troisième Partie, qui occupe plus de la moitié du Livre et qui contient 39 épures, présente d'abord le résumé des principales propriétés des surfaces engendrées par une courbe qui se meut et se déforme dans l'espace d'après des lois déterminées. Au moyen de l'équation paramétrique de la surface et de celle du plan tangent en un point P de la surface, M. G. Loria conclut, d'après la nature des tangentes en P à la courbe d'intersection de la surface et du plan tangent considéré, que le point P est hyperbolique, parabolique ou elliptique, et qu'en général une surface présente une région de points elliptiques et une région de points hyperboliques, ces deux régions étant séparées l'une de l'autre par une ligne parabolique.

Il démontre ensuite le théorème relatif aux tangentes à la projection sur un plan du contour apparent d'une surface.

Après avoir représenté une surface géométrique sur deux plans rectangulaires de projection, il insiste sur la représentation des surfaces topographiques par la méthode des plans cotés et sur la solution des problèmes qui s'y rapportent.

Il résout, par l'hyperboloïde réglé, les problèmes de section plane, de plans tangents passant par un point ou par une droite.

Les propriétés des surfaces hélicoïdes sont démontrées analytiquement. Sur la représentation de ces surfaces par la méthode de Monge, l'Auteur résout les problèmes d'intersection de ces surfaces et soit d'une droite, soit d'un plan.

Au moyen des projections de la surface cylindrique et de la surface conique sur deux plans orthogonaux, M. G. Loria détermine, pour ces surfaces, les sections planes et les points d'intersection par une droite, puis les intersections de ces surfaces soit entre elles, soit avec une surface de révolution ; résout le problème du plan tangent mené par un point au cylindre ou au cône ; construit le développement de chacune de ces surfaces sur un plan. L'Auteur donne les propriétés et la représentation des surfaces réglées soit développables, soit gauches ; et, pour ces dernières, il insiste sur la construction du plan tangent en un point de la surface. Il explique les épures de la vis à filets triangulaires, de la vis à filets quadrangulaires, du conoïde circulaire droit et de l'intersection de cette dernière surface par un plan parallèle au cercle directeur. Cette Troisième Partie se termine par quelques lignes sur le conoïde circonscrit à la sphère, sur le biais passé, sur le conoïde de Küpper.

Nous sommes persuadé que les étudiants qui liront attentivement, la plume à la main, l'Ouvrage, peut-être un peu trop concis, de M. Gino Loria, acquerront des idées nettes et précises sur les nombreuses questions exposées magistralement par ce mathématicien distingué. Er. L.

WIDDER (W.). — Untersuchungen über die allgemeinste lineare Substitution mit vorgegebener p^{ter} Potenz. Une brochure in-4°, 53 pages. Leipzig, Teubner ; 1909.

L'auteur a entrepris ce travail sur le conseil de M. Rost qui, en 1892, s'était préoccupé de former toutes les substitutions linéaires ayant pour $p^{\text{ième}}$ puissance la substitution identique. Il s'agit, cette fois, de trouver toutes les substitutions linéaires ayant pour $p^{\text{ième}}$ puissance une substitution donnée quelconque.

La forme canonique des substitutions linéaires joue, bien entendu, dans les recherches de cet ordre, un rôle capital. D'autre part, la solution est notablement facilitée parce qu'on voit que la substitution cherchée doit être permutable avec la substitution donnée.

Aprés avoir épuisé toutes les conséquences qu'il a pu déduire de ce premier renseignement, M. Widder s'inspire de la méthode employée par M. Frobenius [1] pour résoudre une question analogue de la théorie des formes bilinéaires (théorie dont on sait l'identité avec celle dont nous parlons). J. H.

KIEPERT (L.). — Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. — I. Teil : *Differential-Rechung*. Zwölfte vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr *Max Stegemann*, mit 187 Figuren im Texte. 1 vol. in-8°, xx-863 pages. — II. Teil : *Integral-Rechnung*. Zehnte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr *Max Stegemann*, mit 187 Figuren im Texte. 1 vol. in-8, xxiii-73⁻ pages. Hannover, Helwingsche Verlagsbuchhandlung ; 1912.

Nous avons, à diverses reprises, signalé à nos lecteurs les éditions successives de l'excellent Traité de M. Stegemann, continué et amélioré depuis si longtemps par M. L. Kiepert, professeur de Mathématiques à l'École technique supérieure de Hanovre. Il nous suffira donc de mentionner l'apparition de nouvelles éditions des

[1] *Sitzsber.*, Berlin, 1896, p. 7.

deux Parties de l'excellent Traité de Calcul infinitésimal, que les professeurs et les élèves auront grand intérêt et grand profit à consulter.

G. J.

ANNUAIRE POUR L'AN 1912, PUBLIÉ PAR LE BUREAU DES LONGITUDES. — *Avec des Notices scientifiques*, 1 vol. in-16, VI-692 pages; A.1-A.47; B.1-B.34; C.1-C.43. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Cet excellent Recueil, indispensable aux techniciens, aux physiciens et aux mathématiciens, pouvant, pour tous, remplacer avantageusement l'Almanach, contient les heures, en temps légal, des levers, couchers et passages au méridien du Soleil, de la Lune et des planètes, des éclipses de Soleil et de Lune, des marées et du passage au méridien de l'étoile Polaire.

Il renferme d'utiles renseignements sur les Calendriers, la liste des unités et des constantes usuelles en Physique et en Chimie.

Il se termine par deux intéressantes Notices scientifiques, dont l'une intéressera tout le monde, dont l'autre sera utile aux calculateurs. Les titres de ces Notices sont :

La température moyenne des diverses parties de la France (avec plusieurs Cartes), par M. G. BIGOURDAN;

Notions sur la Méthode des moindres carrés, par M. P. HATT.

ER. L.

MÉLANGES.

SUR UN CAS PARTICULIER DES SÉRIES NEUMANNIENNES DE FONCTIONS ULTRASPHÉRIQUES;

PAR M. NIELS NIELSEN, à Copenhague.

Soient

$$(1)\qquad P^{\nu,n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu - n - s)}{s!(n-2s)!} (2x)^{n-2s} \qquad (\nu > 0)$$

les fonctions ultrasphériques de première espèce, la série *neumannienne*

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu + n) A_n P^{\nu, n}(x),$$

où les coefficients A_n sont indépendants de x, a les propriétés suivantes :

1° Posons $x = \alpha + i\beta$, le domaine de convergence de la série [1] est l'intérieur de l'ellipse $E(a)$, définie par l'équation

$$(3) \qquad \frac{\alpha^2}{a+1} - \frac{\beta^2}{a} = 1 \qquad (a > 0).$$

2° Soit r le rayon de convergence de la série de puissances ayant les mêmes coefficients que la série *neumannienne*, savoir

$$(4) \qquad A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

nous aurons toujours $r > 1$, et les deux constantes positives a et r sont liées par les relations

$$(5) \qquad a = \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{2r}\right)^2, \qquad r = |\sqrt{a}| + |\sqrt{a+1}|.$$

3° Toute fonction analytique $f(x)$ régulière à l'intérieur d'une ellipse $E(a)$ est, dans ce domaine, développable en série neumannienne de la forme (2), où nous aurons, pour $\mathfrak{R}(\nu) > -\frac{1}{2}$,

$$(6) \qquad A_n = \frac{n!\, 2^{2\nu-1}[\Gamma(\nu)]^2}{\pi\Gamma(n+2\nu)} \int_{-1}^{+1} f(x) P^{\nu, n}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx;$$

supposons que la série de puissances

$$(7) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

qui représente, pour $|x|$ suffisamment petit, la fonction $f(x)$ ait son rayon de convergence plus grand que l'unité, nous aurons de

---

[1] *Voir* mon Traité : *Théorie des fonctions métasphériques*. Cours professé à l'Université de Copenhague. Paris, Gauthier-Villars, 1911. Les théorèmes et formules en question se trouvent p. 136, 76, 11, 138, 199.

même

$$(8)\qquad \frac{A_n}{\Gamma(\nu)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(n+2s)!}{s!\,\Gamma(\nu+n+s+1)} \frac{a_{n+2s}}{2^{n+2s}}.$$

Posant $\nu = \frac{1}{2}$, nous retrouvons les séries *neumanniennes* de fonctions sphériques ordinaires, tandis que l'autre cas particulier $\nu = 0$ semble être resté inaperçu jusqu'ici.

Dans le cas $\nu = 0$, il faut remplacer les fonctions $P^{\nu,n}(x)$ par des valeurs limites convenables ; nous posons

$$(9)\qquad \Phi_n(2x) = n \lim_{\nu=0} [\Gamma(\nu) P^{\nu,n}(x)] \qquad (n \geqq 1),$$

ce qui donnera

$$(10)\qquad \Phi_n(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s n}{n-s} \binom{n-s}{s} x^{n-2} \qquad (n \geqq 1),$$

tandis que nous posons encore

$$(11)\qquad \Phi_n(x) = 2.$$

Cela posé, les résultats que nous venons d'énoncer sur les séries *neumanniennes* gardent encore leur validité pour $\nu = 0$; c'est-à-dire que nous aurons ce théorème particulier :

I. *Toute fonction analytique $f(x)$, régulière dans l'intérieure d'une ellipse* E (a), *est dans ce domaine développable en série de la forme*

$$(12)\qquad f(x) = \frac{1}{2} A_0 \Phi_0(2x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \Phi_n(2x),$$

où nous avons pour tous les n

$$(13)\qquad A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\Phi_n(2x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Supposons que la série de puissances (7) ait son rayon de convergence plus grand que l'unité ; nous aurons de même

$$(14)\qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{n+2s}{s} \frac{a_{n+2s}}{2^{n+2s}}$$

Quant aux polynomes $\Phi_n(x)$, nous aurons pour tous les n

$$(15) \qquad 2\cos n\varphi = \Phi_n(2\cos\varphi),$$

d'où, en posant

$$v + v^{-1} = x,$$

nous aurons généralement pour un positif entier

$$v^n + v^{-n} = \Phi_n(x).$$

Appliquons ensuite l'identité évidente

$$(v^p + v^{-p})(v^q + v^{-q}) = (v^{p+q} + v^{-p-q}) + (v^{p-q} + v^{q-p}),$$

nous aurons la formule récursive

$$(16) \qquad \Phi_p(x)\Phi_q(x) = \Phi_{p+q}(x) + \Phi_{p-q}(x) \qquad (p \geq q).$$

Posons maintenant

$$x = \alpha + i\beta, \qquad y = \cos x = \xi - i\eta,$$

nous aurons

$$(17) \qquad \xi = \cos\alpha \operatorname{ch}\beta, \qquad \eta = -\sin\alpha \operatorname{sh}\beta,$$

où $\operatorname{ch}\beta$ et $\operatorname{sh}\beta$ sont les fonctions hyperboliques, savoir

$$\operatorname{ch}\beta = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}, \qquad \operatorname{sh}\beta = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}.$$

Posons ensuite, dans la série (12), $\cos x$ au lieu de x et

$$2f(\cos x) = \varphi(x),$$

la fonction $\varphi(x)$ satisfait aux deux conditions suivantes :

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \qquad \varphi(x + 2\pi) = \varphi(x),$$

tandis que la série (12) se transforme en celle-ci :

$$(18) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos nx,$$

où nous avons pour tous les n

$$(19) \qquad A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\cos nx\, dx.$$

Soit $E(a)$ l'ellipse de convergence de la série (12); le domaine de convergence de la série (18) se détermine par la condition

$$\frac{\cos^2\alpha\,\mathrm{ch}^2\beta}{a+1}+\frac{\sin^2\alpha\,\mathrm{sh}^2\beta}{a}<1;$$

dans ce qui suit, nous désignons ce domaine comme l'intérieur de la courbe transcendante $K(a)$, définie par l'équation

$$(20)\qquad \frac{\cos^2\alpha\,\mathrm{ch}^2\beta}{\alpha+1}+\frac{\sin^2\alpha\,\mathrm{sh}^2\beta}{a}=1\qquad(a>0).$$

Inversement, prenons pour point de départ la série (18) supposée convergente pour des valeurs imaginaires de x; la tranformation $\cos x=y$ nous conduira de la série (18) à une série de la forme (12), ce qui montrera immédiatement que le domaine de convergence de la série (18) est toujours l'intérieur d'une courbe $K(a)$, définie par une équation de la forme (20).

Désignons par δ une quantité positive arbitrairement petite; la série (18) est uniformément convergente sur la circonférence et dans l'intérieur de la courbe $K(a-\delta)$. De plus, la constante a de la courbe $K(a)$ et le rayon de convergence r de la série de puissances $\Sigma A_n x^n$ sont liés par les formules (5), c'est-à-dire que nous aurons toujours $r>1$.

Différentions ou intégrons par rapport à x la série (18); nous obtenons des résultats analogues pour la série

$$(21)\qquad \psi(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}B_n\sin nx,$$

où $\psi(x)$ satisfait aux conditions

$$\psi(-x)=-\psi(x),\qquad \psi(x+2\pi)=\psi(x).$$

Cela posé, nous aurons ce théorème de M. Gomes Teixeira :

II. *Toute fonction analytique $f(x)$, qui satisfait à la condition de périodicité $f(x+2\pi)=f(x)$ et qui est régulière dans l'intérieur d'une courbe $K(a)$, est dans ce domaine développable en cette série trigonométrique :*

$$(22)\qquad f(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx).$$

où les coefficients A_n *et* B_n *sont ceux de Fourier, savoir*

$$(23)\quad A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad B_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

En effet, posons

$$f(x)+f(-x)=\varphi(x), \qquad f(x)-f(-x)=\psi(x);$$

les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, respectivement paire et impaire, sont périodiques toutes deux, et le théorème II est une conséquence immédiate du théorème I.

On voit du reste que le domaine de convergence de la série (22) ne dépend que de la fonction donnée $f(x)$.

Pour donner une autre application du théorème I, nous avons à introduire une nouvelle suite de polynomes entiers, savoir

$$(24)\qquad \Psi_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\Phi_{2n}(2i\sqrt{x}),$$

ce qui donnera, pour $n \geqq 1$,

$$(25)\qquad \Psi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{2n}{2n-s}\binom{2n-s}{s}\frac{x^{n-s}}{2^{2s}},$$

et particulièrement, pour $n=0$,

$$(26)\qquad \Psi_0(x)=2;$$

tandis que la formule récursive (16) nous conduira à cette autre

$$(27)\qquad \Psi_p(x)\Psi_q(x) = \Psi_{p+q}(x) + \frac{1}{2^{4q}}\Psi_{p-q}(x) \qquad (p \geqq q).$$

Remarquons ensuite les valeurs particulières

$$\Psi_1(x) = x+\frac{1}{2}, \qquad \Psi_2(x) = x^2+x+\frac{1}{8};$$

nous aurons, en vertu de (27), pour $q=1$ et $q=2$, respectivement

$$(28)\qquad \left(x+\frac{1}{2}\right)\Psi_p(x) = \Psi_{p+1}(x) - \frac{1}{2^4}\Psi_{p-1}(x) \qquad (p \geqq 1).$$

$$(29)\qquad \left(x^2+x-\frac{1}{8}\right)\Psi_p(x) = \Psi_{p+2}(x) + \frac{1}{2^8}\Psi_{p-2}(x) \qquad (p \geqq 2).$$

Ces remarques faites, nous démontrerons sans peine la formule curieuse, valable pour tous les n,

$$\Psi_n(4x^2+4x) = 2^{2n}\Psi_{2n}(x). \tag{30}$$

En effet, on voit immédiatement que notre formule (30) est vraie pour $n=0$ et $n=1$; posons ensuite, dans l'égalité (29), $2p$ au lieu de p; puis multiplions par 2^{2p+2} la formule ainsi obtenue, nous aurons

$$\left(4x^2+4x+\frac{1}{2}\right)[2^{2p}\Psi_{2p}(x)] = [2^{2p+2}\Psi_{2p+2}(x)] - \frac{1}{2^4}[2^{2p-2}\Psi_{2p-2}(x)];$$

supposons maintenant valable la formule (30), pour $n=p-1$ et $n=p$, puis posons dans (28) $4x^2+4x$ au lieu de x, la formule (30) est vraie aussi pour $n=p+1$.

Combinons les deux formules (28) et (30) ; nous aurons immédiatement

$$\Psi_{2n}(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{2n}{2n-s}\binom{2n-s}{s}\frac{(x^2+x)^{n-s}}{2^{4s}}, \tag{31}$$

tandis que la formule (28) donnera immédiatement, par la substitution de n à $n+1$, cette autre formule

$$\Psi_{2n+1}(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\sum_{s=0}^{s=n}\binom{2n-s}{s}\frac{(x^2+x)^{n-s}}{2^{4s}}. \tag{32}$$

Nous trouverons de la même manière cet autre développement

$$\Psi_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s n}{n-s}\binom{n-s}{s}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n-2s}}{2^{4s}}. \tag{33}$$

Cela posé, nous aurons évidemment, pour tous les n,

$$\Psi_n(-x-1) = (-1)^n\Psi_n(x). \tag{34}$$

Revenons maintenant à la série *neumannienne* (12) ; nous obtenons pour la fonction $\varphi(y)$, régulière dans l'intérieur d'une ellipse $E(a)$ et représentée, pour $|y|$ suffisamment petit, par la série de puissances

$$\varphi(y) = a_0 - a_1y^2 + a_2y^4 - a_3y^6 + \ldots.$$

une série de la forme

$$\varphi(y) = \frac{1}{2} B_0 \Phi_0(2y) + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \Phi_{2n}(2y),$$

où nous avons posé

$$B_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(y)\Phi_{2n}(2y)\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi(y)\Phi_{2n}(2y)\,dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Posant ensuite

$$y = \xi + i\eta, \qquad x = i\sqrt{y} = \alpha + i\beta,$$

nous aurons

$$\alpha = \eta^2 - \xi^2, \qquad \beta = -2\xi\eta,$$

de sorte que les hypothèses

$$\frac{\xi^2}{a+1} + \frac{\eta^2}{a} \leqq 1 \qquad (a > 0)$$

donnent respectivement

$$(2a+1)\xi^2 \gtreqless a(a+1+\alpha), \qquad (2a+1)\eta^2 \gtreqless (a-1)(a-\alpha),$$

d'où finalement

$$\frac{\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{\beta^2}{a(a+1)} \gtreqless 1.$$

Cela posé, nous verrons que l'ellipse $E(a)$ se transforme en une autre ellipse $E_1(a)$ définie par l'équation

$$(35) \qquad \frac{\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\beta^2}{a(a+1)} = 1 \qquad (a > 0);$$

c'est-à-dire que $E_1(a)$ a le centre $(-\frac{1}{2}, 10)$ et les foyers $(0,0)$ et $(-1,0)$. Remarquons ensuite que nous aurons

$$\varphi(i\sqrt{x}) = f(x),$$

où $f(x)$ est, pour $|x|$ suffisamment petit, définie par la série de puissance (7); d'où le théorème I donnera cet autre théorème :

III. *Toute fonction analytique $f(x)$, régulière dans l'inté-*

rieur d'une ellipse $E_1(a)$, *est, dans ce domaine, développable en série de la forme*

$$(36)\qquad f(x) = \frac{1}{2} A_0 \Psi_0(x) - \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \Psi_n(x),$$

où nous avons, pour tous les n,

$$(37)\qquad A_n = \frac{2^{\frac{1}{2}n-1}}{\pi} \int_0^{-1} \frac{f(x)\Psi_n(x)\,dx}{\sqrt{-x-x^2}}.$$

Quant à la formule (37), nous remarquons qu'il faut poser

$$A_n = (-1)^n 2^{2n} B_n;$$

supposons que la série de puissances (7) ait son rayon de convergence plus grand que l'unité, nous aurons

$$(38)\qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{2n+2s}{s} \frac{a_{n+2s}}{2^{2s}}$$

Posons comme ordinairement

$$x = \alpha + i\beta,$$

nous aurons

$$-x-1 = -(\alpha+1) - i\beta,$$

ce qui montre que l'ellipse $E_1(a)$ ne s'altère pas si nous remplaçons x par $-x-1$.

Appliquant ensuite la formule (34), nous aurons, en vertu de (36), cet autre développement

$$(39)\qquad f(-x-1) = \frac{1}{2} A_0 \Psi_0(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n A_n \Psi_n(x),$$

valable pourvu que x soit situé dans l'intérieur de l'ellipse $E_1(a)$: d'où le théorème suivant :

IV. *Supposons que la fonction* $f(x)$, *régulière dans l'intérieur d'une ellipse* $E_1(a)$, *satisfasse à une des conditions*

$$(40)\qquad f(-x-1) = f(x), \qquad f(-x-1) = -f(x),$$

nous aurons respectivement, pour tous les n,

$$(41)\qquad A_{2n+1} = 0, \qquad A_{2n} = 0.$$

où A_n *est à définir par l'intégrale* (37). *Les conditions* (41) *sont à la fois nécessaires et suffisantes pour l'existence de la formule respective* (40).

Remarquons maintenant que nous aurons, en vertu des formules (25) et (32), ces valeurs numériques

$$(-1)^n \Psi_n(-1) = \Psi_n(0) = \frac{1}{2^{2n-1}},$$

$$\Psi_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{2^{4n-1}}, \qquad \Psi_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0;$$

nous aurons, en vertu de (36), pour $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -1$, les séries convergentes

$$f(0) = A_0 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{2^{2n-1}},$$

$$f(-1) = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n A_n}{2^{2n-1}},$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n A_n}{2^{4n-1}},$$

qui nous permettent de donner une transformation très singulière de la série (36).

A cet effet, remarquons que la formule récursive (27) donnera ces cas particuliers

$$\Psi_{2n}(x) = [\Psi_n(x)]^2 - \frac{1}{2^{4n+1}}[\Psi_0(x)]^2,$$

$$\Psi_{2n+1}(x) = \Psi_n(x)\Psi_{n+1}(x) - \frac{1}{2^{4n+2}}\Psi_0(x)\Psi_1(x);$$

nous aurons donc, en vertu du théorème III, cet autre théorème :

V. *Toute fonction analytique* $f(x)$, *régulière dans l'intérieur d'une ellipse* $E_1(a)$, *est, dans ce domaine, développable en série de la forme*

$$(42) \qquad f(x) = a[\Psi_0(x)]^2 - \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{2n}[\Psi_n(x)]^2$$

$$+ b\Psi_0(x)\Psi_1(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{2n+1}\Psi_n(x)\Psi_{n+1}(x).$$

où les A_n *sont les coefficients qui figurent dans la série* (36), *tandis que nous avons posé*

$$(43)\quad a = \frac{1}{2}A_0 - \frac{f(0)+f(-1)}{4}, \qquad b = \frac{3}{4}A_1 - \frac{f(0)-f(-1)}{4}.$$

Dans le cas particulier où $f(x)$ satisfait à une des conditions (40), nous aurons respectivement

$$b = 0, \qquad A_{2n+1} = 0; \qquad a = 0, \qquad A_{2n} = 0.$$

Les formules générales donnent immédiatement la formule particulière

$$(44)\qquad x^n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s \varepsilon_{n-s}}{2^{2s}} \binom{2n}{s} \Psi_{n-s}(x),$$

où $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, tandis qu'il faut admettre $\varepsilon_p = 1$, pour $p \geqq 1$.

Introduisant maintenant, dans la formule (44), $4x^2 + 4x$ au lieu de x, nous aurons, en vertu de la formule (30),

$$(45)\qquad (x^2+x)^n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s \varepsilon_{n-s}}{2^{4s}} \binom{2n}{s} \Psi_{2n-2s}(x),$$

de sorte que la formule (42) donnera cet autre développement curieux

$$(46)\qquad (x^2+x)^n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s \varepsilon_{n-s}}{2^{4s}} \binom{2n}{s} [\Psi_{n-s}(x)]^2.$$

Il est évident, du reste, que les séries de fonctions $\Psi_n(x)$ sont analogues à celles qui figurent dans le paragraphe 56 de mon Livre *Sur les fonctions métasphériques*, car nous aurons évidemment

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{2^{2n-1}} F\left(u, -n, \frac{1}{2}, -x\right).$$

1e Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Sir William THOMSON, Lord KELVIN. — Mathematical and Physical Papers. Volume VI; *Voltaic Theorie*, *Radioactivity*, *Electrions*, *Navigation and Tides*, *Miscellaneous*. Arranged and revised with brief annotations by Sir Joseph Larmor. 1 vol. in-8°, viii-378 pages. Cambridge, University Press, 1911.

Ce ne sont plus que quelques épis, glanés derrière le chariot qui emportait la moisson. Le mathématicien aura peu de choses à recueillir parmi ces dernières glanes, dont les plus importantes sont faites de Notes de Physique expérimentale. Çà et là, cependant, il retrouvera quelque pensée qui le feront souvenir du grand physicien géomètre.

Combiner des mécanismes qui pussent donner une sorte d'image des phénomènes physiques, qui en pussent fournir des « modèles », ce fut le continuel souci de Lord Kelvin; il en était venu à identifier la construction de semblables modèles avec l'intelligence même de la Physique. Jusqu'à son dernier jour, il demeura préoccupé de ces constructions mécaniques en lesquelles se montrait son extrême ingéniosité. Les effets, récemment découverts, de la radioactivité, lui fournirent de nouvelles occasions de s'exercer en l'agencement de telles combinaisons; l'électron, en s'adjoignant à l'atome des antiques cosmologies, lui permit d'y introduire un élément encore inusité. Il se complut, alors, à disposer des atomes et des électrons de manière à figurer les propriétés du radium ou du polonium (1), ou bien encore à construire un atome capable de communiquer à un électron une énorme énergie de radioactivité (2).

Sans méconnaître tout ce que de semblables tentatives sup-

---

(1) *Plan of a combination of atoms having the properties of Polonium or Radium* (1904), p. 216, seqq.

(2) *Plan of an atom to be capable of storing an electrion with enormous energy for radioactivity* (1905), p. 227, seqq.

posent d'habileté, on ne peut s'empêcher de songer qu'on raisonnait ainsi sur l'électricité au temps où la science électrique était en sa toute petite enfance ; on se prend à penser que, pour expliquer les propriétés du « feu électrique », Jacques de Romas voulait que les pores du verre eussent la forme de deux entonnoirs réunis par leurs larges orifices, tandis que Franklin les voulait comparer à deux entonnoirs réunis par leurs becs. La science électrique fit un grand progrès le jour où l'on cessa de la traiter à la manière de Franklin, de Romas et de l'abbé Nollet, pour la traiter à la façon de Coulomb et de Poisson. A-t-elle accompli un nouveau progrès le jour où il lui a pris fantaisie de se revêtir à la mode du XVIIIe siècle ? L'avenir seul en peut décider ; mais si la connaissance du passé laisse, si peu que ce soit, deviner ce que réserve le futur, il est permis d'en douter.

Lord Kelvin savait fort bien que les théories physiques auxquelles il accordait ses préférences avaient une grande analogie de forme avec celles qu'aimait à développer maint physicien du temps passé ; il se plaisait à signaler cette analogie, à montrer, par exemple (1), que ses hypothèses sur l'électricité de contact sont conformes à la Philosophie naturelle de Boscovich.

En une courte Note (2), Lord Kelvin imagine une expérience propre à engendrer dans l'éther des ondes électriques longitudinales ; son objet eût été de mettre en évidence l'existence de ces ondes auxquelles, d'accord avec M. Röntgen, il se sentait porté à attribuer les rayons X. Nous voyons, en cette Note, que Lord Kelvin ne se ralliait point aux théories de Maxwell, théories qui excluent toute possibilité d'onde électrique longitudinale. L'empire incontesté qu'exercent, depuis vingt ans, ces théories, fondées sur des raisonnements si étranges, l'exclusion absolue dont elles ont frappé d'autres théories logiquement construites et non moins conformes à l'expérience, celle de Helmholtz, par exemple, seront sans doute, pour nos successeurs, des sujets de profonde surprise. Il est intéressant de constater que Lord Kelvin, tout en professant cependant une grande admiration pour Maxwell, dont le génie

(1) *Contact Electricity and Electrolysis according to Father Boscovich*, p. 145, seqq.

(2) *On the generation of longitudinal waves in ether* (1896), p. 54, seqq.

avait avec le sien une étroite affinité, n'a jamais cédé à cet engouement.

Le Volume qui met fin aux *Papers* de Lord Kelvin se termine lui-même par quelques Notices consacrées à des physiciens géomètres, Fleeming Jenkin, George Stokes, Peter Guthrie Tait; une Notice plus étendue, et d'un grand intérêt, retrace la carrière scientifique de James Watt. Ce Volume se ferme sur le texte du discours que Lord Kelvin prononça le 29 novembre 1904, lors de son installation comme Chancelier de l'Université de Glasgow. La lecture de ce discours ne peut manquer d'exciter le plus vif intérêt. « Je suis un enfant de l'Université de Glasgow, disait le nouveau Chancelier; j'y ai vécu soixante-sept ans, de 1832 à 1899; mais ma vénération pour l'antique Université écossaise qui, pratiquement, est aussi l'Université de l'Ulster, avait précédé cette heureuse période de ma vie. Mon père, né dans le comté de Down, avait été, pendant quatre ans (1810 à 1814), étudiant de l'Université de Glasgow; devenu premier professeur de Mathématiques à l'Institution Académique Royale, nouvellement fondée à Belfast, il enseignait à ses enfants, en sa maison d'Irlande, à vénérer l'Université de Glasgow. »

Le rappel de ces années d'enfance et des premiers enseignements paternels ouvrit, en quelque sorte, en l'âme du nouveau Chancelier, la porte qui tenait prisonniers une foule d'anciens souvenirs; Lord Kelvin les laissa librement se répandre devant ses auditeurs qui, sans doute, les durent recueillir avec émotion; et nous avons pensé que les lecteurs du *Bulletin des Sciences mathématiques* seraient heureux de prendre, à leur tour, leur part de cette émotion.

« Un de mes premiers souvenirs de ces vieux jours de Belfast date de 1829, disait William Thomson; nous eûmes alors la joyeuse nouvelle que le Sénat de l'Université de Glasgow avait conféré à mon père le degré honoraire du Doctorat ès Lois. Deux ans plus tard, on nous annonça que la Faculté du Glasgow College l'avait élu comme professeur de Mathématiques.

» Ce qui est advenu à mon père comme étudiant à Glasgow est naturellement, pour moi, d'un suprême intérêt. J'en dirai quelques mots, non seulement parce que votre amabilité pour moi m'incite à être égoïste, mais encore pour une autre raison; les difficultés

qu'a surmontées un étudiant irlandais, luttant, au commencement du dix-neuvième siècle, en l'Université de Glasgow, les bienfaits qui en sont résultés pour lui et qui ont duré autant que sa vie, mettront en lumière la vitalité et l'efficace activité de l'Université en ces temps primitifs.

» Il n'y avait alors ni bateaux à vapeur, ni chemins de fer, ni voitures automobiles. Les jeunes gens d'aujourd'hui peuvent-ils imaginer que la vie fût possible en de telles conditions? Deux fois par an, mon père et ses camarades d'étude qui, pour la plupart, aspiraient à devenir ministres du Synode presbytérien de l'Ulster ou à exercer la profession médicale dans le nord de l'Irlande, devaient traverser le Canal du Nord, et cela dans la première barque à voile, disposée à les prendre, qu'ils pouvaient trouver. Une seule fois, mon père fut assez heureux pour prendre passage sur un côtre de douane qui le mena de Belfast à Greenock en dix heures. Une autre de ces traversées se fit en une vieille gabare dont le service régulier consistait à transporter, d'Irlande en Écosse, non des étudiants, mais de la chaux. Le passage prit trois ou quatre jours; au cours de l'un d'eux, le petit bateau, immobilisé par le calme, entraîné par le flux et le reflux de la marée, dériva pendant trois heures autour d'Ailsa Craig.

» Au commencement de sa quatrième et dernière année scolaire (1813-1814) à l'Université, mon père et un groupe de ses compagnons d'étude, après avoir débarqué à Greenock, se mirent en marche pour Glasgow. En chemin, ils aperçurent un prodige : une noire cheminée se déplaçait rapidement par delà le champ qui se trouvait à gauche de la route; vite, ils sautent la haie, courent à travers champ et, à leur grand étonnement, ils voient le bateau de Henry Bell, *la Comète* (il n'était pas encore vieux d'un an), qui suivait la Clyde, de Glasgow à Greenock. Quatre ans plus tard, le bateau à vapeur de David Napier, *le Rob-Roy*, qui inaugura en 1818 son service régulier entre Belfast et Glasgow, assura à leurs successeurs, entre le Collège de Glasgow et leurs maisons d'Irlande, une traversée plus aisée, bien que moins pittoresque et moins riche d'aventures. Ces étudiants-là, qui avaient expérimenté la traversée du Canal du Nord avant et après la venue du *Rob-Roy*, ont dû être fort reconnaissants à leur Université, non seulement de ce qu'elle avait fait pour eux-mêmes, mais encore de ce qu'elle avait fait,

soixante ans auparavant pour la navigation à vapeur, en fournissant à James Watt un asile scientifique, en lui procurant des amis capables de comprendre sa pensée, en lui donnant enfin un *laboratoire*, sur l'ancien terrain de l'Université, adjacent à la High Street de Glasgow.

» Au cours de ses quatre années d'études, mon père avait suivi les classes d'Humanité, de Philosophie morale, de Mathématiques, de Physique, d'Anatomie et de Théologie. Bien que passionné pour la Science et, en particulier, pour les Mathématiques et la Physique, il suivit, pendant ses trois premières années scolaires, la classe de Latin, plus heureusement nommée, en ce temps-là, la classe d'Humanité, et il y remporta des prix.

» En donnant quelque peu de *Litteræ humaniores* à quiconque en peut et veut prendre quelque chose, les Universités, depuis un siècle et jusqu'à ce jour, ont offert à l'étudiant scientifique un bienfait dont il jouit sa vie durant, et dont on ne pourrait guère priser trop haut la valeur.

» En 1834, deux ans après que mon père eût été promu de Belfast au professorat en Mathématiques de Glasgow, je fus immatriculé comme membre de l'Université de Glasgow. Et maintenant, je vous prie de me pardonner si je vous entretiens des souvenirs, plus ou moins insignifiants, du vieux Collège de Glasgow, souvenirs qui se présentent en foule à mon esprit. La petite cloche qui tinte au faîte de la tour du Collège, appelle au travail, à six heures du matin, les domestiques et les hommes de peine du Collège. A sept heures, la majestueuse sonnerie de la grosse cloche réveille les professeurs (et aussi, je crois, les étudiants, alors qu'au vieux temps, les étudiants vivaient au Collège). Puis, à sept heures et demie, un nouveau tintement joyeux de la petite cloche appelle à leurs classes, pour le travail, professeurs et étudiants en Philosophie morale, en Grec, pour les anciens, en Latin, pour les nouveaux. Malheur à l'étudiant en Latin qui arrive à la porte de la classe dix secondes après le dernier battement de la vive petite cloche! La porte lui est fermée au nez par le concierge qui, infailliblement, se montre sans pitié, en vertu d'un ordre inexorable. Il lui faut, alors, reprendre dans l'obscurité le chemin du logis; il lui faut renoncer tristement au plaisir d'une heure de leçon sur Virgile, Horace ou Tite-Live, en la société de ses camarades, sous la direction de son

jeune et brillant professeur William Ramsay ; il sait, le pauvre fellow, qu'il vient de gagner l'ineffaçable trait noir qui sera marqué devant son nom. En une classe nombreuse, il était bien rare que semblable désastre fût éprouvé, même par un seul étudiant. Telle était la discipline sévère, mais salutaire et bienfaisante, que maintenait rigoureusement l'un des meilleurs, l'un des plus considérés parmi tous les professeurs qui aient jamais eu à diriger des étudiants dans une Université écossaise.

» Il ne faut pas, cependant, que je mette votre patience à l'épreuve en racontant longuement les souvenirs heureux de mon ancienne vie d'étudiant au Collège de Glasgow. Pour le Latin, j'ai imité l'exemple de mon père et, pendant trois années scolaires, j'ai suivi les diverses divisions de cette classe. Aujourd'hui encore, je me rappelle les leçons de William Ramsay sur les antiquités romaines, les conférences qu'il donnait sur Juvénal ou sur Plaute, avec plus d'intérêt que mainte bonne pièce que j'ai vue au théâtre. C'est un bonheur pour notre Université, et c'est un bonheur pour moi, que le nom et l'aimable esprit de ce maître soient demeurés avec nous jusqu'à ce jour, en mon vieux collègue et ami, votre ancien professeur George Ramsay.

» Le Grec, sous la direction de Sir Daniel Sandford et de Lushington ; la Logique, sous Robert Buchanan ; la Philosophie morale, sous William Fleming ; la Physique et l'Astronomie, sous John Pringle Nichol ; la Chimie, sous Thomas Thomson, qui était un maître fort avancé et un chercheur ; l'Histoire naturelle, sous William Couper ; tout cela, j'en puis témoigner par ma propre expérience, formait, vers 1830 ou 1840, un enseignement singulièrement intéressant et profitable pour les étudiants de l'Université de Glasgow. Sandford, en apprenant à la plus jeune classe l'alphabet grec, quelques mots grecs caractéristiques et la prononciation du grec usitée en Écosse, donnait, à de tous jeunes étudiants, des idées et quelque teinture de Philologie qui demeuraient en leur intelligence longtemps après que la grammaire plus détaillée et la syntaxe plus savante, apprises dans la suite, s'étaient évanouies en leur connaissance. La Logique différait fort agréablement du *Collegium Logicum* que Gœthe décrit au jeune étudiant allemand par la bouche de Méphistophélès. Pendant six semaines, le Professeur Buchanan rendait très vivants même les squelettes dessé-

chés du prédicat et du syllogisme, pour ceux qui, il y a soixante ans, étaient étudiants en Logique et en Rhétorique au Collège de Glasgow ; et le délicieux baragouin scolastique du *Barbara celarent* demeure, pour eux, un amusant souvenir. La *théorie de la rosée* de Well, vieille alors de vingt ans, fournissait un exemple heureux et instructif de Logique inductive.

» Mon prédécesseur en la chaire de Physique, le Dr Meikleham, apprenait à ses étudiants le respect pour les grands mathématiciens français Legendre, Lagrange, Laplace. Son successeur immédiat en l'enseignement de la classe de Physique, le Dr Nichol, ajouta Fresnel et Fourier à cette liste des nobles de la Science. Son propre enthousiasme pour la grande École française de physiciens géomètres se manifestait continuellement en son enseignement théorique et expérimental sur la théorie ondulatoire de la lumière et sur l'Astronomie pratique ; cet enthousiasme, il l'inspirait autour de lui, et, par là, il a grandement promu l'étude scientifique et l'exacte appréciation de la Science en l'Université de Glasgow. En cette salle, vous voyez côte à côte deux vitrines de souvenirs exposés aux yeux de l'Université, comme marques d'admiration permanente pour trois hommes de génie, John Caird, John Pringle Nichol, et le fils de celui-ci, John Nichol ; c'est à l'Université de Glasgow qu'ils ont vécu ; c'est pour elle et, aussi, pour le monde entier qu'ils ont travaillé en ces deux départements de l'activité qui sont la raison d'être des Universités, les Humanités et la Science.

» De 1818 à 1830, Thomas Thomson, le premier professeur de Chimie de l'Université de Glasgow, entreprit de donner aux étudiants un enseignement systématique de Chimie pratique. Aidé par la Faculté du Collège de Glasgow, qui donna l'emplacement du bâtiment et paya la construction, il réalisa un laboratoire fort bien monté ; ce laboratoire précéda de quelques années, je crois, le fameux laboratoire créé par Liebig à Giessen ; ce fut, je pense, le premier laboratoire qui ait été ouvert dans le monde, en vue de la recherche chimique et de l'enseignement pratique de la Chimie, à des étudiants d'Université. Cela se passait au temps où un public mal informé avait accoutumé de regarder l'Université de Glasgow comme une survivance stagnante et moyenâgeuse, et d'appeler ses professeurs les moines du moulin (*the monks of the molendinar*) !

» Non, elle ne demeurait pas stagnante, l'Université d'Adam Smith, de James Watt et de Thomas Reed. Depuis deux siècles et quart, elle n'a cessé de grandement progresser. Depuis près de deux siècles, elle a un laboratoire d'Anatomie humaine. Depuis soixante-quinze ans, elle possède le premier laboratoire de Chimie qui ait été ouvert à des étudiants. Depuis soixante-cinq ans elle a la première chaire d'Art de l'ingénieur qui ait été créée en l'Empire britannique. Depuis cinquante ans, elle possède le premier laboratoire de Physique destiné aux étudiants, une cave abandonnée et une vieille maison de professeur, qu'on agrandit, quelques années plus tard, en annexant une salle d'examen désertée. Il y a trente-quatre ans, elle a émigré de la place qu'elle occupait, depuis quatre siècles, sur la High Street de Glasgow, pour habiter le sommet plus clair et plus aéré d'une colline.... »

Les méthodes propres à former l'intelligence des jeunes gens sont, aujourd'hui, pour beaucoup, l'objet de constants soucis et le sujet de fréquentes discussions. A ces débats, le discours de Lord Kelvin verse, semble-t-il, un document important. N'est-il pas intéressant de savoir quelle instruction a donné au monde le théoricien qui fut l'un des créateurs de la Thermodynamique, l'expérimentateur qui a su déceler le transport électrique de la chaleur, l'ingénieur qui a posé le premier câble transatlantique?

PIERRE DUHEM.

GARNIER (RENÉ). — THÈSE PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS, POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES, soutenue le 24 juin 1911 : *Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes.* 1 vol. in-4, VI-127 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1911.

La Thèse de M. Garnier a pour objet l'étude des équations différentielles algébriques dont les intégrales générales ont leurs points critiques fixes. On sait que la résolution de ce problème, relativement simple dans le cas des équations du premier ordre, se heurtait dans le champ du second ordre à de profondes diffi-

cultés surmontées pour la première fois par M. Painlevé. Les travaux de M. Painlevé firent connaître l'existence de six équations du second ordre, absolument irréductibles, et dont les intégrales générales ont leurs points critiques fixes; ils ouvraient ainsi un champ complètement nouveau à la recherche. Mais on pouvait se demander toutefois si une étude analogue faite dans des domaines d'ordres supérieurs à deux ne risquait pas d'échouer devant des difficultés croissant avec l'ordre différentiel. M. Garnier montre précisément que les équations nouvelles découvertes par M. Painlevé ne constituent que le premier échelon d'une classe d'équations, d'ordres arbitrairement élevés, dont les intégrales ont leurs points critiques fixes et sont des fonctions essentiellement transcendantes des $2n$ constantes d'intégration.

L'exposition de ce résultat forme la IIIe Partie de la Thèse de M. Garnier; elle est précédée, dans les deux premières Parties, de l'étude d'équations différentielles du troisième ordre que je résumerai tout d'abord.

La Ire Partie (p. 12-39) donne l'énumération explicite et complète de tous les cas où l'équation

$$(\alpha) \qquad y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b(y)\,y''y' + c(y)\,y'^3$$

a son intégrale générale uniforme (b et c sont des fonctions algébriques de y, de genre arbitraire). M. Painlevé s'était borné à faire connaître, sans démonstration, la nature de l'intégrale de (α) lorsqu'elle est uniforme (c'est une fonction fuchsienne de x ou une combinaison de dégénérescence de ces fonctions); suivant son expression ([1]) « la résolution de ce problème n'est pas sans présenter des difficultés sérieuses ».

La IIe Partie de la Thèse (p. 39-73) étudie une dégénérescence du problème plus général qui fera l'objet de la IIIe Partie. M. Garnier rencontre (p. 55) un système bien remarquable du troisième ordre dont l'intégration s'effectue à l'aide des fonctions nouvelles de M. Painlevé; l'intégrale de ce système semble *a priori*

([1]) *Acta mathematica*, t. XXV, 1902, p. 70.

posséder deux branches : à l'aide de l'intégration d'une équation différentielle auxiliaire, M. Garnier parvient à démontrer que l'intégrale de ce système est méromorphe (p. 59-61). Ce système jouit de propriétés élégantes (p. 62-73); je citerai notamment l'étude d'une de ses dégénérescences qui introduit des surfaces elliptiques de genre un.

J'arrive à la IIIe Partie de la Thèse de M. Garnier (p. 73-126); voici le procédé qui lui permet d'obtenir les équations nouvelles dont il a été question plus haut. Considérons une équation différentielle linéaire (E_n) du deuxième ordre possédant $n+3$ points essentiellement singuliers, réguliers, $0, 1, t_1, \ldots, t_n, \infty$, et n points apparemment singuliers $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Proposons-nous de choisir pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des fonctions de $t_1, \ldots, t_n$ de telle sorte que le groupe de monodromie de (E_n) soit indépendant de $t_1, \ldots, t_n$. Il résultait d'un travail de M. R. Fuchs que, pour $n=1$, la fonction $\lambda_1(t_1)$ intègre une des six équations nouvelles découvertes par M. Painlevé, celle-là même qui reproduit les cinq autres par dégénérescence. Pour $n>1$, la solution du problème paraissait très laborieuse; M. Garnier démontre que (quel que soit n) les fonctions $\lambda_j(t_i)$ vérifient un système différentiel (f_n, F_n) d'ordre $2n$ (p. 73-86), explicitement connu, et qui peut dégénérer en un système hyperelliptique de genre n. Il parvient alors à étendre et à modifier la méthode suivie par M. Painlevé pour l'équation $y''=6y^2+x$ de façon à démontrer que les combinaisons symétriques des λ_j, considérées comme fonctions de l'un des t_i ont leurs points critiques fixes (p. 86-103).

En général, les λ_j renferment les constantes d'intégration sous forme essentiellement transcendante. Toutefois, Si (E_n) est convenablement choisie, (f_n, F_n) peut admettre des solutions satisfaisant à des équations d'ordre moindre. Par exemple, si (E_n) possède une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle, (f_n, F_n) admet des solutions pouvant être représentées par le quotient de fonctions hypergéométriques d'ordres supérieurs (p. 105-115) et satisfaisant à des équations qui généralisent celles rencontrées par MM. Darboux, Appell et Picard. M. Garnier obtient ces résultats par deux méthodes, entièrement différentes, dont la seconde est fondée sur la notion de groupe et lui permet notamment de

construire explicitement une équation linéaire du deuxième ordre admettant un groupe donné (p. 115-126) : c'est un cas particulier du célèbre problème de Riemann.

P. Appell.

FLOTOW (Dr A. v.). — Einleitung in die Astronomie. (Sammlung Schubert XV.) 1 vol. in-8, XIV-289 pages. Leipzig, G. J. Göschen; 1911.

M. A. v. Flotow expose seulement la partie théorique de l'Astronomie sphérique, parce qu'il considère la partie pratique, notamment l'étude des rapports entre les systèmes idéaux des coordonnées et les systèmes physiques donnés par les instruments astronomiques, comme étant en dehors du cadre des livres de la Collection en voie de publication. Néanmoins, pour des développements ultérieurs, il a jugé utile de s'occuper brièvement du mouvement elliptique dans notre système solaire. Il en résulte que son Ouvrage comprend les définitions et les transformations des diverses coordonnées astronomiques, ces transformations étant exposées en vue de faciliter l'étude des ouvrages d'Astronomie pratique.

M. A. v. Flotow, en adoptant une idée de A. F. Möbius, fait dériver la proposition fondamentale de la trigonométrie du principe des rotations autour d'axes, et il arrive ainsi à résoudre dans toute sa généralité et d'un seul coup le problème de la détermination des directions. Les angles d'un triangle sphérique ne sont pas empruntés à une figure qui n'amène jamais qu'un cas spécial devant les yeux. Il insiste sur les rotations autour d'axes qui correspondent aux sommets du triangle sphérique dans la succession cyclique, les distances des axes étant les côtés de ce triangle. Pour les nombreuses transformations des formules fondamentales de la trigonométrie, l'Auteur renvoie au Volume III de la Collection écrit par F. Bohuert; mais il entre dans de nombreux détails sur les développements en séries si importants en Astronomie. Pour rendre clair le système positif de rotation qu'il a adopté comme base de de ses applications, ainsi que les notions qu'il a introduites dans le rapport réciproque de deux surfaces fondamentales, l'Auteur a fait dessiner, en projection axonométrique,

une figure où les deux surfaces fondamentales sont prises pour bases opaques et où le cercle contenant les deux pôles est supposé formant anneau.

Pour exposer les sujets qu'il a traités dans son Livre, M. A. v. Flotow s'est inspiré des idées émises par M. Bruns dans ses leçons à l'Université de Leipzig et de celles qui se trouvent dans des Mémoires publiés par Le Verrier de 1855 à 1858, dans des discussions publiées par S. Newcomb de 1898 à 1905, dans de récents écrits de plusieurs autres astronomes. C'est pour ne pas donner à son Livre, qu'il considère non comme un *manuel* mais comme une *introduction*, une étendue trop considérable que M. A. v. Flotow s'est abstenu d'appliquer les développements théoriques à des exemples numériques. D'ailleurs, il pense qu'une telle application doit être exposée à part pour qu'elle puisse contenir notamment les méthodes d'interpolation, ainsi que l'emploi du calcul différentiel et du calcul intégral, comme cela est indiqué dans les Ouvrages de Francœur et de Souchon.

L'Ouvrage est divisé en neuf Chapitres dont nous croyons devoir citer les principaux paragraphes pour indiquer la marche générale suivie par l'Auteur :

I. Sphère de direction de Gauss. Équations fondamentales de la trigonométrie sphérique. Développements en séries des analogies de Neper et d'autres formules. — II. Principes servant de base aux systèmes fondamentaux de coordonnées en Astronomie. Rapports généraux entre ces systèmes. Coordonnées d'horizon d'équateur, d'écliptique. Phénomènes du mouvement diurne. — III. Mesure du temps. — IV. Transformations des coordonnées d'horizon, d'équateur, d'écliptique. — V. Formules différentielles sphériques. — VI. Problème de la parallaxe. — VII. Équations des mouvements dans le système solaire. Lois de Kepler. Résolution de l'équation de Kepler. Coordonnées héliocentriques. Influence de la Lune sur le mouvement de la Terre. Discussion de l'équation du temps. — VIII. Formules de la réfraction et de l'aberration. — IX. Changements des plans fondamentaux. Formules relatives à la précession. Variations annuelles et séculaires. Influence de la nutation sur les coordonnées de l'équateur. Oscillations du pôle.

Supplément contenant les éléments des orbites et les constantes.

Em. et Er. L.

DELAMBRE (J.-B.-J.). — Grandeur et Figure de la Terre. Ouvrage augmenté de notes, de Cartes, et publié par les soins de G. Bigourdan. 1 vol. gr. in-8°, VIII-402 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1912.

Cet Ouvrage est la reproduction d'un Manuscrit laissé par Delambre. Comme le style du Manuscrit est assez souvent négligé, M. G. Bigourdan l'a modifié par l'addition de certains mots placés entre crochets ou entre parenthèses. Il a rectifié plusieurs citations erronées ou défectueuses. Mais il n'a fait aucun changement qui aurait enlevé au travail de Delambre son caractère propre. Il a rédigé quelques notes placées au bas des pages, et a ajouté des Cartes. L'Ouvrage n'étant pas divisé en Livres ou en Chapitres, présente un défaut de clarté auquel M. G. Bigourdan est parvenu à remédier par l'addition de deux Tables, l'une alphabétique, l'autre méthodique et analytique.

Ce Livre contient l'histoire des différentes mesures de la Terre, depuis Eratosthène jusqu'à W. Lambton, qui a terminé en 1909 la mesure de degrés dans l'Inde. Les détails relatifs aux diverses opérations abondent. L'appréciation favorable ou critique des moyens employés et des résultats obtenus est toujours faite. Des extraits de documents officiels jettent un jour nouveau sur les nombreuses difficultés qui assaillirent Méchain et Delambre. Le Livre renferme une partie anecdotique qui coupe agréablement l'exposé technique, un peu aride, des opérations géodésiques. On aura une idée nette de l'importance de ce Livre en consultant l'extrait ci-joint de la Table analytique.

Si l'on doit savoir gré à M. G. Bigourdan d'avoir eu l'idée de publier le travail de Delambre, on doit aussi des remercîments à M. H. Poincaré qui a bien voulu réserver à une grande partie de ce travail l'hospitalité du *Bulletin astronomique*, dont il préside le Comité de rédaction, car, sans cette faveur, la dernière Œuvre de Delambre n'aurait peut-être pas été imprimée.

Extrait de la Table analytique.

Rappel très sommaire des anciennes mesures de la Terre. — I. **Première mesure de la méridienne de France.** De la grandeur de la figure de la Terre de *J. Cassini*. Prolongation de la mesure de Picard vers le Sud. Prolongation de la Méridienne vers le Nord. Apparition de l'*examen désintéressé* de Maupertuis. Critiques de Désagulliers. — II. **Première mesure de l'arc de Laponie.** *La figure de la Terre* de Maupertuis et manuscrit de Le Monnier. Vérification du degré entre Paris et Amiens (pour l'amplitude seule). Suite de la mesure de l'arc de Laponie. — III. **Seconde mesure de la méridienne de France.** La méridienne de l'Observatoire royal de Paris vérifié, par *Cassini de Thury*. Mesure du degré du Cap, par *La Caille*. — IV. **Première mesure de l'arc du Pérou.** La figure de la Terre de *Bouguer*. Journal du voyageur à l'Équateur de *La Condamine*. Mesure des trois premiers degrés du méridien de *La Condamine*. Justification des Mémoires à l'Académie pour 1744, et du Livre de la figure de la Terre, par *Bouguer*. Supplément au Journal de l'Équateur, par *La Condamine*. Lettre à M. X***, par *Bouguer*. Voyage historique de l'Amérique méridionale, par *G. Juan* et *A. de Ulloa*. — V. **Mesures de divers degrés** de 1750 à 1780. Degré de Rome, par les *PP. Maire* et *Boscovich*. Degré de Vienne, par le *P. Liesganig*. Degré de Hongrie, par le *P. Liesganig*. Gradus taurinensis, par *Beccaria*. Degré de Pensylvanie, par *Ch. Mason* et *J. Dixon*. — VI. **Troisième mesure de la Méridienne de France.** Base du système métrique décimal, par *Méchain* et *Delambre*. Reprise de la triangulation en France sur l'impulsion de Callon. Prolongation de la méridienne de France jusqu'aux Baléares. Prolongation de la méridienne de France jusqu'à Greenwich, d'après les opérations du général Roy. — VII. **Mesures de degrés après** 1800. Degré de Laponie, remesuré de 1801 à 1803. Exposé des opérations faites en 1787, pour la jonction des Observatoires de Paris et de Greenwich, par *Cassini*, *Méchain* et *Legendre*. An account of the operations carried for accomplishing a trigonometrical survey of England and Wales, by *W. Mudge* and *I. Dalby*. Degrés mesurés dans l'Inde, par *W. Lambton*.

Er. L.

MÉLANGES.

SUR LE MOUVEMENT DES CORPS PESANTS ET LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION;

PAR M. GASTON DARBOUX.

1. Dans son beau Traité de *Calcul des Variations*, t. I, p. 414, M. J. Hadamard a examiné les questions de maximum et de minimum qui se rattachent à la considération de l'intégrale

$$I = \int \sqrt{y}\sqrt{dx^2 - dy^2}.$$

Cette intégrale, étendue à un arc de courbe quelconque, est ce qu'on nomme l'*action*, dans le mouvement d'un corps pesant pour lequel la loi de la vitesse serait donnée par la formule

$$v = \sqrt{2y}, \tag{1}$$

l'accélération g étant supposée prise pour unité et la vitesse devenant nulle quand le mobile s'élève à la hauteur de l'axe des x, l'axe des y étant dirigé vers le bas. Ayant eu à traiter dans mon cours de cette année les questions résolues par M. Hadamard, j'ai retrouvé les résultats obtenus par ce très habile géomètre à l'aide de calculs plus simples et plus complets, que je demande la permission de reproduire ici.

Considérons toutes les trajectoires du mobile passant par le point fixe A (*fig.* 1)

$$x = 0, \qquad y = y_0.$$

Ce sont des paraboles, et si l'on pose

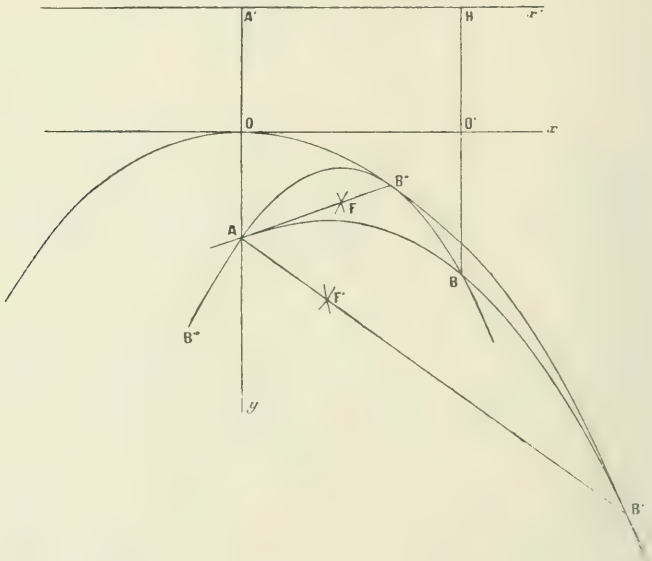
$$2y_0 = \beta^2, \qquad \beta = -\sqrt{2y_0}; \tag{2}$$

la loi du mouvement est définie en fonction du temps par les deux équations

$$x = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\, t, \qquad y = \frac{t^2}{2} - \alpha t - \frac{\beta^2}{2}, \tag{3}$$

où α désigne une constante arbitraire *nécessairement inférieure à β en valeur absolue*. Cette constante est égale, au signe près, à la composante verticale de la vitesse initiale ; de sorte que, si α est positive, la parabole commence par s'élever ; le mobile descend, au contraire, si α est négative.

Fig. 1.



Toutes les paraboles partant du point fixe A, ou de tout autre point, ont une propriété qu'on a remarquée depuis longtemps. *Elles ont pour directrice commune l'axe des x* ; mais peut-être n'a-t-on pas donné la véritable origine de cette propriété si générale. Elle réside dans ce fait que, *lorsque le mobile remonte au point imaginaire où la parabole coupe l'axe des x, sa vitesse doit devenir nulle* d'après la formule (1), et comme la composante horizontale de cette vitesse est une constante différente de zéro, il faut nécessairement que le coefficient angulaire de la tangente à la parabole devienne $= i$; *ce qui précisément est la propriété caractéristique des points appartenant à la directrice.*

2. Cette propriété des paraboles trajectoires d'avoir pour directrice l'axe des x a été utilisée, comme on sait, pour la construction

des trajectoires qui passent par deux points. Si l'on veut en effet que la trajectoire partie de A atteigne le point B (*fig.* 1), on connaîtra les distances AO, BO′ des deux points A et B à la directrice. Le foyer de la trajectoire cherchée sera donc à l'intersection des cercles décrits de A et de B comme centres, respectivement avec AO, BO′ comme rayons, ce qui donnera deux points F, F′ placés symétriquement par rapport à AB. On verra facilement que la condition nécessaire et suffisante pour que ces points existent est qu'on ait

$$AO + BO' > AB.$$

Si le point A est donné et si l'on mène la parallèle, $A'x'$ à Ox, à une distance telle que $OA' = OA$, la condition précédente peut s'écrire

$$AB < BH.$$

Elle exprime que le point B doit se trouver à l'intérieur de la *parabole de sûreté*, qui a le point A pour foyer et Ox pour tangente au sommet. Si le point B vient sur la parabole de sûreté, les deux points F, F′ viennent se confondre en un seul situé entre A et B. De là résulte cette propriété que les paraboles trajectoires touchent leur enveloppe, la parabole de sûreté, en un point situé sur le prolongement de la ligne qui joint le point A à leur foyer.

3. Après ces préliminaires, arrivons à la question essentielle que nous avons en vue. On considère un arc AB de la trajectoire du mobile. L'intégrale

$$(4) \qquad A = \int_A^B v\,ds = \int_A^B \sqrt{2y}\,ds$$

sera-t-elle plus petite pour l'arc de la trajectoire que pour tout autre chemin réunissant les points A et B? Voici ce qui résulte des théories générales du *Calcul des Variations* :

Le minimum aura certainement lieu si le point B est suffisamment voisin du point A. Soit B′ le point où la trajectoire vient toucher la parabole de sûreté. Quand B atteindra le point B′, l'intégrale cessera d'être minimum, même si l'on se borne à comparer sa valeur à celle qui serait prise sur des chemins infiniment voisins; de sorte que l'intégrale cessera d'être un minimum absolu

avant que le point B ait atteint le point B′ et, qu'à partir du point B′, elle cessera d'être minimum, même si l'on se borne à la comparer aux chemins infiniment voisins. *Voir*, par exemple, mes *Leçons sur la théorie des surfaces* (Livres V et VI).

Si, comme il est naturel, on veut chercher le chemin donnant le minimum de l'action entre A et B, on se trouve en présence d'une difficulté qui offre quelque chose de paradoxal. Pour ce chemin, semble-t-il, la variation première de l'action doit être nulle, propriété qui caractérise les paraboles trajectoires. Il semble donc qu'on n'ait le choix qu'entre les deux tracés suivants : 1° la parabole qui va directement de A à B; 2° la seconde parabole qui n'atteint le point B qu'après avoir touché la parabole de sûreté en B″. La première de ces paraboles doit être écartée, nous le savons. Il en est de même aussi de la seconde, puisqu'elle cesse même de fournir un minimum relatif dès que le point B a dépassé le point B′. Où donc est le chemin donnant le minimum de l'action?

4. Pour résoudre cette difficulté, il faut remarquer que la variation première de l'intégrale ne doit être nulle que pour les chemins qui flottent en quelque sorte à l'intérieur de la portion du plan pour laquelle v *est réelle* et y positif. Si l'on considère un chemin empruntant une partie de l'axe des x, qui sépare la portion du plan où l'expression de v est réelle de celle où cette expression devient imaginaire, il est possible qu'il donne une solution de la question. On est ainsi conduit à envisager le chemin AOO′B composé de deux parties à l'intérieur de la surface AO et O′B, pour lesquelles la variation première de l'action est nulle, et de la partie OO′ pour laquelle, v étant nulle, l'action elle-même est nulle et ne peut qu'augmenter, par conséquent, si l'on remplace OO′ par tout autre chemin au-dessous de Ox.

On trouve aisément que l'action suivant AO est égale à $\frac{1}{3}(2y)^{\frac{3}{2}}$. Suivant O′B elle est de même $(2y)^{\frac{3}{2}}$. Donc l'action A′ suivant le chemin AOO′B a pour valeur

$$(5)\qquad A' = \frac{1}{3}(2y)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(2y_0)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\beta^3 + \frac{1}{3}(t^2 - 2\alpha t + \beta^2)^{\frac{3}{2}}.$$

D'autre part, l'action suivant l'arc de parabole AB se calcule aisé-

ment. On a

$$(6)\qquad A = \int_0^t 2y\,dt = \frac{t^3}{3} - \alpha t^2 + \beta^2 t.$$

On voit donc que cette action A cessera d'être minimum si l'on a

$$A > A',$$

$$(7)\qquad t^3 - 3\alpha t^2 + 3\beta^2 t - \beta^3 > (t^2 - 2\alpha t + \beta^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Élevant au carré et supprimant le facteur positif $(\beta - \alpha)t$, il vient comme condition nécessaire

$$(8)\qquad 3(\alpha + \beta)t^3 - 2(\beta + 2\alpha)^2 t^2 + 6\beta^2(\beta + 2\alpha)t - 6\beta^4 > 0.$$

D'autre part, si l'on pose

$$(9)\qquad f(t) = 3(\alpha + \beta)t^3 - 2(\beta + 2\alpha)^2 t^2 + 6\beta^2(\beta + 2\alpha)t - 6\beta^4,$$

l'identité

$$t^3 - 3\alpha t^2 + 3\beta^2 t - \beta^3 = \frac{f(t) + (\beta - \alpha)[(2\beta + \alpha)t^2 + 3\beta^2 t + 3\beta^3]}{3(\alpha + \beta)}$$

montre que le premier membre de l'inégalité (7) sera toujours positif toutes les fois que t et $f(t)$ seront positifs. Donc l'inégalité (7) sera toujours vérifiée, dès que l'inégalité (8) le sera. Il reste à discuter cette dernière inégalité.

On y parvient aisément en faisant usage de l'identité

$$(10)\qquad \frac{9}{2}\beta^2 f(t) = \frac{t^3}{2}(\beta - \alpha)(\beta + 5\beta)^2 - [3\beta^2 - t(\beta + 2\alpha)]^3,$$

qui montre que le polynome $f(t)$ n'admet qu'une racine réelle.

Comme, dans l'inégalité (8), le premier et le dernier terme sont évidemment de signes contraires, on voit que le polynome $f(t)$ aura sa racine réelle *positive* et que l'inégalité (8) sera vérifiée pour toutes les valeurs de t supérieures à cette racine, et seulement pour celles-là.

5. Donc, quand le mobile s'éloignera sur la trajectoire, il arrivera toujours un moment où le principe de la moindre action cessera d'avoir lieu. Mais ici il y a deux cas à distinguer. Il peut arriver que la portion de la trajectoire réellement décrite par le

mobile vienne en contact avec la parabole de sûreté. C'est ce qui a lieu pour la branche ABB'. Mais il peut arriver aussi que la portion de la trajectoire décrite par le mobile ne touche pas la parabole de sûreté. C'est ce qui aurait lieu si l'on faisait décrire au mobile l'arc AB''' de la même trajectoire.

Dans le premier cas, le point B' correspond à une valeur de t qu'on calcule aisément et qui a pour valeur

$$t = \frac{\beta^2}{\alpha} \qquad (\alpha > 0), \tag{11}$$

Comme on a

$$f\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right) = \frac{(\beta - \alpha)\beta^4(3\beta^2 + 3\alpha\beta - \alpha^2)}{\alpha^3},$$

on voit que $f\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)$ sera positif et, par conséquent, comme nous l'avions prévu, la propriété de minimum de l'action cessera d'avoir lieu pour un point B compris entre A et B'.

On peut même préciser un peu plus la position du point B.

Si l'on cherche l'intersection de la parabole trajectoire avec le cercle osculateur au sommet de la parabole de sûreté, cercle qui a pour équation

$$x^2 + y^2 - 4yy_0 = 0,$$

on est conduit à l'équation en t

$$(t^2 - \beta^2)(t^2 - 4\alpha t + 3\beta^2) = 0,$$

qui peut avoir quatre racines réelles. Mais il est aisé de voir que la racine $t = \beta$ correspond au *premier* point où la trajectoire du mobile rencontre le cercle.

Comme on a

$$f(\beta) = \beta^2(\beta - 8\alpha)(\beta - \alpha),$$

et comme, dans le cas que nous étudions, α est positif, on voit qu'on aura

$$f(\beta) > 0.$$

La racine unique et positive de $f(t)$ sera donc inférieure à β. Donc, pour chacune des trajectoires considérées, *le minimum de l'action cessera d'avoir lieu avant que la trajectoire sorte du cercle osculateur.*

Arrivons maintenant aux portions de trajectoire telles que AB‴ pour lesquelles le mobile ne viendra jamais en contact avec la parabole de sûreté. Alors il n'y a aucune limite supérieure à assigner à t qui sera donné par l'équation

$$(12)\qquad t\left[\sqrt[3]{\frac{\beta-\alpha}{2}(4\alpha+5\beta)^2}-\beta+2\alpha\right]=3\beta^2.$$

Ce qu'on peut assurer, c'est que le minimum de l'action aura certainement lieu tant qu'on aura

$$t<\frac{2}{3}\beta.$$

Nous laissons ce point à vérifier au lecteur et nous allons construire la courbe (C), lieu des points B pour lesquels le minimum cesse d'avoir lieu.

6. On se rendra compte comme il suit de la forme de cette courbe. Introduisons la variable u définie par l'équation

$$(13)\qquad \beta-\alpha=2u^3(4\alpha+5\beta),$$

qui donne

$$(14)\qquad \alpha=\beta\frac{1-10u^3}{1+8u^3}.$$

En vertu de l'équation (10), on aura

$$3\beta^2=\left(\beta+2\alpha+\frac{9u\beta}{1-8u^3}\right)t,$$

d'où

$$(15)\qquad t=\beta\frac{1-2u+4u^2}{(1-u)(1+2u)}=\beta\frac{1-8u^3}{(1-u)(1+2u)^2}.$$

On aura aussi

$$(16)\qquad \beta^2-\alpha^2=36\beta^2\frac{u^3(1-u^3)}{(1+8u^3)^2},$$

ce qui permettra d'obtenir, pour les coordonnées d'un point de la courbe (C), les expressions

$$(17)\qquad x=12y_0\frac{\sqrt{u^3(1-u^3)}}{(1-u)(1+2u)^2},\qquad y=\frac{9u^2}{(1-u)^2(1+2u)^2}y_0.$$

On a donc affaire à une courbe elliptique. Aux formules précé-

dentes on peut joindre les identités

$$(18)\quad \begin{cases} 4yy_0 - x^2 = 36y_0^2 \dfrac{u^2(1+2u^2)^2}{(1-u)^2(1+2u)^4}, \\ 4yy_0 - x^2 - y^2 = 9y_0^2 u^2 \dfrac{(1-2u)(2u^2-u+2)(2+u+4u^2-4u^3)}{(1-u)^4(1+2u)^4}, \end{cases}$$

qui fournissent d'utiles indications.

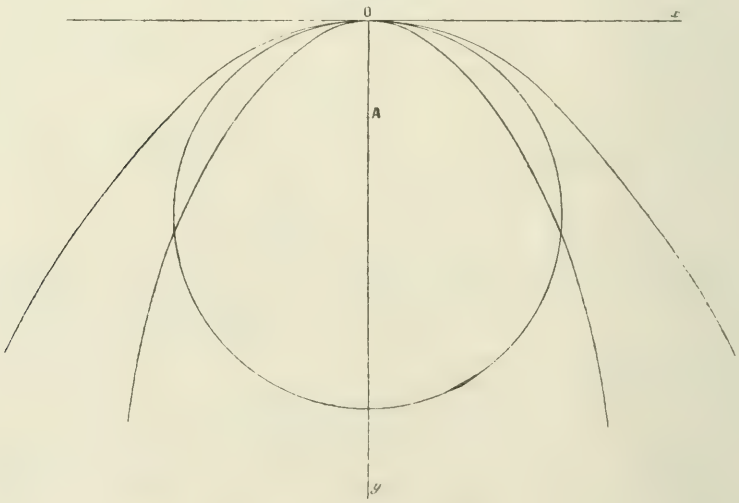
D'après la première formule (17), u ne peut varier qu'entre o et 1. D'après la première formule (18), la courbe (C), tangente au sommet de la parabole de sûreté, est à l'intérieur de cette parabole.

Elle est évidemment symétrique par rapport à l'axe des y et, comme on a

$$(19)\quad \frac{dx}{du} = \frac{3x}{2}\,\frac{1+2u^2}{u(1+2u)(1-u^3)}, \qquad \frac{dy}{du} = 2y\,\frac{1+2u^2}{u(1-u)(1+2u)},$$

x et y croissent avec u et la courbe affecte une forme parabolique.

Fig. 2.



Quand u s'approche de 1, x et y deviennent infinis et leurs valeurs principales sont

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,\frac{1}{\sqrt{1-u}}\,y_0, \qquad y = \frac{y_0}{(1-u)^2},$$

ce qui donne approximativement

$$y = \frac{9}{256}\frac{x^4}{y_0^3}.$$

Ainsi la branche parabolique de la courbe (C) est telle qu'elle finit par rentrer à l'intérieur de toutes les trajectoires paraboliques.

Les valeurs (19) nous donnent le coefficient angulaire de la tangente sous la forme

$$(20)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{(u + u^2 + u^3)^{\frac{1}{2}}}{(1-u)^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme $\frac{dy}{dx}$ ne cesse de croître, la courbe n'a pas de point d'inflexion. Nous l'avons dessinée dans la figure 2.

Au point de contact avec la parabole de sûreté en O, la courbe (C) a un véritable point singulier ; mais ce point est *non apparent*.

7. On peut aborder la solution de la question précédente par une voie toute différente qui nous donnera quelques nouveaux résultats.

On sait que, pour résoudre le problème de Mécanique posé conformément aux principes de Jacobi, on peut envisager l'équation aux dérivées partielles

$$(21)\qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = 2y,$$

et chercher une intégrale complète de cette équation. Choisissons la suivante

$$(22)\qquad \theta = \alpha x + \frac{1}{3}(2y - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} - \alpha x_0 - \frac{1}{3}(2y_0 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Si l'on prend la dérivée par rapport à α, l'équation

$$(23)\qquad 0 = x - x_0 + \alpha(2y_0 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} - \alpha(2y - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}$$

représentera toutes les trajectoires paraboliques passant par le point $(x_0 y_0)$, et la formule (22) donnera l'*action* prise du point $(x_0 y_0)$ au point (x, y). En éliminant α entre les équations (22), (23) on aura donc une formule donnant cette action.

L'élimination se fait de la manière suivante. On a

$$(24)\quad \begin{cases} x - x_0 = \alpha(2y - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} - \alpha(2y_0 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}, \\ 2\alpha(y - y_0) = (x - x_0)\left[(2y - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} + (2y_0 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right]. \end{cases}$$

De là, on tire

$$(25)\quad \begin{cases} 2\alpha(2y - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} = x - x_0 - \dfrac{2\alpha^2(y - y_0)}{x - x_0}, \\ 2\alpha(2y_0 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} = -x - x_0 - \dfrac{2\alpha^2(y - y_0)}{x - x_0}. \end{cases}$$

Posons

$$(26)\qquad r^2 = (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2.$$

En élevant au carré une des formules (25), il viendra

$$(27)\qquad \frac{(x - x_0)^2}{4\alpha^4 r^2} - 4\alpha^2(y + y_0) + (x - x_0)^2 = 0.$$

Si l'on forme des carrés avec le premier et le dernier terme de cette équation, on est conduit aux résultats

$$(28)\quad \begin{cases} 2\alpha^2 \dfrac{r}{x - x_0} + x - x_0 = 2\alpha\Delta, \\ 2\alpha^2 \dfrac{r}{x - x_0} - x + x_0 = 2\alpha\Delta, \end{cases}$$

où l'on a posé, sans rien préjuger encore sur le signe des radicaux,

$$(29)\qquad \Delta = \sqrt{r + y + y_0}, \qquad \Delta' = \sqrt{y - y_0 - r},$$

et par conséquent

$$(30)\qquad \Delta^2 - \Delta'^2 = 2r.$$

On trouve ainsi

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha r}{x - x_0} = \dfrac{1}{2}(\Delta + \Delta'), \qquad x - x_0 = \alpha(\Delta - \Delta'), \\ (2y - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{r}{\Delta + \Delta'} + \dfrac{y - y_0}{\Delta - \Delta'}, \quad (2y_0 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{-r}{\Delta - \Delta'} - \dfrac{y - y_0}{\Delta - \Delta'}. \end{cases}$$

En portant toutes ces valeurs dans θ, il vient, après réductions, la formule élégante

$$(32)\qquad \theta = \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{3}\Delta'^3 = \frac{1}{3}(r + y + y_0)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(y - y_0 - r)^{\frac{3}{2}}.$$

qui représente l'action entre les deux points (xy), $(x_0 y_0)$ et que j'ai déjà donnée dans mes *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 448, et qui revient au fond à la célèbre formule donnée par Lambert pour l'aire d'un segment parabolique.

Comme l'action doit être positive, le premier radical doit être pris avec le signe $+$; et le second doit l'être avec le signe $+$ ou le signe $-$ suivant qu'il s'agit de la parabole qui va directement d'un point à l'autre ou de celle qui ne parvient en B qu'après avoir touché la parabole de sûreté.

8. Il résulte de ce calcul que la courbe (C) étudiée plus haut aurait pour équation

$$(33)\qquad (y+y_0+r)^{\frac{3}{2}}-(y+y_0-r)^{\frac{3}{2}}=(2y_0)^{\frac{3}{2}}-(2y)^{\frac{3}{2}}.$$

On peut rendre cette équation rationnelle en élevant au carré, ce qui donne

$$(y+y_0)^3-3(y+y_0)r^2-4y^3-4y_0^3=(4yy_0)^{\frac{3}{2}}-[(y-y_0)^2-r^2]^{\frac{3}{2}}.$$

Faisons, comme dans le premier calcul, $x_0=0$. Nous aurons, en réduisant,

$$(34)\qquad 3(y+y_0)x^2-(4yy_0)^{\frac{3}{2}}=(4yy_0-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Élevant au carré et supprimant le facteur x^2, on trouve

$$(35)\qquad x^4-3x^2(3y^2+3y_0^2+2yy_0)+48y^2y_0^2=48(y+y_0)(yy_0)^{\frac{3}{2}}.$$

Une nouvelle élévation au carré donne l'équation de la courbe sous forme rationnelle

$$(36)\qquad [x^4+3x^2(3y^2+3y_0^2+2yy_0)-48y^2y_0^2]^2=\overline{48}^2(y+y_0)^2y^3y_0^3.$$

On trouve ainsi une courbe du huitième degré ayant à l'origine, comme nous l'avons déjà remarqué, un point singulier qui offre l'apparence d'un point ordinaire.

Cette courbe du huitième degré est coupée en deux points au moins par toutes les paraboles trajectoires. Ces points, situés de part et d'autre du point A, sont ceux pour lesquels l'action à partir de A cesse d'être minimum.

Mais les trajectoires paraboliques, pour lesquelles le coefficient

angulaire de la tangente en A est supérieur en valeur absolue au minimum

$$\frac{1+2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$$

coupent la courbe (C) en quatre points. Nous laissons au lecteur le soin d'établir ce résultat, qui n'a aucune influence sur notre discussion.

SUR L'IDENTITÉ DU DÉTERMINANT DE FREDHOLM ET D'UN DÉTERMINANT INFINI DE v. KOCH [1];

PAR M. JOHANNES MOLLERUP.

Dans un travail récent (*Bulletin des Sciences,* Mélanges VIII, 1911), j'ai employé la méthode suivante pour déterminer le système orthogonal d'un noyau non symétrique; pour un cas spécial de l'équation de Fredholm la méthode est due à M. Erhard Schmidt (*Math. Ann.*, t. LXIV, p. 164).

Soit l'équation homogène

$$(1) \qquad \varphi(s) = \lambda \int_a^b K(st)\,\varphi(t)\,dt,$$

où $K(st)$ est intégrable dans le domaine $a \leqq \begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \leqq b$ et soit $\beta_1(s), \beta_2(s), \ldots$ un système orthogonal complet. D'après la formule dite *de Parseval* on a

$$(2) \qquad \varphi(s) = \lambda \sum_i \int_a^b K(st)\,\beta_i(t)\,dt \int_a^b \varphi(t)\,\beta_i(t)\,dt = \lambda \sum_i \alpha_i(s)\,\rho_i,$$

posant

$$(3) \qquad \alpha_i(s) = \int_a^b K(st)\,\beta_i(t)\,dt$$

[1] Conférence faite au Congrès des mathématiciens scandinaves à Copenhague, 1911.

et

$$(4) \qquad \varrho_i = \int_a^b \varphi(t)\,\beta_i(t)\,dt.$$

La série (2) converge absolument et uniformément.

Introduisant $\varphi(s)$ on aura

$$(5) \qquad \varrho_i = \int_a^b \beta_i(t)\,dt \sum_j \lambda\alpha_j(t)\,\varrho_j = \lambda \sum_j \varrho_j \int_a^b \beta_i(t)\,\alpha_j(t)\,dt = \lambda \sum_j \varrho_j a_{ji},$$

en posant

$$(6) \qquad a_{ji} = \int_a^b \alpha_j(s)\,\beta_i(s)\,ds = \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(st)\,\beta_j(t)\,\beta_i(s)\,ds\,dt.$$

Le déterminant des équations homogènes

$$(5) \qquad \varrho_i = \lambda \sum_j \varrho_j a_{ji}$$

est

$$(7) \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{21} & \dots \\ -\lambda a_{12} & 1-\lambda a_{22} & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots \end{vmatrix}.$$

D'après un théorème de M. Helge v. Koch (*Rend. di Palermo*, t. XXVIII) ce déterminant convergera absolument, si les deux séries $\sum a_{j,i}^2$ et $\sum |a_{ii}|$ convergent. On aura, comme chez M. Hilbert (*Fünfte Mittheilung, Göttinger Nachrichten*, 1906, p. 446) :

$$(8) \qquad \sum_{i,j} a_{j,i}^2 = \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(st)^2\,ds\,dt.$$

Quant à la convergence de la série $\sum a_{ii}$ nous passons au noyau itéré, lequel sera déterminé en introduisant $\varphi(s)$ sous le signe $\int$:

$$(9) \qquad \varphi(s) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(st)\,\varphi(t)\,dt$$
$$= \lambda^2 \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(st)\,\mathrm{K}(tu)\,\varphi(u)\,du\,dt = \lambda^2 \int_a^b \mathrm{K}_2(st)\,\varphi(t)\,dt,$$

en mettant

$$(10) \qquad \mathrm{K}_2(st) = \int_a^b \mathrm{K}(su)\,\mathrm{K}(ut)\,du.$$

Remplaçant $K(st)$ par $K_2(st)$ on aura

$$(11)\qquad \begin{aligned} a_{ii} &= \int_a^b \int_a^b K_2(st)\beta_i(s)\beta_i(t)\,ds\,dt \\ &= \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(su)K(ut)\beta_i(s)\beta_i(t)\,ds\,dt\,du \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(su)\beta_i(s)\,ds \int_a^b K(ut)\beta_i(t)\,dt\right] du. \end{aligned}$$

Mais la série

$$(12)\qquad \sum_i \int_a^b K(su)\beta_i(s)\,ds \int_a^b K(ut)\beta_i(t)\,dt = \int_a^b K(su)K(us)\,ds$$

converge absolument et uniformément; en intégrant on aura

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\sum_i \int_a^b \left[\int_a^b K(su)\beta_i(s)\,ds \int_a^b K(ut)\beta_i(t)\,dt\right] du \\ &\qquad = \int_a^b \int_a^b K(su)K(us)\,ds\,du = \sum_i a_{ii}, \end{aligned}$$

la série étant absolument convergente.

Ayant trouvé une solution de l'équation

$$(9)\qquad \varphi(s) = \lambda^2 \int_a^b K_2(st)\varphi(t)\,dt,$$

on peut mettre, comme M. Erhard Schmidt, dans le cas d'un noyau symétrique (*Math. Ann.*, t. LXIII, p. 448) :

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} 2\chi_1(s) &= \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(st)\varphi(t)\,dt, \\ 2\chi_2(s) &= \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(st)\varphi(t)\,dt, \\ \chi_1(s) + \chi_2(s) &= \varphi(s). \end{aligned} \right.$$

En substituant, on voit que

$$\chi_1(s) = \lambda \int_a^b K(st)\chi_1(t)\,dt$$

et

$$\chi_2(s) = \lambda \int_a^b K(st)\chi_2(t)\,dt,$$

$\chi_1(s)$ et $\chi_2(s)$ ne disparaissant pas toutes deux identiquement.

Pour ce qui suit nous pouvons alors supposer que le déterminant $\Delta(\lambda)$ correspondant au noyau $K(st)$ converge absolument, en passant au besoin au noyau itéré.

La condition nécessaire et suffisante pour résoudre les équations homogènes

$$\rho_i = \lambda \sum_j \rho_j a_{ji} \tag{5}$$

est que

$$\Delta(\lambda) = 0. \tag{15}$$

Si $\Delta(\lambda)$ a le défaut p, les équations (5) auront p solutions indépendantes; une telle solution ρ_i a toujours une somme de carrés convergente $\sum \rho_i^2$. De l'équation

$$\varphi(s) = \lambda \sum_i \alpha_i(s) \rho_i, \tag{2}$$

nous trouvons enfin les fonctions cherchées $\varphi(s)$; la série converge absolument et uniformément parce que

$$\sum_i \alpha_i(s) \rho_i = \sum_i \int_a^b K(st) \beta_i(t)\, dt\, \rho_i,$$

où convergent les sommes de carrés

$$\sum \left[\int_a^b K(st) \beta_i(t)\, dt \right]^2 = \int_a^b K(st)^2\, dt \qquad \text{et} \qquad \sum_i \rho_i^2.$$

Alors les solutions trouvées $\varphi(s)$ sont continues.

En cas d'un noyau *symétrique*, $K(st) = K(ts)$, $\Delta(\lambda)$ devient symétrique parce que

$$a_{ji} = \int_a^b \int_a^b K(st) \beta_j(t) \beta_i(s)\, ds\, dt = a_{ij}.$$

En ce cas, si λ est un zéro de la multiplicité p de la fonction entière $\Delta(\lambda)$, celle-ci aura le défaut p, et les équations (5) auront p solutions indépendantes.

La fonction entière $\Delta(\lambda)$ a bien entendu les mêmes zéros que

le déterminant de Fredholm,

$$D_{\lambda K} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda^p}{p!} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b$$

$$\times \begin{vmatrix} K(s_1 s_1) & K(s_1 s_2) & \dots & K(s_1 s_p) \\ K(s_2 s_1) & K(s_2 s_2) & \dots & K(s_2 s_p) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ K(s_p s_1) & K(s_p s_2) & \dots & K(s_p s_p) \end{vmatrix} ds_1\, ds_2 \dots ds_p.$$

Mais *les fonctions entières* $\Delta(\lambda)$ *et* $D_{\lambda K}$ *sont en effet identiques*, et ainsi, il me semble, l'idée ingénieuse de M. Fredholm nous apparaît plus simple qu'auparavant.

Pour démontrer l'identité des fonctions $\Delta(\lambda)$ et $D_{\lambda K}$ nous avons besoin d'une formule intégrale. En effet, nous avons

$$\int_a^b K(s_1 s_2) K(s_2 s_3)\, ds_2 = \sum_i \int_a^b K(s_1 s_2) \beta_i(s_2)\, ds_2 \int_a^b K(s_2 s_3) \beta_i(s_2)\, ds_2.$$

où converge absolument et uniformément la série. Alors on a

$$\int_a^b \int_a^b K(s_1 s_2) K(s_2 s_3) K(s_3 s_4)\, ds_2\, ds_3$$
$$= \sum_i \int_a^b K(s_1 s_2) \beta_i(s_2)\, ds_2 \int_a^b \left[\int_a^b K(s_2 s_3) \beta_i(s_2)\, ds_2\, K(s_3 s_4) \right] ds_3.$$

où

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(s_2 s_3) \beta_i(s_2)\, ds_2\, K(s_3 s_4) \right] ds_3$$
$$= \sum_j \int_a^b \int_a^b K(s_2 s_3) \beta_i(s_2) \beta_j(s_3)\, ds_2\, ds_3 \int_a^b K(s_3 s_4) \beta_j(s_3)\, ds_3$$
$$= \sum_j a_{ji} \int_a^b K(s_3 s_4) \beta_j(s_3)\, ds_3.$$

et encore

$$\int_a^b \int_a^b K(s_1 s_2) K(s_2 s_3) K(s_3 s_4)\, ds_2\, ds_3$$
$$= \sum_{i,j} \int_a^b K(s_1 s_2) \beta_i(s_2)\, ds_2 . a_{ij} . \int_a^b K(s_3 s_4) \beta_j(s_3)\, ds_3.$$

De la même manière on aura

$$\int_a^b \int_a^b \int_a^b K(s_1 s_2) K(s_2 s_3) K(s_3 s_4) K(s_4 s_5)\, ds_2\, ds_3\, ds_4$$
$$= \sum_{i,j,k} \int_a^b K(s_1 s_2) \beta_i(s_2)\, ds_2 . a_{ij} . a_{jk} . \int_a^b K(s_4 s_5) \beta_k(s_4)\, ds_4.$$

Continuant ainsi, on trouve la formule cherchée :

$$(16)\qquad \int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(s_1s_2)\,K(s_2s_3)\ldots K(s_ns_1)\,ds_1\,ds_2\ldots ds_n = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\ldots a_{i_ni_1},$$

les i_1, i_2, ..., i_n parcourant indépendamment tous les nombres de la suite 1, 2, 3, ...

Pour $\Delta(\lambda)$ on a le développement

$$\Delta(\lambda) = 1-\lambda\sum_i a_{ii} - \lambda^2\sum_{i,j}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix} - \lambda^3\sum_{i,j,k}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik}\\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk}\\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk}\end{vmatrix}\ldots$$

$$(i<j<k\ldots)$$

ou

$$\Delta(\lambda) = 1-\frac{\lambda}{1!}\sum_{r_1} a_{r_1r_1} - \frac{\lambda^2}{2!}\sum_{r_1,r_2}\begin{vmatrix} a_{r_1r_1} & a_{r_1r_2}\\ a_{r_2r_1} & a_{r_2r_2}\end{vmatrix}\ldots$$

$$\times(-1)^p\frac{\lambda^p}{p!}\sum_{r_1,r_2,\ldots,r_p}\begin{vmatrix} a_{r_1r_1} & a_{r_1r_2} & \ldots & a_{r_1r_p}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{r_pr_1} & a_{r_pr_2} & \ldots & a_{r_pr_p}\end{vmatrix}\ldots$$

r_1, r_2, r_3, ... parcourant indépendamment la suite naturelle 1, 2, 3,... et n'étant pas nécessairement inégaux. Il s'agit donc de démontrer la formule

$$(17)\qquad \int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b \begin{vmatrix} K(s_1s_1) & K(s_1s_2) & \ldots & K(s_1s_p)\\ K(s_2s_1) & K(s_2s_2) & \ldots & K(s_2s_p)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(s_ps_1) & K(s_ps_2) & \ldots & K(s_ps_p)\end{vmatrix} ds_1\,ds_2\ldots ds_p$$

$$= \sum_{r_1,r_2,\ldots,r_p}\begin{vmatrix} a_{r_1r_1} & a_{r_1r_2} & \ldots & a_{r_1r_p}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{r_pr_1} & a_{r_pr_2} & \ldots & a_{r_pr_p}\end{vmatrix}.$$

En regardant un membre arbitraire

$$\pm\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(s_1s_{i_1})\,K(s_2s_{i_2})\ldots K(s_ps_{i_p})\,ds_1\,ds_2\ldots ds_p,$$

nous voyons qu'il sera égal à la somme des membres correspondants de l'autre côté de la formule, c'est-à-dire à

$$\pm\sum_{r_1,r_2,\ldots,r_p} a_{r_1r_{i_1}}a_{r_2r_{i_2}}\ldots a_{r_pr_{i_p}};$$

où les indices $r_1, r_2, \ldots, r_p$ parcourent indépendamment la suite naturelle $1, 2, 3, \ldots$. Pour le voir, on décompose seulement les les produits correspondants $K(s_1 s_{i_1}) K(s_2 s_{i_2}) \ldots K(s_p s_{i_p})$ et $a_{r_1 r_{i_1}} a_{r_2} a_{r_{i_2}} \ldots a_{r_p r i_p}$ en produits circulaires correspondants :

$$\{A_1\}\{A_2\}\ldots\{A_m\} \quad \text{et} \quad \{\alpha_1\}\{\alpha_2\}\ldots\{\alpha_m\}.$$

Alors on aura, d'après la formule (11),

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \{A_1\}\{A_2\}\ldots\{A_m\}\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_p \\ = \sum \{\alpha_1\} \cdot \sum \{\alpha_2\} \ldots \sum \{\alpha_m\} \\ = \sum_{r_1, r_2, \ldots, r_p} \{\alpha_1\}\{\alpha_2\}\ldots\{\alpha_m\},\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il faut remarquer que les formules (2) et (9) sont encore valables, quand le noyau $K(st)$ est *symétrique* et $\beta_1(s)$, $\beta_2(s)\ldots$ forment le système orthogonal complet du noyau. Alors on aura

$$(18) \qquad a_{ji} = \int_a^b \int_a^b K(st)\, \beta_j(t)\, \beta_i(s)\, ds\, dt = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \frac{1}{\lambda_i} & j = i \end{cases}$$

Si la série $\sum_i \frac{1}{|\lambda_i|}$ converge, il suit

$$(19) \qquad \Delta(\lambda) = \Pi\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) = D_{\lambda K}.$$

En tout cas, les séries $\sum_i \frac{1}{|\lambda_i|^n}$ étant convergentes pour $n = 2$, on aura

$$(20) \qquad \Delta(\lambda) = \Pi\left(1 - \frac{\lambda^n}{\lambda_i^n}\right) = D_{\lambda K_n}.$$

K_n étant un noyau itéré arbitraire.

Je crois que les résultats (19) et (20), pour $n = 2$, sont nouveaux [1].

---

[1] Je profite de l'occasion pour faire observer que la solution que j'ai donnée des équations intégrales conjuguées non homogènes dans le travail cité, se trouve déjà chez M. E. Bounitzsky (*Bull. Sc. math.*, t. XXXII, p. 14).

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WOLDEMAR VOIGT. — LEHRBUCH DER KRISTALLPHYSIK (*mit Ausschluss der Kristalloptik*), mit 213 Figuren im Text und mit einer Tafel, 1 vol. in-8°, XXIV-960 pages. Leipzig, B. G. Teubner; 1910.

La Cristallographie est une science un peu délaissée à l'heure actuelle et, par une singularité regrettable, c'est précisément chez nous, où elle a pris naissance et où elle a connu tant d'adeptes illustres, qu'on semble s'en désintéresser le plus. Il suffira, je pense, d'évoquer par les mots d'*isomorphisme*, *polymorphisme*, *biréfringence*, *polarisation rotatoire*, *dissymétrie moléculaire*, tout le monde de faits et de notions fondamentales dont la Chimie et la Physique lui sont redevables pour montrer combien la défaveur dont elle souffre est injustifiée.

Les physiciens surtout auraient intérêt à lui laisser une place plus large dans leurs recherches et leurs spéculations. Elle paraît en effet susceptible de leur fournir, sur les propriétés moléculaires des corps, des documents que l'observation des milieux amorphes, si soignée fût-elle, semble par nature impuissante à leur procurer. Une particularité essentielle caractérise le cristal homogène : *les molécules y sont toutes parallèles entre elles ou, tout au moins, n'y prennent qu'un nombre restreint d'orientations différentes.* On comprendra sans peine l'importance considérable de ce fait fondamental en remarquant qu'il permet à certaines qualités moléculaires, complètement masquées dans le corps amorphe par une compensation mutuelle entre éléments distribués au hasard, de venir au jour et de faire sentir leur action.

Le plus souvent, cet *effet d'orientation* se traduit par une variété dans l'aspect des phénomènes dont on ne peut manquer d'être vivement frappé lorsque l'on compare, par exemple, l'optique ou l'élasticité cristallines avec l'optique ou l'élasticité des corps isotropes. Mais il peut faire surgir aussi des phénomènes absolument nouveaux, incompatibles avec la structure amorphe,

apanage exclusif des milieux cristallisés et par cela même d'un intérêt primordial : phénomènes de *pyroélectricité*, phénomènes de *piézoélectricité* (P. et J. Curie) et peut-être aussi phénomènes de *ferromagnétisme* (P. Weiss) (1).

Il ne paraît pas absolument chimérique d'espérer qu'on puisse, par l'étude systématique des phénomènes dont les milieux cristallins sont le siège, surtout en les comparant dans les variétés d'un même corps polymorphe, atteindre les *propriétés individuelles* de la molécule elle-même. Si lointain que paraisse ce but, on ne doit pas méconnaître les résultats acquis grâce aux efforts de cristallographes enthousiastes, malheureusement trop isolés. Ce sont ces résultats que M. W. Voigt s'est proposé d'exposer d'une façon aussi complète que possible dans un Livre considérable (in-8° de près de 1000 pages) : *Lehrbuch der Kristallphysik*, en laissant de côté les phénomènes optiques pour lesquels l'auteur renvoie à l'excellent Traité de M. Pockels (2).

Cet Ouvrage de M. Voigt n'est pas le premier paru sur le sujet. Il a eu d'illustres devanciers : Liebisch dans sa *Physikalische Kristallographie*, Soret dans ses *Éléments de Cristallographie physique*, Bouasse dans son Volume sur les *Symétries* (3). Le Traité de M. W. Voigt est plus développé et plus complet, mais ce qui le caractérise surtout et lui donne son cachet d'originalité, c'est l'effort de synthèse fait par l'auteur pour arriver à mettre en évidence, dans un exposé d'une systématique impeccable, les analogies profondes imposées par les lois de symétrie à des phénomènes qui semblent au premier abord n'avoir les uns avec les autres que des rapports fort éloignés. C'est cet effort surtout que je voudrais mettre en relief ici.

Deux Chapitres servent de base solide à tout l'édifice. Le premier est consacré à l'étude de la *symétrie des milieux cristallins*.

---

(1) On peut donner, comme un exemple très caractéristique du concours précieux que l'étude des corps cristallisés peut apporter à la solution de problèmes importants de la Physique, la théorie si remarquable du ferromagnétisme à laquelle M. P. Weiss a été conduit par l'étude approfondie des propriétés magnétiques des *cristaux de pyrrhotine*.

(2) Pockels, *Lehrbuch der Kristalloptik*. Leipzig, B. G. Teubner, 1906.

(3) M. Voigt lui-même avait déjà publié, en 1898, un abrégé du Traité actuel, sous le titre : *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle in elementar Darstellung*; Leipzig.

On sait en quoi consiste ce sujet, aujourd'hui classique. Un milieu cristallin peut n'être pas altéré par certaines transformations géométriques consistant :

Soit en une rotation pure, autour d'une droite qu'on appelle alors *axe de symétrie directe ;*

Soit en une inversion par rapport à un point dit *centre de symétrie ;*

Soit enfin en une inversion accompagnée d'une rotation autour d'une droite qui prend alors le nom d'*axe de symétrie inverse.*

L'ensemble des transformations qui laissent un même milieu invariable, constitue évidemment *un groupe*, au sens mathématique habituel du mot. Le problème consiste à rechercher tous les groupes compatibles avec la structure périodique des milieux cristallins. On sait que cette structure exclut les axes d'ordre égal à 5 ou d'ordre supérieur à 6. Il ne reste que 32 groupes possibles.

Les cristallographes les répartissent en 6 ou 7 systèmes cristallins d'une façon qui change un peu avec les auteurs suivant le principe choisi comme base de classification.

Le mode de répartition adopté par M. Voigt est identique à celui auquel Bravais s'est trouvé conduit par l'étude des systèmes réticulaires. C'est certainement le plus naturel, même lorsque, en laissant de côté les réseaux, on se borne à la seule considération des éléments de symétrie. C'est le seul qui rapproche les groupes physiquement semblables (au point de vue des phénomènes élastiques surtout). Il serait vraiment à souhaiter que les cristallographes l'adoptent tous.

Sohncke, Schœnfliess, Fedorov ont généralisé les résultats précédents en introduisant des *axes de symétrie hélicoïdaux* à côté des axes de rotation pure des cristallographes antérieurs. M. Voigt n'a pas cru devoir utiliser cette généralisation dans son Ouvrage, à juste raison d'ailleurs, aucun phénomène physique ne permettant à l'heure actuelle d'établir une *distinction concrète* entre un axe hélicoïdal et un axe de simple rotation.

La considération des 32 groupes de symétrie revenant presque à chaque page de son Livre, M. Voigt, pour faciliter la lecture, en a donné un Tableau hors texte qu'on peut avoir ainsi toujours sous les yeux. Au lieu d'y définir, comme on fait habituellement dans

les traités de cristallographie, chacun des groupes par l'énumération complète des éléments de symétrie correspondants, l'auteur a trouvé préférable d'énoncer seulement les *symétries indépendantes* dont la combinaison suffit à reproduire le groupe entier. Il en résulte un grand avantage au point de vue des développements mathématiques ultérieurs : pour exprimer qu'une fonction reste invariante pour toutes les opérations d'un groupe, il suffit, en effet, d'exprimer qu'elle n'est pas modifiée par les opérations indépendantes.

A côté du Tableau des 32 groupes de symétrie, M. Voigt en donne un autre plus simple (11 groupes seulement) qui suffit pour l'étude des phénomènes pour lesquels la présence ou l'absence d'un centre de symétrie est indifférente (déformations élastiques, par exemple).

Un certain nombre des questions qui forment l'objet de ce Chapitre ont été traitées avec une grande élégance par M. Lorentz (*Abhandlungen über theoretische Physik*, p. 299). M. Voigt s'est manifestement inspiré de celui-ci dans la rédaction de quelques-uns de ses paragraphes.

Le second Chapitre, consacré à l'étude des *grandeurs géométriques* qui permettent de représenter les phénomènes physiques, est plus nouveau et plus personnel. L'auteur y rappelle des notions importantes qu'il a lui-même introduites dans la Science. Son principal souci est d'établir une distinction très nette entre des grandeurs que les mathématiciens et les physiciens confondent souvent les unes avec les autres, alors qu'en réalité la considération de leurs éléments de symétrie les différencie très nettement. Ces grandeurs sont étudiées d'une façon complète, leur symétrie définie avec le plus grand soin. Je ne crois pas inutile de rappeler ici les principales d'entre elles, avec le souhait de les voir s'introduire peu à peu dans l'enseignement.

1. Les *grandeurs scalaires* sont caractérisées par un nombre seulement, affecté au besoin d'un signe. Il y a lieu d'établir une distinction entre celles qui sont absolument indépendantes de tout choix d'axes de coordonnées (*scalaires vraies*) et celles qui changent de signe suivant qu'on les rapporte à un système d'axes cartésiens direct ou inverse (*pseudoscalaires*).

La température, la densité matérielle, la densité électrique sont des grandeurs scalaires vraies.

La densité de masse magnétique est, au contraire, une grandeur pseudoscalaire. Elle doit, en effet, changer de signe lorsqu'on change la définition du sens positif du courant électrique dans un solénoïde.

2. Les *grandeurs vectorielles,* en outre d'un nombre essentiellement positif, exigent, pour être définies, la considération d'une *direction unilatérale ayant un sens déterminé* Ce sens peut être indépendant du choix des axes de coordonnées; le vecteur est alors un vecteur *polaire* ayant la symétrie d'un tronc de cône circulaire (champ électrique, vitesse, force); ou bien, il doit être renversé lorsqu'on remplace des axes directs par des axes inverses, on a alors affaire à un vecteur *axial* ayant la symétrie d'un cylindre circulaire tournant autour de son axe (tourbillon, champ magnétique, etc.).

Un vecteur peut être défini par trois composantes X, Y, Z qui se transforment comme les coordonnées x, y, z d'un point, lorsqu'on change l'orientation du système des axes de référence.

3. Les *grandeurs tensorielles* sont caractérisées par un nombre positif ou négatif et une *direction bilatérale* (sans distinction de sens). Exemple : dilatation ou contraction d'un corps dans une direction déterminée, tension ou pression à l'intérieur d'un solide déformé, etc. Il y a lieu encore de distinguer entre un *tenseur polaire* ayant la symétrie d'un cylindre de révolution, et un *tenseur axial* ayant seulement la symétrie d'un cylindre tordu.

Dans la plupart des applications, les tenseurs vont par groupes de trois trirectangulaires (triple tenseur); c'est le cas, par exemple, des trois dilatations principales qui représentent la déformation d'un solide ou des trois tensions normales principales qui représentent les efforts à l'intérieur de ce même solide.

Un triple tenseur peut être représenté par six composantes : les trois dilatations e_1, e_2, e_3 et les trois glissements g_1, g_2, g_3, s'il s'agit du triple tenseur de la déformation, les trois tensions normales n_1, n_2, n_3 et les trois tensions tangentielles t_1, t_2, t_3, s'il s'agit du triple tenseur des efforts. Ces composantes, lorsqu'on

change l'orientation des axes de référence, se transforment respectivement comme x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx (x, y, z étant les coordonnées d'un point).

4. L'auteur considère encore d'autres grandeurs : *trivecteurs, bitenseurs* dont les composantes plus nombreuses encore se transforment comme les produits du troisième ou du quatrième degré des coordonnées d'un point. Ces grandeurs me semblent moins intéressantes que les précédentes, faute d'une représentation géométrique simple qui permette de les manier aisément.

Le lecteur ne saurait trop s'appesantir sur ces définitions et devra s'assimiler avec grand soin l'étude complète faite par M. Voigt des relations que toutes ces grandeurs présentent entre elles. Une fois maître des deux premiers Chapitres, il pourra lire, sinon sans effort, du moins sans trop de difficultés, le reste de l'Ouvrage qui se développe avec un enchaînement d'une logique simple et rigoureuse.

Pour lui faciliter la besogne, M. Voigt a cru bon de réunir dans un Chapitre (troisième de l'Ouvrage) des développements de Physique mathématique qu'on pourrait évidemment trouver ailleurs, mais qu'il est plus avantageux certainement d'avoir à sa portée, avec les notations et les modes de raisonnement propres à l'auteur. Ce sont d'abord des considérations mécaniques sur la déformation des corps solides, puis un rappel des principes de la Thermodynamique, un exposé des lois générales de l'électricité et du magnétisme où se trouve développée l'étude des phénomènes de polarisation diélectrique et d'influence magnétique, le tout sous la forme la mieux appropriée aux développements ultérieurs, avec utilisation des grandeurs définies précédemment.

Je ne chercherai pas à détailler ici tous les phénomènes cristallins étudiés par M. Voigt, dans les Chapitres suivants. Mais je voudrais montrer dans quel esprit la théorie en est conçue ; aussi bien, c'est ce qui m'a paru le plus intéressant dans l'Ouvrage.

Voici comment le problème se pose :

Une cause représentée par une grandeur déterminée, scalaire, vectorielle ou tensorielle, agissant dans un milieu cristallin, ayant l'une des 32 symétries définies précédemment, y produit un effet

qui peut être lui-même représenté par une grandeur scalaire, vectorielle ou tensorielle. Quelles relations peut-il y avoir entre la grandeur qui représente l'effet et celle qui définit la cause?

Comme première approximation, l'auteur admet la *proportionnalité de l'effet à la cause*. D'une façon plus précise, il admet que chaque composante de la grandeur géométrique qui mesure l'effet est une *fonction linéaire* des composantes de la grandeur qui représente la cause. Ceci s'exprime au moyen d'un certain nombre de relations du premier degré dont les coefficients sont autant de *paramètres caractéristiques* du milieu.

Lorsque le phénomène est réversible, les fonctions linéaires se présentent comme les dérivées partielles d'un même potentiel thermodynamique. Il en résulte une première réduction du nombre des paramètres.

On obtient une réduction plus complète en appliquant la loi de symétrie de Curie : *une dissymétrie n'apparaît jamais spontanément*, qui peut encore s'énoncer ainsi : *la grandeur géométrique qui représente l'effet admet au moins les éléments de symétrie communs à la grandeur géométrique qui représente la cause agissante et au milieu où se produit le phénomène.*

L'auteur étudie successivement les différents cas possibles déterminant les relations qui peuvent exister entre :

1° Scalaire et vecteur : pyroélectricité, pyromagnétisme (Chap. IV) ;

2° Scalaire et triple tenseur : dilatation thermique (Chap. V) ;

3° Vecteur et vecteur : conductibilité électrique ou calorifique, influence électrique ou magnétique (Chap. VI) ;

4° Triple tenseur et triple tenseur : élasticité (Chap. VII) ;

5° Triple tenseur et vecteur : piézoélectricité, piézomagnétisme (Chap. VIII).

La réduction des paramètres est poussée aussi loin que possible dans tous les cas, pour chacun des 32 groupes de symétrie. Elle peut aller parfois jusqu'à l'annulation complète de tous les paramètres, s'il s'agit d'un phénomène (pyroélectricité, par exemple) dont l'existence est incompatible avec certains groupes de symétrie. Le plus souvent, la réduction pour un phénomène déterminé

peut s'opérer de la même façon dans différents groupes de symétrie; l'allure du phénomène y est alors exactement la même.

Ainsi, à l'égard des dilatations thermiques, la présence ou l'absence d'un centre sont indifférentes, un axe ternaire, quaternaire, hexagonal sont équivalents entre eux et équivalents à un axe d'ordre infini : la dilatation thermique, observable évidemment dans les 32 groupes de symétrie, n'y revêt que cinq modalités différentes.

Les phénomènes élastiques, pour lesquels l'existence du centre est également indifférente, mais qui permettent d'établir une distinction entre les axes d'ordre 2, 3, 4 ou 6 sont susceptibles de neuf modalités différentes.

Le cas le plus varié est celui de la piézoélectricité qui ne peut s'observer que dans 20 groupes seulement, mais peut revêtir 16 aspects différents.

J'ai cru intéressant de dresser le Tableau suivant qui donne pour les divers phénomènes étudiés par Voigt le nombre des groupes où l'on peut l'observer, le nombre des modalités dont il est susceptible :

Phénomènes.	Nombre de groupes où l'on peut les observer.	Nombre des modalités qu'ils peuvent présenter.
1. Pyroélectricité	10	3
2. Pyromagnétisme	13	2
3. Dilatatation thermique	32	5
4. Conductibilité (électrique ou calorifique	32	6
5. Polarisation (électrique ou magnétique)	32	5
6. Élasticité	32	9
7. Piézoélectricité	20	16
8. Piézomagnétisme	29	8

Je pense en avoir assez dit pour faire comprendre le mécanisme des raisonnements appliqués par M. W. Voigt aux phénomènes cristallins. Sa méthode a ceci de fort intéressant *qu'elle se développe sans aucune hypothèse* (sauf celle de la proportionnalité de l'effet à la cause). Les relations entre paramètres qu'elle permet d'établir sont dès lors indépendantes de toute interprétation théorique ; elles restent les mêmes quelles que soient les explications,

moléculaires, électromagnétiques, électroniques ou autre qu'on donne du phénomène.

Évidemment, c'est un résultat de première importance que cette détermination des conditions imposées aux phénomènes, par les seuls principes de la Thermodynamique combinés aux lois de symétrie. Pourtant, il ne faudrait pas exagérer et vouloir en faire le but ultime de la Science. Ce n'est certainement pas l'idée de M. W. Voigt. Le chemin qu'il a parcouru doit être considéré seulement comme une première étape vers la vérité, une exploration sur un terrain solide qui permet de délimiter en toute sûreté le domaine dans lequel pourra et devra se mouvoir l'hypothèse appuyée sur l'expérience.

Mais, le rôle de celles-ci n'est pas annihilé par là même. Il reste au contraire prépondérant. C'est à elles, en effet, qu'il faudra s'adresser si l'on désire être renseigné sur la grandeur des phénomènes, laissée complètement dans l'ombre par l'étude générale. Ce sont elles seules qui permettront d'expliquer pourquoi certains phénomènes compatibles avec la symétrie de plusieurs milieux cristallins : pyromagnétisme, piézomagnétisme, etc., n'ont pu être observés. C'est à elles qu'on devra demander le sens physique de ces paramètres définis jusqu'ici seulement par leurs caractères géométriques. C'est d'elles seules, enfin, qu'on pourra espérer quelques renseignements sur les propriétés ultimes des molécules.

La meilleure preuve, d'ailleurs, que M. W. Voigt, tout en s'efforçant de donner une théorie générale des phénomènes, indépendante de toute hypothèse, ne perd pas de vue pour cela le rôle important de celle-ci dans la Science, c'est qu'il a développé dans son Ouvrage même une théorie moléculaire de l'élasticité dont je voudrais dire ici quelques mots.

Au lieu de considérer les molécules comme de simples points matériels, ainsi qu'on a coutume de le faire dans les théories classiques, l'auteur pense qu'il convient plutôt de les envisager comme de petits solides qui peuvent être soumis à la fois à des *forces* et à des *couples* et peuvent subir des *translations* et des *rotations*.

Alors que, dans les théories courantes, 6 paramètres suffisent pour définir la déformation au voisinage d'un point, il en faut 9 ici : 3 dilatations, 3 glissements et les 3 composantes des rotations des molécules (ou mieux encore les 3 composantes de la rotation

relative des molécules et de l'élément de volume qui les contient).

Les efforts à l'intérieur du solide se représenteront de même par 9 variables : 3 tensions normales et 6 tensions tangentielles qui équilibreront les forces et les couples dus aux actions extérieures.

En admettant la proportionnalité entre les efforts et les déformations, on obtient 9 équations linéaires à 9 variables, soit 81 coefficients. La Thermodynamique permet de réduire ces coefficients à 45, sans qu'il soit possible d'aller plus loin. L'application d'hypothèses très générales sur les actions moléculaires ramène ce nombre à 36 seulement qui se réduisent ensuite différemment suivant la symétrie du milieu cristallin.

Cette théorie me semble surtout intéressante parce qu'elle attire l'attention sur un fait, la rotation des molécules, qui doit jouer, selon toute vraisemblance, un rôle important non seulement dans les phénomènes élastiques, mais aussi dans les phénomènes *piézo-optiques* les accompagnant. L'étude de ces derniers, qui semblerait devoir être d'un si grand intérêt pour la physique moléculaire, est d'ailleurs à peine ébauchée à l'heure actuelle.

Je me suis borné jusqu'ici à parler du point de vue théorique de M. Voigt. Certainement, par son importance et son originalité, c'est lui qui retient le plus longtemps l'attention du lecteur. Pourtant il ne constitue pas à lui seul l'Ouvrage tout entier. Il n'en est, si j'ose ainsi m'exprimer, que la charpente solide. L'auteur a tenu à compléter l'édifice par une description aussi complète que possible des recherches expérimentales faites dans les différents domaines de la physique cristalline, recherches qui malheureusement sur bien des points sont encore fort peu avancées.

M. Voigt et ses élèves ont apporté d'importantes contributions à l'étude de l'élasticité et de la piézoélectricité (celle-ci déjà examinée avec soin par Curie). Un exposé très complet des méthodes expérimentales employées et des résultats acquis est fait dans les Chapitres VII et VIII. Le lecteur y trouvera, en particulier, une solution rigoureuse et complète du problème si important de la flexion d'un barreau prismatique cristallisé de section quelconque, une théorie rigoureuse aussi de la torsion d'un barreau de section elliptique, une étude approximative, mais suffisante au point de vue expérimental, de la torsion d'un

barreau de section rectangulaire. Deux paragraphes sont consacrés à la question si difficile de la déformation et de la vibration des plaques, avec un exposé fort intéressant des expériences de Savart sur des plaques taillées dans un cristal de quartz.

La détermination complète du Tableau des modules d'élasticité ou de piézoélectricité a été faite par M. Voigt ou ses élèves sur un nombre assez considérable de cristaux cubiques, rhomboédriques, orthorhombiques. Cette détermination a été l'occasion d'intéressantes vérifications de la théorie.

Toute la partie expérimentale qui tient une grande place dans l'Ouvrage est accompagnée d'une bibliographie soignée qui permettra au lecteur de remonter, s'il le désire, aux sources mêmes.

Je terminerai cette analyse en émettant le vœu qu'un grand nombre de physiciens consentent à faire l'effort, assez notable en vérité, qu'exige la lecture de cette Œuvre considérable, aboutissement d'une longue carrière de près de 40 ans, fruit d'un labeur incessant dans un domaine que son auteur a cultivé avec autant de succès que d'enthousiasme. Puisse cette lecture amener quelques adeptes à la Cristallographie. CH. MAUGUIN.

VERGNE (H.). — THÈSE PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS, POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES, soutenue le 27 mai 1909 : *Contribution à la théorie des ondes liquides*, 1 vol. in-4°, IV-80 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Le problème de la propagation des ondes infiniment petites que produit à la surface d'un liquide indéfini une perturbation locale, telle que l'impulsion d'un coup de vent ou l'émersion d'un corps solide, a fait l'objet d'importants Mémoires de Cauchy (1), de Poisson (2) et de M. Boussinesq (3).

La solution du problème dépend de la détermination d'un

---

(1) *Mémoires des Savants étrangers à l'Académie des Sciences*, t. I. et *Œuvres complètes de Cauchy*, t. I (série 1).

(2) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. I.

(3) *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, p. 578 à 651.

potentiel des vitesses, dont la dérivée par rapport au temps représente à chaque instant la dénivellation. Cauchy et Poisson, au moyen d'une longue analyse, donnent ce potentiel sous la forme d'une certaine intégrale définie. Leurs résultats et leurs méthodes diffèrent peu. Tous deux ont distingué le cas de *deux* dimensions, où le mouvement s'effectue parallèlement à un plan vertical fixe, et le cas de *trois* dimensions où le mouvement se fait dans tous les sens. Dans les deux cas, ils ont étudié la dénivellation à la surface du liquide; et pour cela ils ont développé l'expression de cette dénivellation superficielle en une série procédant suivant les puissances du temps. Le résultat le plus remarquable est qu'aux distances notables du centre d'ébranlement, le mouvement, tout en s'éteignant lorsque croît la distance, a une propagation uniformément accélérée.

M. Boussinesq a trouvé les mêmes résultats, en employant une méthode d'intégration entièrement différente et beaucoup plus rapide, qui lui a permis notamment d'étudier aussi les oscillations du liquide au voisinage du centre d'ébranlement.

Grâce à un élégant artifice de calcul, M. Rousier [1] a pu, au moins dans le cas de deux dimensions, développer en série suivant les puissances du temps l'intégrale de M. Boussinesq, et cela non seulement à la surface, mais à une profondeur quelconque; ce qui lui a permis de reconnaître aisément que la propagation du mouvement est uniformément accélérée, suivant une droite d'inclinaison quelconque partant du centre d'ébranlement.

M. Vergne a fait faire des progrès importants à ces questions. Dans la première Partie de sa Thèse, il a identifié l'intégrale de M. Boussinesq avec celle de Poisson, aussi bien dans le cas de deux que de trois dimensions; dans ces deux cas, il a donné le développement en série du potentiel et de la dénivellation à une profondeur quelconque, ce qui permet d'étudier la propagation du mouvement qui est uniformément accéléré dans toute direction. La série obtenue coïncide avec celle de M. Rousier dans le cas de deux dimensions; elle en est une généralisation dans le cas de trois dimensions.

Mais la question n'est pas épuisée. Au lieu de chercher d'abord

---

(1) G. Rousier, *Ondes par émersion* (Thèse de doctorat, Gauthier-Villars, 1908).

le potentiel des vitesses sous la forme d'une intégrale définie, et de développer cette intégrale suivant les puissances du temps, n'est-il pas plus simple de rechercher directement les coefficients de ce développement? M. Vergne a montré que leur détermination de proche en proche peut être obtenue facilement; il a ainsi ramené à un calcul de quelques lignes l'intégration du problème des ondes d'émersion et d'impulsion, question qui, par les méthodes précédentes, exigeait une analyse assez longue (1).

Une seconde Partie de la Thèse est consacrée à l'étude du mouvement d'un liquide pesant, renfermé dans un vase de forme quelconque. Ici la question est beaucoup moins simple; aussi est-elle beaucoup moins avancée. On cherche d'abord des solutions particulières, fonctions sinusoïdales du temps, et correspondant aux diverses oscillations *simples* du liquide. On démontre l'existence d'une infinité de telles solutions; puis, avec elles, on tâche de former une série qui représente le potentiel des vitesses. Toutefois la convergence de cette série n'a pas pu, jusqu'ici, être établie : c'est là une lacune qui est malheureusement trop fréquente dans les problèmes de Physique mathématique, et que viendront bientôt combler, il faut l'espérer, les nombreux travaux actuels sur les développements en séries.

Enfin un autre point appelle de nouvelles recherches. La discontinuité, qui existe à l'intersection de la surface libre du liquide et des parois du vase, amène, pour la solution, des singularités dont la nature reste à étudier et qui ont été nettement signalées par M. Hadamard (2). Il ne serait sans doute pas sans intérêt d'aborder cette question difficile.

P. Appell.

---

(1) *Voir* à ce sujet un Mémoire de M. J. Boussinesq : *Sur une importante simplification à la Théorie des Ondes* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1910).

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 21 mars 1910.

HELBRONNER (P.). — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences mathématiques, soutenue le 16 février 1912 : *Résumé des Opérations exécutées jusqu'à la fin de* 1911 *pour la Description géométrique des Alpes françaises.* 1 vol. in-4°, 173 pages et une Carte. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Cette Thèse est un aperçu d'ensemble sur la belle œuvre que M. Helbronner a entreprise, il y a dix ans, et dont les opérations sur le terrain paraissent avoir rempli actuellement plus de la moitié du programme qu'il s'est tracé dès le premier jour. Elle est en grande partie le résumé du Tome Ier de la *Description géométrique détaillée des Alpes françaises* (1), qui constitue le premier et vraiment remarquable élément d'une publication de longue haleine, devant comprendre une dizaine de volumes analogues.

L'œuvre poursuivie sans interruption depuis 1902 par M. Helbronner a été exposée à différentes reprises, notamment par M. le général Bassot, dans un Rapport présenté à l'Académie des Sciences dans sa séance du 7 décembre 1908. Elle est caractérisée, en premier lieu, par un certain nombre de particularités se rapportant à l'organisation générale, technique et matérielle, d'un programme très vaste et très serré, mené par une volonté indépendante de toute administration publique et, en second lieu, aussi par des particularités d'ordre mathématique, soit à propos des observations sur le terrain, soit à propos des opérations consécutives de mise en œuvre de ces observations. En ce qui concerne les premières, dont le résumé trouvera moins sa place dans ce *Bulletin* que celui des secondes, il suffira de se reporter aux termes du Rapport de M. le général Bassot, ou à ceux dont se servait M. de Margerie lorsqu'il présenta, à la Société de Géographie de Paris, le premier Volume de cette description de la plus belle région du territoire national et lorsqu'il faisait, à cette occasion, ressortir l'originalité de ce travail, offrant, pour la première fois peut-être, l'exemple de la réalisation d'une de ces trames géodésiques (s'étendant sur plusieurs degrés terrestres et par cela même

(1) *Description géometrique detaillee des Alpes françaises*, t. I : Chaine méridienne de Savoie, 1 vol. de 508 pages avec 5 planches et 18 panoramas, dont 14 de $0^m,33 \times 2^m,60$ et 4 de $0^m,33 \times 1^m,30$; 1 vol. in-4°. Paris, Gauthier-Villars, 1910

semblant devoir être réservée aux seuls groupements officiels), menée dans le cas présent par une personnalité isolée, opérant sans appui matériel ou moral de l'État, sans aide et sans collaborateurs, soutenue uniquement par sa passion scientifique et patriotique. Il y a lieu de rappeler que l'Auteur dans ses neuf premières campagnes, représentant 23 mois passés sur le terrain, a déjà occupé 775 stations géodésiques dont 121 au-dessus de 3000^{m}, qu'il a couvert près de 10000^{km^2} de ses réseaux géodésiques, qu'il a déterminé déjà environ 4000 points trigonométriques et enregistré plus de 7000 clichés photographiques formant les tours d'horizon d'un grand nombre de sommets élevés des Alpes françaises.

Par contre, au point de vue des particularités d'ordre plus spécialement mathématique, il est intéressant de mentionner dans ce *Bulletin*, qu'au cours des opérations de haute précision que l'Auteur a poursuivies en 1907 et en 1908 pour l'établissement de sa Chaîne méridienne de Savoie, il a appliqué à ses observations les méthodes de compensation par figures polygonales complexes. Ainsi en partant, pour chacune des valeurs des directions azimutales, de la moyenne obtenue sur quatre-vingts lectures du cercle horizontal du théodolite réitérateur de Brunner, il a fait entrer ensuite en jeu simultanément dans ses figures de compensation un nombre d'angles très élevé, qui a permis de tirer le parti maximum des chiffres enregistrés sur le terrain. Les conséquences de ces précautions opératoires et de ces méthodes de calcul se sont traduites dans les coïncidences des longueurs de côtés communs à cette chaîne de précision et aux triangulations fondamentales italiennes et suisses. C'est ainsi que, par exemple, le côté *contrefort nord de l'Aiguille Rouge-Tête nord des Fours*, commun avec le réseau primordial italien, s'est trouvé différer de celui-ci de 30^{cm} sur une longueur de 22^{km}, que le côté la *Dôle-mont Tendre*, commun avec la triangulation suisse a présenté une différence de 13^{cm} sur une longueur de 25^{km}, qu'enfin le côté la *Dôle-Colloney*, également commun avec le premier ordre suisse, a présenté un écart de 9^{cm} sur 68^{km}.

Au sujet de la conduite de ces calculs, il est intéressant de signaler l'emploi, fréquemment utilisé par l'Auteur, de ce qu'il a appelé le *balancement des directions*, qui permet de faire con

courir, à la mise en œuvre de chaque nouvelle direction azimutale, l'ensemble de toutes les directions azimutales déjà antérieurement compensées autour du point de station considéré.

Enfin, certains détails de la résolution des systèmes d'équations linéaires auxquels aboutissent les équations de condition de compensation des figures géodésiques ont donné lieu à quelques remarques ou méthodes (t. I, p. 203) que nous reproduisons.

« Devant le grand nombre d'équations de chaque ensemble, j'ai abandonné la formation des coefficients telle que l'indique Gauss, pour adopter la méthode de résolution ordinaire, c'est-à-dire par éliminations successives. J'ai basé cette résolution sur la remarque suivante : dans un système de n équations symétriques par rapport à la diagonale, on reforme un second système de $n-1$ équations symétriques par rapport à la diagonale, en tirant la valeur d'une inconnue de l'équation qui la contient au passage de la diagonale de symétrie, c'est-à-dire en d'autres termes, si les équations sont rangées dans leur ordre naturel, en tirant l'inconnue x_p de la $p^{\text{ième}}$ équation.

» Au préalable, j'ai cherché à diminuer la longueur des calculs en tirant des équations les plus incomplètes, les inconnues d'ordre correspondant. Je suis arrivé ainsi à obtenir un système d'équations en nombre notablement inférieur à celui du début.

» Ces équations forment alors un ensemble naturellement symétrique, par la précaution indiquée ci-dessus, mais elles sont en général complètes. Leur résolution se poursuit par éliminations successives et aboutit à un système d'équations symétriques dont le nombre diminue chaque fois d'une unité....

» Tous les calculs ont été faits à la machine à calculer qui toutefois ne défend pas des fautes de signes ou de virgules, dont les conséquences se manifestent lors de l'établissement du Tableau de vérification de fermeture des équations.... Pour retrouver une faute de cette nature, j'ai opéré en recherchant une fourchette d'encadrement basée sur la valeur d'une même inconnue après chacune des éliminations successives. Tant que cette valeur restait semblable à celle obtenue en dernier lieu, je me trouvais au delà de la faute; lorsqu'elle changeait, j'étais prévenu de l'encadrement de celle-ci. Il y avait alors à vérifier toutes les égalités du Tableau d'élimination intercalé entre ces deux valeurs, et encore une présomption

très forte se déclarait-elle ici, pour localiser la faute dans l'égalité exprimant l'inconnue du même rang que l'équation primitive dont la fermeture était la plus défectueuse. Comme, d'autre part, la symétrie des termes avait été constamment contrôlée, la faute gisait forcément ou dans le terme constant ou dans le coefficient du terme situé dans la diagonale.... »

Er. L.

LEBON (Ernest). — Savants du Jour : Gabriel Lippmann. *Biographie. Bibliographie analytique des Écrits.* 1 vol. in-8 jésus, VIII-70 pages, papier de Hollande, portrait en héliogravure. Paris, Gauthier-Villars; 15 juillet 1911.

En présentant à l'Académie des Sciences, dans la séance du 17 juillet 1911, la *Notice sur Gabriel Lippmann*, dont M. Ernest Lebon vient d'enrichir sa Collection bien connue des *Savants du Jour* (1), M. Gaston Darboux, secrétaire perpétuel, s'est exprimé en ces termes :

« Cette Notice nouvelle est composée avec le même soin, avec le même souci de l'exactitude et selon la même méthode que les Notices précédemment parues. Nous y signalerons plus particulièrement les détails si intéressants et si curieux que donne M. E. Lebon sur la jeunesse et les premières études de notre illustre Confrère, sur les séjours qu'il a faits dans les Universités étrangères, sur l'accueil qu'il y reçut des savants les plus éminents : Kirchhoff et Helmholtz en particulier. Je me souviens encore que, lors d'un passage à Paris, Helmholtz prit plaisir à nous signaler celui qu'il avait vu à l'œuvre dans son laboratoire comme un de ceux qui devaient sans retard être pourvus d'un enseignement magistral à la Sorbonne.

» M. Ernest Lebon ne néglige pas de nous faire connaître la genèse des plus belles découvertes de Gabriel Lippmann, il nous donne une longue liste des travaux qu'il a inspirés et qui ont été accomplis dans son laboratoire de la Sorbonne.

(1) Les quatre premières Notices sont consacrées à MM. Henri Poincaré, Gaston Darboux, Émile Picard, Paul Appell.

» Nous n'hésitons pas à prédire à cette nouvelle Notice le succès et la faveur qui ont accueilli les précédentes. »

Les titres des Écrits sont souvent suivis de sobres analyses de ces Écrits.

L'Auteur a signalé tous les Écrits originaux et les principales analyses dont ils ont été le sujet. Ce n'est qu'après les avoir lus ou parcourus qu'il a donné les références et les renseignements qui s'y rapportent. On rendrait service à la Science en lui signalant les omissions.

TABLE DES MATIÈRES.

Section I. *Biographie*. Notice sur M. Gabriel Lippmann, par E. Lebon. — Grades. Fonctions. Titres honorifiques. Prix. Décorations. — Section II. *Physique mathématique*. Ouvrages. Mémoires. Notes : Capillarité. Chaleur. Électricité. Magnétisme. Phénomènes électrocapillaires. Mesures électriques. Mesures absolues. Détermination de l'ohm. Mouvements sismiques. Sismographes. Conférences. Article. — Section III. *Physique expérimentale*. Discours prononcé par M. K. B. Hasselberg en décernant le Prix Nobel de Physique à M. G. Lippmann. Extrait des Conférences sur la Photographie des couleurs, faites par M. Émile d'Huart. Mémoires. Notes : Pendule. Chaleur. Optique. Photographie des couleurs par la méthode interférentielle. Électricité. Magnétisme. Phénomènes électrocapillaires. Mesures électriques. Mouvements sismiques. Sismographes. Conférences. Article. — Section IV. *Astronomie physique*. Mémoires. Notes. Discours nécrologique. Discours. — Section V. *Publications diverses*. Notes : Mathématiques. Physique. Discours. Conférence. Rapports. Articles. Analyses.

STOFFAËS (L'abbé E.). — COURS DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES, à l'usage des Candidats à la Licence ès sciences physiques. 3e édition, entièrement refondue. Deux Tomes in-8. T. I : *Compléments d'algèbre élémentaire. Dérivées. Équations. Géométrie analytique. Différentielles et intégrales*. Vol. de x-398 p. avec 114 fig. T. II : *Courbes et surfaces. Équations différentielles*. Vol. de v-362 p. avec 175 fig. Paris, Gauthier-Villars; 1911.

Les deux premières éditions de cet excellent Ouvrage ont été analysées dans ce *Bulletin* par le regretté Jules Tannery (1892,

p. 145; 1904, p. 345). Mais elles contenaient le développement de beaucoup moins de questions que la nouvelle édition. Parmi les Chapitres nouveaux, il importe de citer ceux qui sont consacrés aux généralités sur les équations, aux notions sur les fonctions hyperboliques, aux séries entières, à la courbure des surfaces. C'est pour répondre aux exigences des programmes du Certificat de Mathématiques générales et des Cours préparatoires aux Instituts spéciaux de Mécanique et d'Électricité que M. l'abbé Stoffaës, encouragé par le succès des éditions de 1891 et de 1903, vient de publier une troisième édition, entièrement refondue, dont la caractéristique est la clarté. Er. L.

MÉLANGES.

SUR LES RÉSEAUX CONJUGUÉS A INVARIANTS ÉGAUX D'UNE QUADRIQUE;

PAR G. TZITZÉICA.

Je me suis posé le problème d'étudier les réseaux conjugués à invariants égaux situés sur une surface du second ordre. C'est un cas particulier du problème général relatif aux équations de Laplace, qui admettent un certain nombre de solutions liées par une équation quadratique et homogène à coefficients constants. C'est encore une étude géométrique des propriétés et des transformations de l'équation harmonique, étudiée analytiquement par M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. II, p. 192 et suiv.).

1. Je suppose, pour la simplicité des calculs, le tétraèdre de référence choisi de manière que l'équation de la quadrique Q, sur laquelle se trouve le réseau, soit

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0.$$

Si les courbes du réseau sont $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$, on peut supposer que, par la multiplication avec un même facteur, les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point de la surface vérifient une équation de Laplace à invariants égaux sous la forme réduite

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = h\theta. \tag{1}$$

Remarquons maintenant qu'on a, en vertu de l'équation

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \Sigma x_i^2 = 0,$$

et à l'aide de (1), les relations suivantes :

$$\sum x_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, \qquad \sum x_i \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0. \tag{2}$$

De plus, à l'aide de (1) et (2), on tire

$$\frac{\partial}{\partial v} \sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u} \sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2 = 0.$$

Comme on ne peut avoir aucune des relations

$$\sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 = 0, \qquad \sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2 = 0$$

vérifiée identiquement, on peut choisir les variables u et v, ce qui ne change pas la forme de (1), de manière qu'on ait

$$\sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 = 1, \qquad \sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2 = -1. \tag{3}$$

2. Cela étant posé, je remarque qu'on peut déterminer les fonctions m, a, b, k de manière que x_1, x_2, x_3, x_4 vérifient l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - m \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = a \frac{\partial \theta}{\partial u} + b \frac{\partial \theta}{\partial v} + k\theta. \tag{4}$$

Dans cette équation, le coefficient de $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}$ ne pouvait être nul, parce les courbes $u = \text{const.}$ ne sont pas des lignes asymptotiques, c'est-à-dire des génératrices de Q.

Nous allons maintenant simplifier l'équation (4). A cet effet,

nous tirons de (2) et (3) à l'aide de (1) les relations suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} \sum x_i \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = -1, & \sum x_i \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} = 1, & \sum \dfrac{\partial x_i}{\partial u} \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = 0, \\ \sum \dfrac{\partial x_i}{\partial v} \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} = 0, & \sum \dfrac{\partial x_i}{\partial v} \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = 0, & \sum \dfrac{\partial x_i}{\partial u} \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} = 0, \end{cases}$$

puis, nous prenons les relations

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} + m \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} = a \frac{\partial x_i}{\partial u} + b \frac{\partial x_i}{\partial v} - k x_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

qui expriment que les x_i sont des solutions de (4) et, en multipliant les deux membres par x_i, nous faisons la somme membre à membre ; nous obtenons ainsi $m = 1$. En multipliant ensuite par $\frac{\partial x_i}{\partial u}$ et finalement par $\frac{\partial x_i}{\partial v}$, on obtient $a = 0$ et $b = 0$.

On a donc le résultat suivant : *les coordonnées x_i d'un point x, qui décrit un réseau conjugué (u, v) à invariants égaux de la quadrique* Q, *peuvent être considérées comme solutions communes du système formé par l'équation* (1) *et l'équation*

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = k\theta.$$

Il est évident d'ailleurs que ce système définit, en même temps que le réseau (x), tous les réseaux qu'on en déduit par des transformations projectives.

3. Nous voulons étudier à présent les conditions d'intégrabilité des équations (1) et (6). A l'aide de ces équations, on peut calculer toutes les dérivées du troisième ordre de θ. En écrivant les conditions d'intégrabilité pour ces dérivées, en tenant compte de (1) et (6) et en remarquant que les x_i ne peuvent pas vérifier une équation du premier ordre, on trouve aisément

$$\frac{\partial k}{\partial u} = 2 \frac{\partial h}{\partial v}, \qquad \frac{\partial k}{\partial v} = 2 \frac{\partial h}{\partial u};$$

on peut donc poser, comme on le voit facilement,

$$(7)\qquad \begin{cases} h = \varphi(u - v) - \psi(u - v), \\ k = 2[\varphi(u - v) - \psi(u - v)]. \end{cases}$$

les fonctions φ et ψ n'étant connues qu'à une même constante additive près.

Il résulte de là que l'équation de Laplace (1) est une *équation harmonique*.

Il résulte encore de l'équation (6) que le réseau (u, v) de la quadrique est isotherme conjugué. En effet, l'équation différentielle des lignes asymptotiques est dans ce cas

$$du^2 - dv^2 = 0.$$

Réciproquement, tout réseau isotherme conjugué d'une quadrique est à invariants égaux, comme on le voit aisément en transformant la quadrique par une transformation linéaire en une sphère, où la propriété est évidente.

4. Considérons maintenant une congruence dont les développables découpent sur la quadrique le réseau (u, v). Soient y et z les foyers du rayon qui passe par x. Prenons le conjugué harmonique x' de x par rapport au segment yz. Le point x' décrit, d'après un théorème bien connu de M. Kœnigs (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 62), un réseau conjugué à invariants égaux. Nous nous proposons le problème de déterminer la congruence de manière que le réseau (x') décrit par x' soit situé, comme (x), sur la quadrique Q. On aura déduit ainsi d'un réseau à invariants égaux (x) de la quadrique d'autres réseaux (x') toujours à invariants égaux.

Tout d'abord, le foyer y est défini par les équations

$$(8) \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = x\frac{\partial \mu}{\partial u}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \mu\frac{\partial x}{\partial v},$$

y_i correspondant à x_i (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 224), μ étant une solution de (1). La solution μ étant choisie, les coordonnées y_i ne sont définies qu'à des constantes additives près.

Le foyer z est déterminé par les formules

$$z_i = y_i - \mu x_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

On a, en effet,

$$\frac{\partial z_i}{\partial v} = -x_i\frac{\partial \mu}{\partial v}.$$

Comme on a

$$\mu x_i = y_i - z_i,$$

le conjugué harmonique x' de x par rapport à yz est donné par

$$\lambda x'_i = y_i - z_i = 2y_i - \mu x_i.$$

Pour que (x') soit situé sur Q, on doit avoir $\Sigma x'^2_i = 0$, ou, en vertu de l'égalité précédente,

$$\Sigma y_i^2 - \mu \Sigma x_i y_i = 0. \tag{9}$$

5. Il faudra donc choisir la solution μ de (1) de manière que les solutions y_i de (8), correspondant aux solutions données x_i, vérifient la relation (9).

Pour résoudre ce problème, nous posons d'abord

$$X = \Sigma x_i y_i, \qquad 2Y = \Sigma y_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Les fonctions X et Y jouissent des propriétés suivantes. On a, en vertu du système (8) et des relations (2) et (3),

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \Sigma y_i \frac{\partial x_i}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = \Sigma y_i \frac{\partial x_i}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \Sigma y_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = \Sigma y_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v}, \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \Sigma y_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} - \mu.$$

Il en résulte que X vérifie le système

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = hX, \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = kX - \mu. \tag{10}$$

On a ensuite

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial \mu}{\partial u} X, \qquad \frac{\partial Y}{\partial v} = \mu \frac{\partial X}{\partial v}, \tag{11}$$

ce qui prouve que X et Y sont des solutions correspondantes du système (8) [1].

Revenons maintenant à l'étude de la relation (9). Avec les notations introduites, elle s'écrit

$$2Y - \mu X = 0. \tag{12}$$

---

[1] *Voir* J. Drach, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1897.

Si l'on tire Y de cette égalité et qu'on introduise la valeur obtenue dans (11), on obtient

$$X = \frac{\mu}{m}, \qquad m = \text{const.}$$

Si l'on remplace cette valeur de X dans le système (10), on trouve que μ est une solution du système suivant :

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 \mu}{\partial u\, \partial v} = h\mu, \qquad \frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} = (h - m)\mu.$$

On a donc le résultat suivant : *Pour que le réseau* (x') *soit situé sur la quadrique* Q, *il faut que* μ *soit une solution du système* (13). Nous allons voir que cette condition nécessaire n'est pas en général suffisante.

6. Le système (13) est évidemment intégrable. Il admet quatre solutions linéairement indépendantes que nous notons par μ', μ'', μ''', μ^{IV}. La solution générale du système est alors

$$\mu = a'\mu' + a''\mu'' + a'''\mu''' + a^{\text{IV}}\mu^{\text{IV}},$$

les a étant des constantes. Il s'agit de savoir si toutes ces solutions répondent à notre question.

A cet effet, étudions d'abord la solution μ'. Si nous introduisons cette fonction dans le système (8), aux fonctions x_i il correspondra des fonctions y'_i définies à des constantes additives près. La fonction

$$X' = \Sigma x_i y'_i$$

formée à l'aide de ces fonctions y_i, vérifie le système

$$\frac{\partial^2 X'}{\partial u\, \partial v} = hX', \qquad \frac{\partial^2 X'}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 X'}{\partial v^2} = hX' - \mu',$$

et comme μ' vérifie le système (13), il résulte que $X' - \frac{\mu'}{m}$ est une solution des équations (1) et (6), c'est donc une fonction linéaire à coefficients constants des x_i. On peut profiter des constantes additives des y'_i pour poser

$$X' = \frac{\mu'}{m}$$

Si nous introduisons cette expression de X' dans le système (11)

vérifié par $2Y' = \Sigma y_i'^2$, on trouve aisément

$$2Y' - \mu' X' = c',$$

c' étant une constante en général différente de zéro. Par conséquent, *en général,* la solution μ' ne répond pas à la question : on aura des résultats analogues pour μ'', μ''', μ^{IV}.

7. Prenons maintenant la solution générale du système (13) :

$$\mu = a'\mu' + a''\mu'' + a'''\mu''' + a^{\text{IV}}\mu^{\text{IV}}.$$

Le système (8) admettra les solutions

$$y_i = a'y_i' + a''y_i'' + a'''y_i''' + a^{\text{IV}}y_i^{\text{IV}}$$

correspondantes à x_i. On aura alors

$$X = \Sigma x_i y_i = a'X' + a''X'' + a'''X''' + a^{\text{IV}}X^{\text{IV}} = \frac{\mu}{m}$$

et finalement

$$2Y - \mu X = c,$$

c étant une constante dépendant des constantes a', a'', a''' et a^{IV}, et dont elle dépend *effectivement.* En effet, si l'on prend $a'' = a''' = a^{\text{IV}} = 0$, on trouve

$$c = a'^2 c'.$$

On peut donc choisir les constantes a de manière qu'on ait $c = 0$. En laissant un facteur constant de côté qui n'est pas essentiel pour la solution, on peut dire, par conséquent, qu'il y a ∞^2 solutions μ qui répondent à la question. Comme, d'autre part, on a dans le système (13) la constante arbitraire m, on voit que notre problème admet en tout ∞^3 solutions : il y a ∞^3 congruences dont les développables découpent sur la quadrique Q le réseau (x) et telles que le conjugué harmonique x' de x par rapport aux foyers y et z du rayon xyz soit aussi sur la quadrique.

8. Nous avons résolu le problème fondamental qui permet de trouver des réseaux (x') à invariants égaux en partant d'un réseau (x) de même nature. Nous voulons montrer que du couple de réseaux (x) et (x') nous pouvons en déduire d'autres.

Considérons la droite $\xi\xi'$, polaire conjuguée de xx' par rapport à Q, qui coupe cette quadrique en ξ et ξ'.

Il est clair que la droite $\xi\xi'$ décrit une congruence $(\xi\xi')$ dont les développables correspondent à celles de (xx'), et, d'après une proposition connue, les foyers η et ζ de $\xi\xi'$ se trouvent aux points communs des tangentes aux courbes $v =$ const. et $u =$ const. décrites par les points x et x'.

Cela étant, supposons $v =$ const. et cherchons la tangente à la courbe décrite par le point ξ. Elle se trouve d'abord dans le plan tangent à Q en ξ, c'est-à-dire dans le plan $\xi xx'$. Elle se trouve aussi dans le plan focal de $\xi\xi'$ tangent à la surface décrite par η, ou osculateur à la courbe $v =$ const. décrite par ζ. Or, ce plan osculateur est le plan polaire de y par rapport à Q, il passe donc par le point z, conjugué harmonique de y par rapport à xx'. Ce plan est par conséquent $zx\zeta$. Les deux plans $\xi xx'$ et $z\xi\zeta$ se coupant suivant ξz, cette droite est la tangente cherchée.

On démontre de la même manière que ξy est la tangente à la courbe $u =$ const. décrite par ξ. Comme les deux droites ξx et $\xi x'$ sont des génératrices rectilignes de Q, les deux tangentes ξy et ξz sont conjuguées et le point ξ décrit un réseau (u, v) conjugué sur Q. Il en est de même de ξ'. Or ξ et ξ' sont conjuguées harmoniques par rapport au segment focal $\eta\zeta$, les réseaux (ξ) et (ξ') tracés sur la quadrique sont par conséquent à invariants égaux. On a donc le résultat suivant : *Chaque couple de réseaux à invariants égaux (x) et (x') situés sur la quadrique* Q *et liés par la transformation définie au paragraphe* 7 *donne encore un couple de réseaux à invariants égaux (ξ) et (ξ') de* Q *et liés par la même transformation.*

9. Le résultat géométrique précédent a une traduction analytique intéressante. Il montre qu'on peut passer de (x) à (x') par deux transformations simples, une qui mène de (x) à (ξ) et l'autre de (ξ) à (x'), ou bien, une qui mène de (x) à (ξ') et l'autre de (ξ') à (x').

Nous allons donner les formules qui expriment ces transformations. A cet effet, nous remarquerons que, ξ étant situé dans le plan tangent en x à Q, on a

$$\xi_i = \mathrm{A}x_i + \mathrm{B}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \mathrm{C}\frac{\partial x_i}{\partial v} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

les fonctions A, B, C étant choisies de manière que les ξ_i vérifient un système pareil à celui formé par les équations (1) et (6). Remarquons encore que la droite $x\xi$ étant une génératrice de Q, et que ces droites étant définies par $du^2 - dv^2 = 0$, on a nécessairement $B \pm C = 0$. Supposons que pour ξ on a $B - C = 0$, pour ξ' on aura $B + C = 0$. On aurait obtenu le même résultat en écrivant qu'on a $\Sigma \xi_i^2 = 0$ et en tenant compte de (3).

Écrivons d'abord que ξ_i vérifie une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} = h_1 \omega,$$

on trouve

$$\left[A h + \frac{\partial^2 A}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial B h}{\partial u} + \frac{\partial C h}{\partial v} \right] x_i + \left(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial^2 B}{\partial u \, \partial v} + B h \right) \frac{\partial x_i}{\partial u}$$
$$+ \left(\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial^2 C}{\partial u \, \partial v} + C h \right) \frac{\partial x_i}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial v} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} + \frac{\partial C}{\partial u} \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}$$
$$= h_1 \left(A x_i + B \frac{\partial x_i}{\partial u} - C \frac{\partial x_i}{\partial v} \right)$$

et cette équation doit être vérifiée, ou identiquement, ou en vertu de l'équation (6). On voit aisément que le second cas se ramène au premier.

On a d'abord $B = C =$ const. et l'on pourra prendre $B = C = 1$. Les autres relations montrent que $A = f(u + v)$, et que cette fonction de $u + v$ est déterminée par

$$f'' - ff' - 2\varphi' = 0.$$

On a donc

$$\xi_i = x_i f(u + v) + \frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\partial x_i}{\partial v} \tag{14}$$

et l'on vérifie qu'on a

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial v^2} = 2(f' + \varphi + \psi) \xi_i,$$

ce qui prouve que les ξ_i vérifient un système analogue à (1) et (7), résultat qu'on aurait pu prévoir.

Considérons maintenant le passage de (x) à (ξ'). On aura les formules

$$\xi'_i = x_i f_1(u - v) + \frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial x_i}{\partial v}, \tag{15}$$

analogues à (14), où f_1 vérifie la relation

$$f_1'' + 2\psi' = f_1 f_1'$$

ou

$$f_1' - 2\psi = \frac{1}{2} f_1^2 - c_1.$$

Les transformations (14) et (15) ont été donnés par M. Darboux par une voie purement analytique, très élégante. Elles se présentent ici naturellement comme conséquences des considérations géométriques précédentes.

Pour passer de ξ à x', il faut suivre la génératrice $\xi x'$ de système différent que $x\xi$. On doit donc appliquer à ξ_i la transformation (15). On aura ainsi

$$\begin{aligned} x_i' &= f_1 \xi_i + \frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \\ &= f f_1 x_i + (f + f_1) \frac{\partial x_i}{\partial u} - (f_1 - f) \frac{\partial x_i}{\partial v} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

On aurait obtenu le même résultat si l'on avait appliqué à ξ_i la transformation (14).

J'arrête ici ces développements, bien qu'il y aurait encore bien d'autres propriétés qu'on pourrait étudier. Je ne fais que mentionner ici un théorème de permutabilité qui permet de déduire d'autres réseaux à invariants égaux d'une quadrique.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Duhem (P.). — *Traité d'Énergétique ou de Thermodynamique générale.* T. II : Dynamique générale. Conductibilité de la chaleur. Stabilité de l'équilibre. In-8, 508 p. Paris, Gauthier-Villars. 18 fr.

Hughes (Hector-Ja.) and Safford (Arth.-Trinnan). — *A treatise on hydraulics.* xiv-505 p., tables diagr. New-York, Macmillan. 3 dollars 50.

Jeans (J.-H.). — *The mathematical theory of electricity and magnetism.* 2e édit., 592 p. Cambridge, Univ. Press. 15 s.

ANDING (E.). — *Sechsstellige Tafeln der Bessel'schen Funktionen imaginären Arguments.* In-8, IV-72 p. Leipzig, W. Engelmann. 7 m.; relié : 8 m. 80.

ANDOYER (H.). — *Nouvelles Tables trigonométriques fondamentales.* In-8, XXX-604 p. Paris, A. Hermann et fils. 30 fr.; relié, 40 fr.

COFFIN (J.-G.). — *Vector analysis : an introduction to vector-methods and their various applications to physics and mathematics.* 2e édit. In-8. London, Chapman et H. 10 s. 6 d.

CREFCŒUR (Alb.-J.-M.). — *Cours d'Analyse infinitésimale.* 3e Partie. *Calcul des probabilités ou théorie analytique du hasard.* 2e édit. rev. et augm. In-8. Paris, Ch. Béranger. 7 fr.

GARROD (H.-W.). — *Manili astronomicon.* Liber II. In-8, 266 p. London, Clarendon Press. 10 s. 6 d.

HAGER (Karl). — *Berechnung ebener, rechteckiger Platten mittels trigonometrischer Reihen.* In-8, VII-94 p. avec 20 fig. München, R. Oldenbourg. 7 m. 20.

HALSTED (G.-B.). — *Géométrie rationnelle. Traité élémentaire de la science de l'espace.* Traduction française par *P. Barbarin.* Avec une Préface de *C.-A. Laisant.* In-8, III-301 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr. 50.

KIEPERT (Ludw.). — *Grundriss der Differential- u. Integral-Rechnung.* 2 volumes. Neue Aufl. des gleichnam. Leitfadens v. *Max Stegemann.* T. I : Differential-Rechnung, 12e édit. Gr. in-8, XX-863 p. avec 187 fig.; t. II : Integral-Rechnung, 10e édit. Gr. in-8, XXIII-738 p. avec 153 fig. Hannover, Helwing. Chaque volume : 12 m. 50; relié, chaque volume : 13 m. 50.

MEYER (W.-Frz.). — *Ueber die Theorie benachbarter Geraden u. e. verallgemeinerten Krümmungsbegriff. Eine Ergänzg. zu den Lehrbüchern üb. Differentialgeometrie.* In-8, XVIII-152 p. avec 5 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 8 m.; relié, 9 m

MILNE (John-J.). — *An elementary treatise on cross ratio geometry. With historical note.* In-8 ($7^1/_2$-$4^3/_4$), 312 p. Cambridge. Univ. Press. 6 s.

NIEWENGLOWSKI (B.). — *Cours de Géométrie analytique.* T. II : *Construction des courbes planes. Compléments relatifs aux coniques. Courbes définies par des équations différentielles.* 2e édit. rev. et augm. In-8. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr.

POINCARÉ (H.). — *Calcul des probabilités.* 2e édit. rev. et augm. In-8, VI-336 p. avec 19 fig. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

Vörös (Cyrillo). — *Analitika geometrio absoluta.* 2e vol. La spaco Bolyaia. Gr. in-8, 199 p. avec fig. Budapest, L. Kókai. 9 m. 60.

Chwolson (O.-D.). — *Traité de Physique*, trad. par *Ed. Devaux.* T. I. Vol. I. Nouv. édit. rev. et augm. Mécanique. Méthodes et instruments de mesure. In-8, xviii-517 p., 229 fig. Paris, A. Hermann et fils. 17 fr.

— *Traité de Physique*, trad. par *Ed. Devaux.* T. III, fasc. 3. Propriétés des vapeurs. Equilibre des substances en contact. In-8, vi-264 p., 93 fig. Paris, A. Hermann et fils. 9 fr.

Kaye (G.-W.-C.) and Lady (T.-H.). — *Tables of physical and chemical constants, and some mathematical functions.* In-8 ($9^3/_4$-$6^1/_2$), 162 p. London, Longmans. 4 s. 6 d.

Tissot (C.). — *Manuel élémentaire de Télégraphie sans fil, théorie, installation d'un poste, matériel et réglage.* In-8, fig. Paris, A. Challamel. 5 fr.

Timerding (H.-E.). — *Die kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. (Abhandlungen üb. den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Veranlasst durch die internationale Unterrichtskommission. Hrsg. v. *F. Klein.* III. Bd. 5. Heft.) In-8, iv-45 p. avec 5 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 1 m. 60.

Jahnke (E.). — *Die Mathematik an Hochschulen f. besondere Fachgebiete. (Abhandlungen üb. den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Veranlasst durch die internationale Unterrichtskommission. Hrsg. v. *F. Klein.* IV. Bd. 7. Heft.) In-8, vi-55 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 1 m. 80.

Berichte d. kgl. sächs. Gesellsch. der Wissenschaften. Mathematisch-phys. Kl. 1911, t. VI. Leipzig, Teubner. 3 m. 40.

Ergebnisse der Arbeiten des königl. preussischen aeronautischen Observatoriums bei Lindenberg im J. 1910. VI. Bd. Hrsg. v. *Rich. Assmann.* $33^{cm},5$-$25^{cm},5$, xxvii-255 p. avec 41 diagr. et 2 pl. Braunschweig, F. Vieweg und Sohn. 15 m.

Kelvin (Lord). — *Mathematical and physical papers.* Vol. 6. In-8, 386 p. Cambridge, Univ. Press. 10 s.

Kirschke (Alfr.). — *Die darstellende Geometrie des Maschinentechnikers.* Hilfsbuch f. den Unterricht an techn. Schulen, zum Selbstunterricht u. f. den prakt. Gebrauch. In-8, vi-250 p. avec 385 fig. Leipzig, Seemann et Co. Relié, 8 m.

Massenet (G.). — *Éléments de calcul infinitésimal, application aux sciences maritimes*, préf. du Com. *Guyou.* In-8, 176 fig. Paris, A. Challamel. 10 fr.

KRAUSE (Mart.). — *Theorie der elliptischen Funktionen.* Unter Mitwirkg. v. *Emil Naetsch.* (*Mathematisch-physikalische Schriften, f. Ingenieure u. Studierende.* Hrsg. v. *E. Jahnke.*) In-8, VI-186 p. avec 25 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m. 60.

STOFFAES (Abbé E.). — *Cours de Mathématiques supérieures à l'usage des candidats à la licence ès sciences physiques.* 3e édition, entièrement refondue. T. I : Compléments d'Algèbre élémentaire. Dérivées. Equations Géométrie analytique. Différentielles et intégrales. VI-398 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

HELMHOLTZ (H. v.). — *Vorlesungen üb. theoretische Physik.* Hrsg. v. *Arth. König, Otto Krigar-Menzel, Frz. Richarz, Carl Runge.* I. Bd. 2. Abtlg. Vorlesungen üb. die Dynamik diskreter Massenpunkte. Hrsg. v. Otto Krigar-Menzel. 2. durchgeseh. Aufl. [Anastatischer Neudr.] In-8, XI-380 p. avec 21 fig. Leipzig, J.-A. Barth. 15 m.; relié, 16 m. 60.

POYNTING (J.-H.) and THOMSON (Sir J.-J.). — *A text-book of physics : heat.* 4e édition. In-8 (9-6), 370 p. London, C. Griffin. 15 s.

STARK (J.). — *Prinzipien der Atomdynamik.* 2. Tl. Die elementare Strahlg. In-8, XV-286 p. avec fig. Leipzig, S. Hirzel. 7 m. 80; relié, 9 m.

LAMPA (Ant.). — *Wechselstromversuche.* (*Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. u. mathemat. Monographien*, n° 42.) In-8, X-176 p. avec 54 fig. Braunschweig, F. Vieweg und Sohn. 5 m.; relié, 5 m. 80.

DUHEM (Pierre). — *Die Wandlungen der Mechanik u. der mechanischen Naturerklarung.* Uebers. v. *Philipp Frank*, unter Mitwirkg. v. *Emma Stiasny.* Gr. in-8, VIII-342 p. Leipzig, J.-A. Barth. 6 m. 40; relié, 7 m. 50.

MAYER (Rob.). — *Die Mechanik der Wärme.* 2 Abhandlgn. Hrsg. von *A. v. Oettingen.* (*Ostwald, Klassiker der exakten Wissenschaften*, n° 180.) In-8, 90 p. avec portrait. Leipzig, *W. Engelmann.* Relié, 1 m. 60.

EULER (L.). — *Vollständigere Theorie der Maschinen, die durch Reaktion des Wassers in Bewegung versetzt werden.* Hrsg. v. *Ernst-A. Brauer* u. *M. Winkelmann.* (*Ostwald, Klassiker der exakten Wissenschaften*, n° 182.) In-8, 94 p. avec 1 pl. Leipzig, W. Engelmann. Relié, 1 m. 60.

SOLDNER (Joh.). — *Theorie der Landesvermessung.* (1810.) Hrsg. v. *J. Frischauf.* (*Ostwald, Klassiker der exakten Wissenschaften*, n° 184.) In-8, 76 p. avec 9 fig. Leipzig, W. Engelmann. Relié, 1 m. 60.

SCHWARZSCHILD (K.) u. DZIEWULSKI (W.). — *Bestimmung der Polhöhe von Göttingen u. der Deklinationen v. 375 Zenithsternen m. der hängenden Zenithkamera.* (*Abhandlungen der konigl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.* Mathematisch-physikalische Klasse.

Neue Folge. VIII. Bd.) In-8, III-34 p. avec 9 fig. et 1 pl. Berlin. Weidmann. 3 m.

Grossmann (Ernst). — *Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte.* (*Abhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.* Mathematisch-physikal. Klasse. XXXII. Bd.) In-8, 74 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m. 50.

Ball (W.-W. Rouse). — *Mathematical recreations and essays.* 5e édit. In-8, 508 p. London, Macmillan. 8 s. 6 d.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien, sowie unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen. IV. Bd.: Geometrie. Red. v. *F. Klein* u. *C.-H. Müller.* I II. 2. Heft. In-8, 193-355 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 6 m. 40.
— 2 II. 6. Heft. In-8, 90 p. Leipziz, B.-G. Teubner. 2 m. 50.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Begr. v. *Carl Orthmann.* Hrsg. v. *Emil Lampe.* 40. Bd. Jahrg. 1909. In 3 Heften. 1. Heft. Gr. in-8, VI-528 p. Berlin, G. Reimer. 19 m.

Pearce (Alfr.-John). — *The text-book of astrology.* 2e édit. In-8, 496 p. London, Simpkin. 21 s.

Plemelj (Jos.). — *Potentialtheoretische Untersuchungen.* (*Preisschriften, gekrönt u. hrsg. v. der fürstl Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig.*) In-8, XIX-100 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 6 m.

Flotow (A. v.). — *Einleitung in die Astronomie.* (*Sammlung Schubert*, XV.) In-8, XIV-289 p. avec 1 fig. Leipzig, G.-J. Göschen. Relié, 7 m.

Wieleitner (Heinr.). — *Geschichte der Mathematik.* II. Tl. Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrh. 1. Hälfte. Arithmetik, Algebra, Analysis. Bearb. unter Benutzg. des Nachlasses von *Ant.* v. *Braunmühl.* (*Sammlung Schubert*, LXIII.) In-8, VIII-251 p. avec 6 fig. Leipzig, G.-J. Göschen. Relié, 6 m. 50.

Schubert (Herm.). — *Niedere Analysis.* II Tl. Funktionen, Reihen, Gleichgn. 2., durchgeseh. Aufl. (*Sammlung Schubert*, XLV.) In-8, 215 p. avec 3 fig. Leipzig, G.-J. Göschen. Relié, 3 m. 80.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

POINCARÉ (H.). — Calcul des probabilités. Cours de la Faculté des Sciences de Paris. Rédaction de A. Quiquet. Deuxième édition, revue et augmentée par l'Auteur. Un vol. gr. in-8, 335 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1912.

Il existe à la Sorbonne une chaire de *Physique mathématique et Calcul des probabilités*. L'origine de ce titre hybride n'est peut-être pas très connue.

En 1834, à la mort de Hachette, la Faculté des Sciences eut à donner son avis sur le maintien ou la transformation de la chaire de Géométrie descriptive dont l'enseignement n'était guère suivi. On fut d'accord sur le principe de la transformation, mais les opinions se partagèrent sur sa nature : trois voix se prononcèrent en faveur du Calcul des probabilités et de ses applications; trois, au contraire, en faveur de la Physique mathématique (on entendait par là l'exposé des questions de Physique qui exigeaient quelque calcul); il y eut deux abstentions. Poisson désirait vivement introduire à la Sorbonne un jeune savant malheureux, d'origine italienne, Guglielmo Libri-Carucci, qui venait de remplacer Legendre à l'Académie des Sciences. A son instigation, et aussi grâce à l'influence d'Arago, brusquement le Ministre opta pour la transformation en une chaire de Calcul des probabilités. La Faculté, qui avait le droit de présentation, proposa en première ligne par huit voix le comte Libri-Carucci et en seconde ligne par sept voix un professeur de la Faculté des Sciences de Lyon, Antoine-Augustin Cournot. Les deux concurrents sont devenus illustres à des titres différents. Par son œuvre encore classique en matière de probabilités comme par ses idées philosophiques, Cournot restera une des plus pures gloires de la science française. Mais ce fut Libri qui fut chargé du cours, le 16 décembre 1834. Pendant onze ans, il exposa les principes et les applications du Calcul des probabilités. En 1838, détail inconnu même à Léopold Delisle, il eut l'occasion de signaler à la

Faculté des vols manifestes qui s'y produisaient et de faire observer « qu'il y avait danger à laisser habiter dans la Sorbonne des personnes qui n'étaient pas qualifiées pour jouir de cette faveur ». Mais il ne semble pas qu'on lui ait su gré de cette indication. Nommé, en 1843, professeur au Collège de France, surchargé de besogne par la direction de ventes aux enchères de collections diverses, Libri se fit suppléer à la Sorbonne, en 1845-1846 par Despeyrous, l'année suivante par Lecaplain. A cette époque, des bruits fâcheux coururent sur son compte et une instruction fut même ouverte secrètement à son sujet, en juillet 1847. Libri crut que sa dignité exigeait qu'il reprît son enseignement et il demanda que son nom figurât sur l'affiche des cours du premier semestre 1847-1848. Après les journées de février 1848, à la suite de la découverte dans les papiers du ministre Guizot d'un rapport judiciaire concernant la disparition de manuscrits et de livres anciens estimés à un demi-million, Libri éprouva le besoin de passer la Manche et de s'installer à Londres pour un temps indéterminé. Bienaymé fut chargé *d'urgence* de suppléer jusqu'à la fin de l'année scolaire le professeur titulaire absent. Ce fut l'agonie de l'enseignement du Calcul des probabilités.

Le 22 juin 1850, la Cour d'assises de la Seine condamnait le comte Libri à dix ans de réclusion, à la dégradation et à la perte de ses emplois publics. La Faculté, sans préjuger du fonds de l'affaire, sentiment dont Le Verrier surtout fut l'interprète, n'avait pas attendu jusque-là pour procéder au remplacement de Libri. Sur sa proposition, Lamé, membre de l'Institut, fut chargé du cours; mais l'affiche aussitôt marqua un changement d'orientation dans l'enseignement, car on y put lire : « M. Lamé traitera de l'application du Calcul des probabilités à diverses questions de Physique mathématique ». L'année suivante, sans qu'il y ait eu à ce sujet aucune délibération de la Faculté, l'affiche portait comme titre de la chaire : *Calcul des probabilités et Physique mathématique;* Lamé devait exposer la théorie de l'élasticité. Ses leçons ont été publiées et sont devenues célèbres. La Physique mathématique supplantait dès lors pour plus de quarante ans le Calcul des probabilités. Pour le mieux indiquer, plus tard, avec Briot, on intervertit les deux termes du titre de la chaire qui reçut la dénomination conservée jusqu'à ce jour.

Au printemps de 1894, un nouveau titulaire qui avait déjà professé durant sept ans sur les branches les plus diverses, les plus ardues, les plus en vogue aussi, de la Physique mathématique, s'avisa de consacrer un semestre académique à l'exposition des principes du Calcul des probabilités. Ses leçons, fidèlement recueillies par un élève de l'École Normale, ont été livrées au grand public, en 1896, sous la forme du livre que la maison Gauthier-Villars vient de rééditer.

Nous nous bornerons à présenter une énumération des sujets traités, car, pour donner de cet Ouvrage une appréciation compétente, il faudrait la plume de Joseph Bertrand, de ce maître qui a rénové l'enseignement du Calcul des probabilités, par ses leçons au Collège de France et à l'École Polytechnique, par un brillant article de la *Revue des Deux Mondes*, par un Livre enfin qui est encore « le Livre » par excellence et dont, en un certain sens, les *Leçons* de M. Poincaré sont un écho, puisque toutes les difficultés, tous les paradoxes que Bertrand s'est complu, avec l'ingéniosité qu'on sait, à signaler dans la doctrine des chances, trouvent ici un éclaircissement, une solution.

Notons d'abord les améliorations offertes par l'édition nouvelle. Les principales additions consistent en une introduction sur les « lois du hasard », qui reproduit une conférence parue, en 1907, dans la *Revue du Mois*, et en un Chapitre final qui développe quelques questions soulevées dans l'Introduction ou exposées ailleurs par l'auteur en étudiant les « hypothèses cosmogoniques ». La modification essentielle de forme réside dans la substitution de la division en Chapitres au morcellage en leçons; la matière se trouve ainsi répartie plus logiquement, et l'interversion de quelques paragraphes a permis de mieux lier l'exposition.

Introduction. — *Les lois du hasard.* — L'analyse si pénétrante et si suggestive de l'idée de hasard par laquelle s'ouvre le Livre de M. Poincaré et qui s'adresse autant aux philosophes qu'aux mathématiciens, est faite dans l'hypothèse d'un déterminisme absolu. Pour ceux qui, comme le grand statisticien anglais Karl Pearson, n'admettent pas le principe métaphysique de causalité, qui regardent le mot *cause*, « en tant qu'il indique la création ou la nécessité d'une suite particulière de perceptions, comme vide de

sens », qui voient dans la cause « une phase d'une routine constatée par l'expérience et non pas d'une routine résultant d'une nécessité interne », pour qui enfin « la nécessité réside dans le monde des conceptions, non dans celui des perceptions », pour ceux-là, dis-je, une transposition, une réadaptation de l'exposé s'imposerait, mais l'ensemble ne perdrait pas sa valeur.

Nous attribuons au hasard les phénomènes que nous sommes dans l'impossibilité de prévoir ou de prédire, parce que nous en ignorons les causes.

Certaines causes peuvent nous échapper, soit par suite de leur petitesse vis-à-vis des causes mises en compte, encore que leurs effets puissent être considérables, soit par suite de leur complexité, due le plus souvent à la répétition maintes fois multipliée d'influences minimes, soit enfin parce qu'elles résultent de la réaction imprévisible de ces tranches arbitrairement choisies, encore que prises aussi isolées que possible, en lesquelles la faiblesse de notre esprit nous contraint à morceler le champ de nos perceptions. M. Poincaré présente des exemples variés et typiques de ces divers cas d'ignorance, qui d'ailleurs ne sont pas essentiellement distincts.

Mais comment oser parler de lois pour des phénomènes régis par de telles causes? « Suffit-il que les causes soient petites ou qu'elles soient complexes pour que nous puissions prévoir, sinon quels en sont les effets *dans chaque cas*, mais au moins ce que seront ces effets *en moyenne?* » Nous le pourrons dans la mesure où la prédiction dépend de propriétés communes à toutes les données susceptibles d'intervenir, à toutes les hypothèses imaginables, auxquelles nous imposons du moins cette condition de continuité qu'instinctivement nous croyons nécessaire. C'est ce dont on se rend compte en reprenant par le détail les exemples déjà cités.

L'étude d'une question relative au battage des cartes, et plus généralement de questions relatives à tous les mélanges, révèle la possibilité d'insuccès, quand les hypothèses initiales sont trop simples, qu'elles conservent quelque chose, qu'elles laissent subsister un invariant. La complexité n'est pas alors assez grande. N'est-ce pas l'analogue de ces mouvements des fluides intermédiaires entre les mouvements bien continus et les mouvements tumultueux et tourbillonnants, qui joignent à une partie des pro-

priétés des seconds quelque chose de la simplicité des premiers? Leur étude excède les forces de l'esprit humain.

Mais petitesse et complexité sont des éléments essentiellement subjectifs. Les résultats de la doctrine du hasard n'auront-ils dès lors aucune valeur objective? Leur caractère objectif, ils le doivent à ce que « tous les hommes ont à peu près les mêmes sens, que la puissance de leurs instruments est limitée et qu'ils ne s'en servent d'ailleurs qu'exceptionnellement ».

Nous n'avons envisagé que l'étude du monde matériel. Les théories du hasard ont, il est vrai, été appliquées aux sciences morales; elles n'ont donné que des déceptions. Là, si les causes sont obscures, complexes, elles sont encore trop simples, elles conservent toujours quelque chose, et M. Poincaré définit en ces termes, trop heureux pour qu'on ne les transcrive pas, l'éternel invariant des groupements humains agissant ou délibérant : « Quand des hommes sont rapprochés, ils ne se décident plus au hasard et indépendamment les uns des autres; ils réagissent les uns sur les autres. Des causes multiples entrent en action, elles troublent les hommes, les entraînent à droite et à gauche, mais il y a une chose qu'elles ne peuvent détruire, ce sont leurs habitudes de moutons de Panurge. Et c'est cela qui se conserve. »

Chapitre I. — *Définition des probabilités.* — La définition traditionnelle de la probabilité d'un événement aléatoire implique l'égalité des chances des cas énumérés. N'est-ce pas définir le probable par le probable? Quel critérium donner de cette « égalité des chances » qui ne soit pas purement logique, qui n'échoue pas devant la réalité? Le bon sens n'y suffit pas, il faut y joindre « l'esprit de finesse » qui, à son tour, dans le passage au concret, ne suffit pas pour tous les cas. Des exemples de complication graduée marquent les difficultés que peut déjà présenter l'estimation correcte de l'égale vraisemblance d'événements simples en nombre fini.

La classification des problèmes de la théorie des probabilités peut être faite de diverses manières. Dans l'exposé qui suit, l'Auteur se place au point de vue des cas possibles : leur nombre peut être fini et faible, et l'on est conduit à des applications du calcul des combinaisons; ou il est fini et très grand, et l'évaluation directe

du nombre des combinaisons est impraticable; on se contente alors d'une expression approchée de la probabilité par la loi des grands nombres, par le théorème de Jacques Bernoulli, et c'est ce qu'utilisent surtout les statisticiens. Le nombre des cas possibles peut au contraire être indéfini : c'est ce qui se présente, par exemple, dans le problème de l'aiguille de Buffon. Les problèmes de cette catégorie sont ceux qui présentent le plus de difficultés à l'égard de la légitimité des conventions préalables d'équiprobabilité. Le continu peut d'ailleurs s'introduire par des éléments ou des fonctions arbitraires.

M. Poincaré signale une autre base de classification. Un problème de probabilité ne se pose à propos d'un événement que si l'on sait quelque chose sur lui, sans connaître tout ce qui le détermine. Ne serait-il pas naturel de sérier les questions d'après le degré de notre ignorance? Et dans chaque série, n'y aurait-il pas lieu d'envisager les probabilités au point de vue subjectif, puis objectif? L'Auteur indique les idées qui dirigeraient un tel classement.

Chapitre II. — *Probabilités totales et composées.* — Deux théorèmes fondamentaux sont constamment invoqués dans la théorie des chances :

Si l'on partage les cas favorables en plusieurs groupes, la probabilité de l'événement est la somme des probabilités pour qu'il appartienne à chacun des groupes (principe de la probabilité totale). Il est essentiel d'ailleurs que, dans la formation des groupes, aucun cas ne soit omis ni répété.

Quand un événement consiste dans le concours de plusieurs autres, sa probabilité est le produit des probabilités des événements simples dont il exige la réunion (principe de la probabilité composée). Il est fondamental de s'assurer si les événements sont bien indépendants, et, dans le cas de la dépendance, de bien estimer la probabilité de chacun eu égard à la réalisation préalable de ses antécédents.

Deux exemples empruntés à la théorie du tir à la cible et à la théorie cinétique des gaz (d'après Maxwell) montrent comment une application fautive des principes a pu conduire à des conclusions illusoires.

Ce sont des cas de probabilités continues. Mais déjà dans le cas d'un nombre fini d'événements, il importe de se familiariser avec l'emploi judicieux des principes. M. Poincaré traite donc successivement le problème du scrutin (d'après D. André), le problème des dés (obtenir k points avec n dés), le problème de la loterie (sur n numéros tirés parmi μ, en obtenir k fixés), le problème de la poule à un jeu de hasard.

Chapitre III. — *L'espérance mathématique.* — Tout joueur échange sa mise contre l'espoir d'un gain; son espérance mathématique, valeur probable pour lui de l'enjeu, est le produit de cet enjeu par la probabilité qu'a le joueur de l'obtenir. Le jeu n'est équitable que si la mise et l'espérance mathématique s'équivalent. Souvent les conditions du jeu comportent la possibilité de gains ou pertes différents suivant les cas, selon la rencontre par exemple de deux, trois, etc. événements. L'espérance mathématique, somme des valeurs probables des divers gains, se calcule d'après l'évaluation des probabilités de chaque gain, mais il y a des cas où l'on peut l'estimer sans passer par ces probabilités composantes. Des exemples de ces diverses circonstances sont présentés.

M. Poincaré intercale ici la notion de valeur probable d'une quantité qui a des probabilités données d'avoir des valeurs données, définie comme espérance mathématique d'un joueur fictif. Il montre à ce sujet que la valeur probable d'une fonction d'une quantité n'est pas la valeur prise par cette fonction pour la valeur probable de la quantité.

La théorie de l'espérance mathématique a donné lieu à un prétendu paradoxe qui a fait couler des flots d'encre et qu'on a rencontré à l'occasion d'une question exhumée par Daniel Bernoulli, mais posée par son cousin Nicolas. C'est le problème de Pétersbourg : Pierre et Paul jouent à pile ou face; Paul lance la pièce autant de fois qu'il faut pour amener pile et alors la partie est terminée; il paie alors 2^n francs à Pierre s'il amène face à n coups et pile au $(n+1)^{\text{ième}}$. Quelle est l'espérance mathématique de Pierre? Elle est infinie, le calcul le montre; Pierre n'achètera jamais trop cher le droit de jouer. Qu'en conclure? Que le jeu est peu raisonnable, qu'il est même irréalisable si la mise doit être versée avant chaque partie; oui, mais rien de plus.

Le problème de la ruine d'un joueur conduit à une conclusion qui réjouissait fort l'excellent homme qu'était Ampère. Deux joueurs possédant respectivement m et n francs jouent à 1fr la partie, à un jeu équitable prolongé jusqu'à ce que l'un des deux soit ruiné. Le calcul de la probabilité de cet événement conduit à déterminer une fonction par une équation aux différences finies, linéaire et à coefficients constants. Le traitement d'une telle équation, valable pour bien d'autres problèmes, est donné dans le cas le plus général. Le résultat, appliqué à la question actuelle, montre qu'avec un jeu équitable, contre un adversaire infiniment riche, ce qui se présente quand on joue contre tout le monde, la ruine est assurée; son moment probable est aussi calculé.

Chapitres IV et V. — *Le théorème de Bernoulli. Application de la formule de Stirling.* — Jusqu'ici nous avons évalué la probabilité d'un événement unique qui ne se reproduira plus. Envisageons maintenant des épreuves répétées un grand nombre de fois dans des conditions identiques.

La probabilité d'un événement est p, celle de l'événement contraire est q. On fait m épreuves dans les mêmes conditions. Quelle est la probabilité u_α pour que le premier événement se présente α fois, l'autre $m-\alpha$ fois? Quel est, pour ce premier événement, le nombre α d'arrivées offrant la plus grande probabilité? Ce dernier nombre est compris entre $mp+p$ et $mp-q$. Il en résulte que, pour m très grand, le nombre α le plus probable est tel qu'il y ait très peu de différence entre p et $\frac{\alpha}{m}$. C'est une première forme d'établissement du théorème de Jacques Bernoulli.

Quelle est maintenant la probabilité pour que α s'*écarte* de mp d'une quantité h? Quelle est la valeur probable de h, du module de h, de h^2? Telles sont les questions auxquelles l'auteur consacre la fin du Chapitre IV.

Lorsque m est très grand, les quantités obtenues comme réponses sont d'un calcul pratique inextricable; on leur substitue des estimations approchées en remplaçant les factorielles à l'aide de l'expression asymptotique de Stirling,

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

qu'une démonstration bien élémentaire justifie. L'emploi de cette

formule donne comme valeur asymptotique de u_α, en posant

$$\alpha = mp + \lambda\sqrt{m}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}.$$

La valeur asymptotique du maximum de u_α, lequel correspond à une valeur de α différant très peu de mp, soit à λ sensiblement nul, est $\frac{1}{\sqrt{2mpq}}$.

Si l'on pose $h^2 = \frac{1}{2pq}$, la probabilité pour que λ soit compris entre λ_0 et λ_1 est $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, h e^{-h^2\lambda^2}\, d\lambda$, pour m très grand. On en déduit que la probabilité pour que α soit compris entre $mp(1-\varepsilon)$ et $mp(1+\varepsilon)$, quelque petit que soit ε, tend vers l'unité quand m croît indéfiniment.

Incidemment on calcule la valeur probable de λ^2 qu'on trouve égale à pq.

M. Poincaré calcule pour $\alpha = m\varepsilon$ la valeur asymptotique de u_α, qui en est aussi une limite supérieure, et ce résultat lui permet de calculer une limite de la probabilité pour que α soit inférieur à $m\varepsilon$; deux expressions d'une telle limite sont obtenues, selon que $m\varepsilon$ est entier ou non, en supposant seulement ε plus petit que p. L'une et l'autre expression tend vers zéro quand m croît indéfiniment, et de là peut se déduire encore le théorème de Jacques Bernoulli : *La probabilité pour que α soit compris entre $mp(1-\theta)$ et $mp(1+\theta)$ tend vers l'unité quand, θ restant constant, m croît indéfiniment.*

Chapitre VI. — *La loi de Gauss et les épreuves répétées.* — L'étude précédente nous conduit à examiner ce qui se passe quand a probabilité pour qu'un nombre x soit compris entre x_0 et x_1 est exprimée par l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}\, dx$; une telle loi de probabilité est dite *loi normale* ou *de Gauss*. Ses propriétés seront une introduction à la loi de probabilité des erreurs accidentelles. M. Poincaré établit notamment, d'après M. d'Ocagne, cet élégant théorème : *Soient x et y deux quantités indépendantes suivant la loi de Gauss; la quantité $x+y$ obéira à cette même loi.*

Dans l'étude de la répétition des épreuves, nous avons supposé

que le hasard seul intervenait dans la production des événements. On peut établir que, si une autre cause que le hasard intervient, la valeur probable de λ^2 est plus petite que si le hasard seul avait agi. Par le procédé de démonstration, cette propriété se place logiquement ici, et elle est de la plus haute importance en statistique : c'est son application qui permet, dans un relevé d'observations, de voir si les différences constatées sont dues au hasard, ou si une cause indépendante du hasard est intervenue.

Chapitres VII et VIII. — *Probabilité du continu. Applications diverses.* — Le cas où l'ensemble des éventualités possibles est infini et admet, au sens de Cantor, la puissance du continu, est essentiellement celui qui présente des paradoxes; cela tient à ce que la définition de la probabilité d'un événement comporte toujours une convention préalable.

Un premier exemple qui montre bien l'importance de cette convention est fourni par la question connue de J. Bertrand : Quelle est la probabilité pour qu'une corde d'une circonférence donnée soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit ?

Une convention une fois faite, ses formes *équivalentes* résultent d'un changement des paramètres qui déterminent l'événement. La probabilité pour que l'événement se produise (soit pour que les paramètres satisfassent à certaines conditions) étant exprimée par une intégrale définie, toute nouvelle forme de sa valeur résultera d'un simple changement de variables effectué sur l'ancienne.

Cette idée est appliquée au problème de Bertrand, à celui du bâton brisé, à celui de l'aiguille de Buffon et à une extension de ce dernier problème au cas d'une aiguille non rectiligne.

Une question plus nouvelle est celle-ci : Sur une sphère on trace une figure mobile; quelle est la probabilité pour que cette figure satisfasse à certaines conditions? Elle donne lieu à des exemples particuliers, intéressants et variés.

Une autre application concerne la probabilité d'un événement dont les paramètres sont ceux d'un système mécanique régi par les équations de Hamilton : Si une loi de probabilité est vraie pour les valeurs initiales des paramètres, elle le sera encore pour les valeurs finales.

Toute cette étude montre « qu'il faut apporter un très grand soin

à définir le choix de la loi de probabilité qu'on adopte ». De ce choix dépend la réponse; toutefois « certains problèmes sont indépendants de la loi en question », et M. Poincaré en cite des exemples, tels que le jeu de rouge et noir, la répartition des petites planètes, exemples qu'il traite en détail d'une manière très pénétrante.

Chapitre IX. — *Probabilités des causes.* — On appelle ici *cause* un événement antérieur à l'événement considéré et qui rend ce dernier possible. Un événement peut être produit par plusieurs causes pouvant ou non s'exclure.

Le problème actuel est celui-ci : Étant donné que tel effet s'est produit, quelle est la probabilité que telle cause a été mise en jeu?

Dans le cas des probabilités discontinues, la solution est fournie par le principe de la *probabilité a posteriori* du géomètre anglais Bayes : Plusieurs causes $C_1, \ldots, C_n$ peuvent produire un événement; leur mise en œuvre a pour probabilités *a priori* (avant toute épreuve) $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$; soient $p_1, \ldots, p_n$ les probabilités que chacune d'elles donne l'événement. L'événement a eu lieu. La probabilité (dite *a posteriori*) pour qu'il soit dû à la cause C_1 est $\frac{\varpi_1 p_1}{\Sigma \varpi p}$.

Dans les applications, l'évaluation des probabilités *a priori* est souvent affaire d'appréciation. Des exemples éclaircissent ce fait et familiarisent avec l'utilisation de la règle.

L'extension au cas des probabilités continues est exposée à l'occasion d'un problème de jeu et de la détermination du nombre total des petites planètes d'après les nombres de celles que l'on connaît, de celles qu'on observe et qu'on découvre dans une année. Presque tout le reste de l'Ouvrage ne sera guère d'ailleurs qu'applications de cette extension.

Chapitre X. — *La théorie des erreurs et la moyenne arithmétique.* — La recherche de la loi des erreurs d'observation, pour laquelle on adopte traditionnellement la loi de Gauss, est un problème de probabilité des causes à la solution duquel J. Bertrand a opposé de sérieuses objections. La question se pose ainsi : On a effectué différentes mesures $x_1, \ldots, x_n$ d'une même grandeur;

quelle est la probabilité pour que la véritable valeur soit comprise entre z et $z + dz$?

Son expression se construit à l'aide d'une fonction ψ, fournissant la probabilité *a priori* pour que z soit compris entre z et $z + dz$, et d'une fonction φ, dite *loi des erreurs*, donnant la probabilité pour que le résultat de l'observation de la grandeur à mesurer, de valeur z, soit compris, par exemple, entre x_1 et $x_1 + dx_1$. ψ dépend de z et φ de z et de x_1. A la vérité, comme on ne sait rien sur ψ et φ, on ne pourrait rien tirer de là. Mais « lorsque nous cherchons la meilleure valeur à donner à z, nous n'avons pas d'autre ressource que de prendre la moyenne entre $x_1, \ldots, x_n$ en l'absence de toute considération qui justifierait un autre choix. Il faut donc que la loi des erreurs s'adapte à cette façon d'opérer. Gauss cherche quelle doit être φ pour que la valeur la plus probable soit la valeur moyenne. » Dans ce calcul, Gauss suppose arbitrairement que ψ est une constante et que φ est une fonction de $y = z - x_1$. C'est ainsi qu'il obtient la loi qui porte son nom :

$$\varphi(y) = \sqrt{\frac{h}{\pi}}\, e^{-hy^2}.$$

h étant une constante servant à distinguer et à caractériser les cas.

M. Poincaré s'affranchit aisément des restrictions de Gauss et trouve un résultat plus général que le précédent, comportant en somme deux fonctions arbitraires d'une variable.

Mais J. Bertrand a présenté en outre cette objection, que la quantité qu'on doit prendre pour l'égaler à la moyenne n'est pas la valeur la plus probable et que c'est bien la valeur probable de z. Tout est alors à recommencer sur de nouveaux frais, et M. Poincaré établit que la manière de satisfaire au postulat de Gauss ainsi modifié se traduit par la loi

$$\varphi(x_1, z) = \theta(x_1)\, e^{\int \psi(z - x_1)\, dz}.$$

Comme il n'y a aucune raison pour supposer un lien entre les fonctions φ et ψ, ψ dépendant de la connaissance que nous pouvons avoir *a priori* de la probabilité relative à z et φ dépendant de la probabilité *a priori* pour que l'observateur se trompe, il convient de prendre pour ψ une constante, et l'on retrouve à nouveau la loi de Gauss, complétée par la fonction $\theta(x_1)$ qu'on n'a point de motif

de regarder comme constante. L'Auteur cite un cas où il est tout indiqué d'admettre le contraire.

Si les objections de Bertrand ont reçu réponse, il n'en reste pas moins à la base le postulat arbitraire de la moyenne; or, instinctivement, les physiciens, en l'appliquant, suppriment les observations à écart trop grand; ne serait-ce pas que la règle de la moyenne exigerait la petitesse des écarts? Il y a lieu d'y regarder de près et d'affermir sa conviction.

Chapitre XI. — *Justification de la loi de Gauss.* — Ce Chapitre étant assez touffu, M. Poincaré a cru devoir placer en tête, dans l'édition actuelle, un sommaire que nous reproduirons :

« 1° Nous chercherons quelle est, pour la loi de Gauss, l'expression de la valeur probable de la puissance $p^{\text{ième}}$ de l'erreur; 2° nous montrerons que cette loi est la seule pour laquelle cette valeur probable ait cette expression; 3° nous chercherons pour une loi quelconque l'expression de cette valeur probable; 4° nous chercherons encore cette expression quand l'erreur résultante est la somme de plusieurs erreurs partielles, indépendantes les unes des autres; 5° nous chercherons ce qu'elle devient quand les erreurs partielles sont très nombreuses et très petites; 6° retrouvant ainsi la même expression qu'avec la loi de Gauss, nous conclurons que la loi de Gauss doit être vraie toutes les fois que l'erreur résultante est due à l'accumulation d'erreurs très petites, très nombreuses et indépendantes; 7° nous retrouverons le même résultat par une autre voie. »

Après ce long plaidoyer en faveur de la loi de Gauss, l'Auteur revient sur les cas où il y a lieu de ne pas adopter cette loi, où il convient de rejeter telle observation qui présente avec toutes les autres une divergence exagérée ; il analyse cette idée qu'une erreur grossière d'estimation s'est produite plus vraisemblablement qu'une erreur d'aussi grande valeur satisfaisant à la loi de Gauss.

Tout ce Chapitre est l'un des plus suggestifs du Livre.

Chapitre XII. — *Erreur sur la situation d'un point.* — Si l'événement envisagé est déterminé par deux paramètres à variation continue, on peut lui associer un point d'un plan. Admettons

alors qu'on possède n observations des deux coordonnées d'un point d'un plan. Depuis Cotes, on accepte ce postulat : si les positions obtenues méritent la même confiance, la position la plus probable du point est le centre des moyennes distances des points obtenus. Quelle est la loi d'erreurs qui justifie cette hypothèse?

On montre, d'après Schols, qu'on est conduit à une loi obtenue par Bravais en partant de la loi de Gauss. Le résultat donne lieu d'ailleurs aux mêmes critiques de Bertrand; on ne les relève plus, et, la conclusion admise, on montre le parti qu'on en peut tirer.

Chapitres XIII et XIV. — *Méthode des moindres carrés. Calcul de l'erreur à craindre.* — Il arrive souvent qu'on ne peut mesurer directement les paramètres u de l'événement, mais qu'on sache en obtenir certaines fonctions z, en nombre de beaucoup supérieur à celui des paramètres; les mesures de ces quantités z comportent certaines erreurs expérimentales. Nous nous proposons de déterminer les valeurs les plus convenables des u.

C'est encore un problème de probabilité des causes, auquel s'applique la formule de Bayes généralisée; mais, pour en tirer parti, il faut admettre certaines hypothèses sur les erreurs d'observation : on accepte d'ordinaire la loi de Gauss (et c'est pourquoi on s'est tant efforcé tout à l'heure de la légitimer). On trouve ainsi qu'on obtient la valeur la plus probable du système des quantités u en rendant minimum la somme des carrés des erreurs commises, chaque carré étant affecté d'un coefficient h qu'on appelle *le poids de l'observation correspondante*. C'est la méthode des moindres carrés.

On peut, comme antérieurement, se proposer d'obtenir, non plus la valeur la plus probable des u, mais la valeur probable. Si l'on admet que la loi des erreurs est celle de Gauss et que les z sont liés aux u par des relations linéaires, M. Poincaré établit que la valeur probable des u est celle que donne la règle précédente.

Vient alors l'exposé de la conduite des calculs. Deux manières de les diriger se présentent; un exemple est donné pour chacune, l'un relatif aux planètes, l'autre à un problème de triangulation.

Quelle est l'erreur à craindre en adoptant les résultats de la méthode des moindres carrés? Telle est la question abordée après

qu'on a indiqué la valeur la plus probable du poids d'un système d'observations; elle se subdivise d'ailleurs en trois : « 1° On peut se proposer de calculer la probabilité *a priori*. On n'a pas encore fait les observations; on sait seulement qu'on va en faire n et qu'on appliquera la méthode des moindres carrés. Nous connaissons aussi l'habileté de l'observateur; 2° le problème est entièrement différent si nous ne savons pas à l'avance la valeur à attribuer à la constante qui entre dans la formule de Gauss. Nous ne connaissons pas l'habileté de l'observateur, mais nous connaissons les résultats des observations; 3° nous connaissons l'habileté de l'observateur et les résultats des observations. » L'examen de ces divers cas a absorbé trois leçons.

Chapitre XV. — *Théorie de l'interpolation*. — M. Poincaré applique la méthode des moindres carrés à la recherche d'une fonction inconnue dont on possède les valeurs A pour n valeurs a de la variable.

Le cas où la fonction $f(x)$ est un polynome de degré q inférieur à $(n-1)$ introduit des polynomes spéciaux $D_i(x)$ qui interviennent comme dénominateurs des réduites successives du développement de la dérivée logarithmique d'un polynome en fraction continue; ces polynomes possèdent des propriétés analogues à celles des polynomes de Legendre. Si l'on exprime $f(x)$ en fonction linéaire de $D_1, \ldots, D_q$, pour calculer les coefficients de manière à rendre minimum $\Sigma[A - f(a)]^2$, on obtient une loi élégante de ces coefficients.

Lorsqu'on a $q = n - 1$, c'est au problème de l'interpolation qu'on a affaire.

M. Poincaré traite enfin un dernier problème d'ordre purement spéculatif : il s'agit de déterminer les coefficients en nombre infini d'une fonction développable en série de puissances positives entières, à l'aide de n observations, en ne supposant connue que la loi de probabilité de ces coefficients. C'est le problème du plus haut degré de généralité qui ait été abordé.

Chapitre XVI. — *Questions diverses*. — « Pourquoi, quand le jeu a été battu assez longtemps, admettons-nous que tous les ordres dans lesquels ces cartes peuvent être rangées sont égale-

ment probables? ». M. Poincaré rattache cette question d'une manière aussi imprévue qu'ingénieuse à la théorie des nombres complexes à n unités principales et par le fait à la théorie des groupes.

Puis vient la question de la répartition des décimales dans une Table numérique, esquissée déjà dans les *Réflexions sur le Calcul des probabilités* publiées, en 1889, par la *Revue générale des Sciences*.

Pour clore l'Ouvrage, M. Poincaré résume son étude sur la loi de Maxwell, concernant la répartition des molécules gazeuses d'après la théorie cinétique, étude développée dans ses *Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques* (p. 95-111).

Maintenant, le livre fermé, reprenons, parcourons à nouveau le *Calcul des probabilités* de Bertrand, et comparons nos impressions. Est-il possible de traiter la même doctrine de manières plus dissemblables avec une égale séduction? Bertrand retient, passionne son lecteur par sa verve étincelante, par sa manie même de laisser souvent l'esprit en suspens, de signaler des pièges à chaque pas; lorsqu'on le quitte au bout du chemin, on n'est point fatigué, mais on se retrouve plus sceptique que prudent. Si l'on repasse alors en son souvenir cette conversation qui a si longtemps charmé, on a l'illusion que c'était vraiment une conversation, avec ses redites, ses propos inutiles, ses heurts aussi. En regard, les *Leçons* de M. Poincaré paraissent bien austères; elles forment un Livre d'étude, non de récréation; elles sont tellement liées qu'on ne voit guère moyen d'en retrancher une page, et n'est-ce pas ce parfait enchaînement des questions, autant que la puissance de la dialectique, qui tient le lecteur en haleine? On assiste à la transformation d'un massif pulvérulent en un bloc rigide dont les rares crevasses sont vivement éclairées. En présence de cette doctrine cohérente, le sceptique reprend confiance tout en restant prudent.

A. Boulanger.

GALBRUN (H.). — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences mathématiques, soutenue le 26 mars 1912 : *Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable* (¹). 1 vol. in-4, II-68 p. Uppsala, Almqvist et Wiksells Boktryckeri, 1912.

M. Galbrun s'est proposé d'étendre, aux équations linéaires *aux différences finies*, les *développements asymptotiques* qui permettent, comme l'a montré M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. VIII, 1886), de représenter les intégrales d'une équation différentielle linéaire irrégulières à l'infini. Ce problème peut être regardé comme la généralisation de la formule de Stirling relative à la représentation asymptotique de $\log\Gamma(x)$.

M. Galbrun considère l'équation aux différences finies

$$(1) \qquad A_0 f(x+r) + A_1 f(x+r-1) + \ldots + A_r f(x) = 0,$$

où les A sont des polynomes en x. Par une transformation classique, qui remonte à Laplace, il ramène l'étude de cette équation à celle d'une équation *différentielle* linéaire.

Dans une première Partie, il étudie les solutions de cette équation différentielle auxiliaire au voisinage d'un point exceptionnel régulier; il déduit de cette étude les propriétés des solutions correspondantes $f(x)$ de l'équation (1).

Dans une seconde Partie, l'Auteur forme des développements qui représentent asymptotiquement ces solutions $f(x)$, pour x s'éloignant indéfiniment du côté des abscisses positives.

Enfin, quand toutes les solutions de l'équation différentielle auxiliaire sont régulières, au sens de Fuchs, M. Galbrun représente asymptotiquement toutes les solutions $f(x)$ de l'équation (1), pour x s'éloignant à l'infini avec un argument quelconque.

Cette Thèse apporte une contribution efficace à un problème difficile et intéressant; elle prépare la solution des questions qu'elle laisse encore en suspens et sur lesquelles l'Auteur prépare d'autres publications.

M. Galbrun, dans ses recherches, s'est rencontré sur plusieurs

(¹) *Acta mathematica*, t. XXXVI.

points importants avec un autre jeune mathématicien, M. Nörlund; les travaux de ces deux auteurs se sont poursuivis indépendamment les uns des autres; il sera intéressant pour le lecteur d'en avoir la bibliographie exacte. La voici :

Publications de M. Nörlund.

1° *Sur la convergence des fractions continues* (*Comptes rendus*, 5 octobre 1908);

2° *Fractions continues et différences réciproques* (*Acta mathematica*, t. XXXIV, p. 1-108, 1910);

3° *Sur les équations aux différences finies* (*Comptes rendus*, 15 novembre 1909);

4° *Bidrag til de lineäre Differens ligningers Theorie.* Thèse en danois. Copenhague, 1910 (*voir* Thanding og Appeld);

5° *Ueber lineare Differenzen gleichungen* (*Mémoires de l'Académie des Sciences et des Lettres de Danemark*, 7e série, t. VI, n° 8, 1911).

Enfin M. Nörlund a exposé déjà les points principaux de ses recherches dans un Mémoire manuscrit qu'il a présenté en 1907 à l'Université de Copenhague, et qui se trouve dans les archives de cette Université.

Publications de M. Galbrun.

1° *Sur la représentation d'une fonction à variable réelle par une série formée avec les polynomes figurant dans les dérivées successives de la fonction* $e^{-\alpha^2}$ (*Comptes rendus*, 8 février 1909);

2°, 3°, 4°, 5° *Sur la représentation des solutions d'une équation aux différences finies linéaire, pour les grandes valeurs de la variable* (*Comptes rendus*, 5 avril 1909, 6 décembre 1909, 24 janvier 1910, 12 décembre 1910).

Le manuscrit de la Thèse de M. Galbrun a été déposé le 2 mars 1910, à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

P. Appell.

FESTSCHRIFT HEINRICH WEBER zu seinem siebzigsten Geburtstag am 5. März 1912 gewidmet von Freunden und Schülern, mit dem Bildnis von H. Weber in heliogravüre und figuren im text. Un vol. in-8, VIII-500 pages. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner; 1912.

Le titre même de cet Ouvrage indique clairement dans quel but et à quelle intention il a été composé. Les amis et les élèves de M. Henri Weber n'ont pas voulu laisser passer le 70e anniversaire de leur vénéré professeur, sans lui offrir un témoignage durable de leur sympathie, de leur reconnaissance et de leur admiration. Ce témoignage se présente à nous sous la forme d'un bel Ouvrage où se trouvent rassemblés un grand nombre de Mémoires sur les sujets les plus divers, appartenant à toutes les branches des Mathématiques où M. Weber a laissé les traces de son inlassable activité : algèbre, théorie des nombres, histoire des mathématiques, géométrie, théorie des fonctions, mécanique et physique mathématique. Il suffira de citer les noms de ceux qui ont composé ces Mémoires pour donner une idée de l'intérêt scientifique du nouveau Volume que nous devons à la librairie Teubner. Ce sont : MM. *J. Bauschinger*, *O. Blumenthal*, *R. Dedekind*, *A. Eichenwald*, *P. Epstein*, *R. Gans*, *H. Hahn*, *L. Henneberg*, *D. Hilbert*, *E. V. Huntington*, *A. Kneser*, *A. Krazer*, *A. Lœwy*, *L. Mandelstam*, *L. Maurer*, *R. V. Mises*, *Th. Reye*, *F. Schur*, *M. Simon*, *A. Sommerfeld*, *A. Speiser*, *P. Stäckel*, *E. Study*, *H. E. Timerding*, *W. Voigt*, *P. Volkmann*, *R. H. Weber*, *J. Welstein*, *C. Wirtz*. Les sujets traités embrassent tout le champ des Mathématiques.

Si le Volume finit par un article *sur la figure de la Lune*, on y trouve aussi des Mémoires sur la théorie des nombres, sur les équations différentielles (l'un d'eux est dû à M. Hilbert), sur le calcul des variations, sur la théorie de la relativité, etc.

G. D.

GEORGE SALMON. — A TREATISE ON THE ANALYTIC GEOMETRY OF THREE DIMENSIONS; revised by REGINALD A. P. ROGERS, fellow of Trinity College Dublin. FIFTH EDITION IN TWO VOLUMES. Vol. I, 1 vol. in-8, XXII-470 pages. Longmans, Green and Co, New York, Bombay and Calcutta. Hodges, Figgis and Co, Dublin; 1912.

Cette nouvelle édition se recommande par des additions nombreuses qui sont le plus souvent indiquées par des caractères spéciaux. Les trois premiers Chapitres traitent des coordonnées cartésiennes, du plan et de la ligne droite, des coordonnées tétraédriques en général. Les Chapitres IV, V et VI traitent de ce qu'on peut appeler la *théorie élémentaire des quadriques*. Le Chapitre VII expose le principe de dualité, la méthode des polaires réciproques et celle des notations abrégées. Il contient une addition assez étendue sur la généralisation des notions d'angle et de distance. Le Chapitre VIII traite des foyers des quadriques et des surfaces homofocales du second degré. Le Chapitre IX a pour objet l'étude des invariants et des covariants d'un système de quadriques. Enfin le Chapitre X, qui termine la théorie des quadriques, contient les principales propriétés des cônes et des coniques sphériques.

C'est avec le Chapitre XI que commence la théorie générale des surfaces. Après quelques considérations générales de géométrie analytique vient la théorie de la courbure, les formules d'Euler, les lignes de courbure, les théorèmes de Dupin, de Joachimsthal, de Lancret.

Avec le Chapitre XII, nous revenons aux courbes et aux surfaces développables, d'abord à leurs propriétés projectives, à leur classification, ensuite à leurs propriétés métriques. A cette occasion se trouvent introduites les notions de géométrie infinitésimale, celle de l'indicatrice sphérique, du plan osculateur, de la normale principale, de la courbure et de la torsion, les formules de Serret-Frenet, la théorie des développées. Enfin une dernière section de ce Chapitre a pour objet les courbes tracées sur les surfaces, la méthode de Gauss, la courbure totale, les lignes géodésiques des quadriques et leurs principales propriétés. Le volume se termine par l'étude de la construction des quadriques que

M. Staude a fait connaître et qui repose sur l'emploi de fils tendus sur les focales.

On voit que l'Ouvrage du regretté géomètre de Dublin a pu, sans perdre son caractère, recevoir un grand nombre d'additions intéressantes. J. G.

VOIGT (ANDREAS). — THEORIE DER ZAHLENREIHEN UND DER REIHENGLEICHUNGEN. Un vol. grand in-8, VIII-133 pages. Leipzig, G.-J. Göschen; 1911.

On trouve dans cet Ouvrage les deux idées fondamentales suivantes :

1° Au lieu de considérer un nombre rationnel comme isolé, on peut le considérer comme appartenant à une suite; par exemple, tout multiple d'un entier a appartient à la suite

$$\ldots, \quad -2a, \quad -a, \quad 0, \quad a, \quad 2a, \quad \ldots.$$

2° Au lieu de mettre toujours un polynome entier en x sous la forme

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

on peut le mettre, lorsque cela est utile, sous la forme

$$b_0 x(x-1)\ldots(x-n+1) + b_1 x(x-1)\ldots(x-n+2) + \ldots + b_{n-1} x + b_n,$$

ou sous la forme

$$c_0 x(x+1)\ldots(x+n-1) + c_1 x(x+1)\ldots(x+n-2) + \ldots + c_{n-1} x + c_n.$$

Mais ces idées ne sont pas bien neuves; et les conséquences que l'Auteur en tire, relatives aux polynomes de Bernoulli, aux équations et aux congruences algébriques ne le sont pas davantage. De plus, quelques raisonnements sont incomplets ou même risqués.

M. A. Voigt, il est vrai, prend soin de nous dire qu'il n'est plus mathématicien de profession depuis quatorze ans; il prie la critique d'en tenir compte et d'excuser les faiblesses de l'Ouvrage. C'est ce que nous ferons.

E. CAHEN.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

L'enseignement mathématique en Suisse. Berichte der schweiz. Subkommission der internationalen mathemat. Unterrichtskommission, hrsg. v. H. Fehr. In-8. Basel, Georg et Co :

— N° 4. *Brandenberger* (*Konr.*), Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Gymnasien u. Realschulen. 167 p. 3 m. 50.

— N° 7. *Grossmann* (*Marcel*), Der mathematische Unterricht an der eidgenössischen technischen Hochschule. 2 m.

— N° 8. I. *Lacombe* (*M.*), L'enseignement mathématique à l'école d'ingénieurs de Lausanne. — II. *Graf* (*J. H.*), Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Universitäten. 72 p. 2 m. 25.

Albrecht (Th.) u. Wanach (B.). — *Resultate des internationalen Breitendienstes.* IV. Bd. (*Veröffentlichungen des Zentralbureaus der internationalen Erdmessung.* Neue Folge. N° 22.) In-8, VI-276 p. avec 6 pl. Berlin, G. Reimer. 12 m.

Weber (Heinr.). — *Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik.* Nach Riemann's Vorlesgn. in 5. Aufl. bearb. II. Bd. Gr. in-8, 575 p. avec 95 fig. Braunschweig, F. Vieweg et Sohn. 15 m.; relié, 16 m. 80.

Alkindi, Tideus u. Pseudo-Euklid. — *Drei optische Werke.* Hrsg. u. erklärt v. †*Axel-Anthon Björnbo* u. *Seb. Vogl.* (*Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* Begründet v. Mor. Cantor.) Gr. in-8, 176 p. avec 43 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 10 m.

Annales de l'Observatoire de Nice. T. XVI. In-4. Paris, Gauthier-Villars. 30 fr.

Annales du Bureau Central météorologique de France, observations, année 1909. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Archiv der Mathematik u. Physik m. besond. Rücksicht auf die Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten sowie die Studierenden der Mathematik u. Physik. Gegründet 1841 durch J.-A. Grunert. 3. Reihe. Mit Anh. : Sitzungsberichte der Berliner mathemat. Gesellschaft. Unter Mitwirkg. v. E. Lampe u. W.-Fr. Meyer, hrsg. v. *E. Jahnke.* 19. Bd. 4 Hefte (1. Heft. 112 p. avec 13 fig. et 1 pl.). Gr. in-8. Leipzig, B.-G. Teubner. 18 m.

BOHLIN (Karl). — *Integralentwickelungen des v. Haerdtl'schen Dreikörper Problems.* In-8, 36 p. avec 4 fig. et 1 pl. Berlin, R. Friedländer et Sohn. 2 m. 40.

Catalogue de l'Observatoire de Nice. In-4, 182 p. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

COFFIN (Jos.-G.). — *Vector analysis; an introd. to vector-methods and their various applications to physics and mathematics.* 2e édition. XXII-262 p. avec fig. New York, Wiley. 2 d. 50.

COHEN (Abraham). — *An introduction to the Lie theory of one-parameter groups; with applications to the solution of differential equations.* VII-248 p. Boston, Heath. 2 d.

CZUBER (Eman). — *Vorlesungen üb. Differential- u. Integralrechnung.* I. Bd. 3., sorgfältig durchgeseh. Aufl. gr. in-8, XIV-605 p. avec 125 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 12 m.

HALSTED. — *Géométrie rationnelle*, trad. par *P. Barbarin.* In-8, VIII-296 p. avec 184 fig. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr. 50.

HAUCK (Guido). — *Vorlesungen üb. darstellende Geometrie unter besond. Berücksicht. der Bedürfnisse der Technik.* Hrsg. v. *Alfr. Hauck.* In 2 Bdn. 1. Bd. Gr. in-8, XII-339 p. avec 650 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 10 m.; relié, 12 m.

HEYWOOD (Bryon) et FRÉCHET (M.). — *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique*, notes de *J. Hadamard.* In-8, VI-168 p. Paris, A. Hermann et fils. 5 fr.

LALESCO (T.). — *Introduction à la théorie des équations intégrales;* avec une préface de M. *Émile Picard.* In-8, VII-153 p. Paris, A. Hermann et fils. 4 fr.

LAURENT (H.). — *Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la Géométrie.* 2e édit., augmentée d'une Note sur les principes de la Mécanique, par *A. Bühl.* In-8, 69 p. Paris, Gauthier-Villars. Cartonné, 2 fr.

NIEWENGLOWSKI (B.). — *Cours de Géométrie analytique.* T. II. 2e édit. In-8, IV-328 p. avec 180 fig. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr.

STOFFAËS. — *Cours de Mathématiques supérieures*, 3e édition, entièrement refondue. 2 vol. in-8 (X-398 p. et VI-362 p.). Paris, Gauthier-Villars. Chaque volume, 10 fr.

WALSH (J.-H.). — *Practical methods in arithmetic.* IV-395 p. avec fig. Boston, Heath. 1 d. 25.

CHWOLSON (O.-D.). — *Traité de Physique;* 2e édition française. T. I. 1er volume : Introduction. Mécanique, Méthodes et instruments de mesure. XVII-156 p. avec 229 fig. dans le texte. Paris, A. Hermann et fils. 17 fr.

Gramont (Armand de), duc de Guiche. — *Essais d'aérodynamique*, 2e série. Paris, Hachette et Cie. 3 fr. 50.

Hartmann (F.-M.). — *Heat and thermodynamics*. In-8. London, Hill Pub. Co. 12 s. 6 d.

Darboux (Gaston). — *Éloges académiques et Discours*. Volume publié par le Comité du Jubilé scientifique de M. G. Darboux. Paris, Hermann et fils.

Adhémar (Rob. d'). — *Leçons sur les principes de l'Analyse*. T. I : *Séries, déterminants, intégrales, potentiels, équations intégrales, équations différentielles et fonctionnelles*. In-8, VI-324 p. avec 27 fig. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Bachelier (Louis). — *Calcul des probabilités*. In-4, VII-518 p. Paris, Gauthier-Villars. 25 fr.

Cohen (A.). — *An Introduction to the Lie theory of one-parameter groups, with applications to the solution of differential equations*. In-12. London, D.-C. Heath. 5 s.

Éclipse (L') de Soleil du 17 avril 1912. Notice publiée par le Bureau des Longitudes. In-8, 16 p., 5 fig. et 1 carte. Paris, Gauthier-Villars. 1 fr. 50.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet v. *Carl Orthmann*. Hrsg. v. *Emil Lampe*. 40. Bd. Jahrg. 1909. 2. Heft. Gr. in-8, 529-736 p. Berlin, G. Reimer. 8 m. 50.

Klinkerfues (W.). — *Theoretische Astronomie*. Neubearbeitung v. *H. Buchholz*. 3e édition augmentée. In-8, XXXVIII-1070 p. avec 67 fig. Braunschweig, F. Vieweg et Sohn. Relié, 50 m.

Salmon (George). — *A Treatise on the analytic geometry of three dimensions*. Rev. by *Reginald A. P. Rogers*. 5e édit. Vol. I. In-8. 492 p. London, Longmans. 9 s.

Sturm (Ambros.). — *Geschichte der Mathematik bis zum Ausgange des 18 Jahrh*. 2e édition. (*Sammlung Göschen*, 226.) In-8, 155 p. avec 7 fig. Lepzig, Jodes Bändchen. 0 m. 80.

Scheiner (J.). — *Populäre Astrophysik*. 2e édition. Gr. in-8, VI-723 p. avec 210 fig. et 30 planches. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 14 m.

Cauchy (Augustin). — *Œuvres complètes*. 2e série. T. XI. *Nouveaux exercices d'Analyse et de Physique*. Paris, Gauthier-Villars. 25 fr.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

NIELSEN (Niels). — Elemente der Funktionentheorie. *Vorlesungen gehalten an der Universität Kopenhagen.* 1 vol. gr. in-8, x-520 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1911.

Cet Ouvrage, rédigé avec un grand talent d'exposition, joignant heureusement le souci d'une rigueur parfaite à la volonté de rester sobre dans les explications, est une excellente introduction à la théorie des Fonctions.

Il est divisé en trois Parties :

1° *Fonctions de variables réelles* (p. 1-180);
2° *Fonctions de variables complexes* (p. 181-340);
3° *Fonctions élémentaires* (p. 341-520).

440 exercices sont proposés comme applications des théories ou comme éclaircissements; tous ces exercices se rapportent à la théorie même des fonctions et non à des questions de géométrie ou de physique. Des citations suffisamment nombreuses indiquent la préocupation de renvoyer le lecteur aux œuvres des maîtres : chaque fois qu'une question est indiquée, mais non traitée en détail, on a renvoyé aux Mémoires principaux sur cette question.

Première Partie. Fonctions de variables réelles. — Dans la Préface, l'Auteur explique que, trouvant indispensable une étude approfondie des suites de nombres, il a essayé dans son enseignement des méthodes différentes pour faire cette étude, et qu'il s'est enfin arrêté, avec sécurité, au mode d'exposition de Cantor; la pratique de l'enseignement montre en effet que cette exposition, appuyée sur l'exemple des fractions décimales, est plus facilement accessible aux commençants que d'autres plus condensées.

On part des suites convergentes de nombres rationnels et c'est

par leur intermédiaire qu'on arrive aux nombres irrationnels. Passant aux suites convergentes de nombres quelconques, M. Nielsen définit la limite d'une pareille suite en considérant des valeurs rationnelles approchées des nombres donnés; il y aurait peut-être lieu d'insister un peu sur le choix de ces valeurs approchées, ce qui peut d'ailleurs être fait, en répétant des raisonnements détaillés auparavant.

Onze pages sont consacrés aux ensembles; on y définit l'équivalence, les points d'accumulation, la limite supérieure, la plus grande des limites, les ensembles dénombrables, les continuums de lignes.

La définition d'une fonction pour une valeur singulière a se fait en considérant une suite convergente ayant pour limite a et la condition de continuité est, avec les notations de Dirichlet,

$$f(a+0)=f(a-0).$$

On précise les définitions des fonctions partiellement, ponctuellement, ou totalement discontinues dans un intervalle et l'on en donne des exemples. On expose des théorèmes de Cantor et de Weierstrass qui éclairent la définition d'une fonction *continue dans un intervalle*. Après des explications détaillées sur les séries uniformément convergentes, on donne de suite la définition analytique des fonctions trigonométriques, de l'exponentielle et du logarithme, indispensable pour la fin de cette première Partie. Sur les fonctions dérivables dans un intervalle, des résultats établis avec rigueur permettront de préciser les conditions pour que deux fonctions ne diffèrent que par une constante. Des exemples de fonctions continues et n'admettant pas de dérivées empruntés à Weierstrass, Dini, Darboux sont détaillés ou cités avec renvoi aux Mémoires originaux.

Le cas de deux variables indépendantes, auquel on renverra dans les Chapitres sur les variables complexes, est présenté, partout où cela peut se faire naturellement, comme une généralisation du cas d'une seule variable.

La définition des fonctions intégrables, au sens de Riemann, est suivie de remarques générales permettant de reconnaître qu'une fonction composée est intégrable. La différentiation et l'intégration sous le signe $\int$ sont exposées, en faisant, sur la fonction sous le

signe, des hypothèses très générales et elles sont étudiées dans le cas où l'une des limites est infinie.

M. Nielsen prévient qu'il n'a indiqué, pour les fonctions de variables réelles, que les propriétés indispensables pour la théorie des fonctions : j'aurais voulu montrer avec quel soin il a étudié ces propriétés.

Deuxième Partie. Fonctions de variables complexes. — On reprend d'abord la définition du calcul des quantités complexes. Une quantité complexe est un système de deux nombres donnés dans un ordre déterminé; elle est d'abord représentée par la notation (a, b); le produit de deux quantités complexes est défini par l'égalité

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

On revient à la notation ordinaire et aux règles connues en désignant par i la quantité complexe $(0, 1)$ et l'interprétation géométrique est immédiate.

On étend aux suites et aux ensembles de quantités complexes les définitions données dans le premier Chapitre. Une notion nouvelle est introduite d'après Cesaro, celle des suites sommables d'ordre p. De la suite d'éléments complexes

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_n, \quad \ldots$$

on déduit les suivantes :

$$A_1^{(1)}, \quad A_2^{(1)}, \quad \ldots, \quad A_n^{(1)}, \quad \ldots,$$
$$A_1^{(2)}, \quad A_2^{(2)}, \quad \ldots \quad A_n^{(2)}, \quad \ldots$$

en posant

$$A_n^{(1)} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

et

$$A_n^{(p)} = A_1^{(p-1)} + A_2^{(p-1)} + \ldots + A_n^{(p-1)}.$$

Si la limite

$$\omega = p!\left(\lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(p)}}{n^p}\right)$$

existe et est finie pour un nombre entier p (tandis que cela n'a lieu pour aucun nombre entier inférieur à p), on dit que la suite donnée est *sommable* d'ordre p avec la somme moyenne ω.

L'importance de cette notion en Analyse est signalée avec renvoi

à des Mémoires de Fejér et de Bohr; on s'en servira en particulier à propos de la multiplication des séries et des suites de fonctions sommables.

L'intégrale curviligne est définie immédiatement au moyen de la formule

$$\int_{(K)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} [A(u, v) + iB(u, v)]\,[\varphi'(t) + i\psi'(t)]\,dt,$$

où $x = u + iv$, $f(x) = A(u, v) + iB(u, v)$ et où le chemin d'intégration (K) est donné par

$$\begin{aligned} u &= \varphi(t) \\ v &= \psi(t) \end{aligned} \qquad (t \text{ variant de } \alpha \text{ à } \beta);$$

M. Nielsen préfère, au point de vue de l'enseignement, ne pas faire dépendre cette notion d'un nouveau passage à la limite.

Les propriétés des intégrales de fonctions complexes sont rattachées à celles de l'intégrale curviligne; le théorème fondamental de Cauchy est présenté sous la forme que lui a donné Goursat.

La convergence des séries à termes complexes est étudiée en détail; des théorèmes de du Bois Reymond et Dedekind sont indiqués comme généralisation d'un théorème classique d'Abel.

Des remarques de Bohr sur la possibilité de représenter le produit de deux séries convergentes par une série convergente sont expliquées d'abord pour la série produit de Cauchy, puis pour des séries formées d'après d'autres règles. Les généralités sur les produits infinis sont expliquées dans le cas de facteurs complexes et en précisant l'emploi des valeurs principales des logarithmes.

Après les développements classiques sur les applications de l'intégrale de Cauchy, du calcul des résidus et du théorème de Riemann sur le prolongement analytique, vient une théorie des suites de fonctions uniformément convergentes, d'après Weierstrass, et des produits uniformément convergents, enfin des suites de fonctions uniformément sommables; les séries trigonométriques et les séries de puissances sont étudiées en détail.

Un Chapitre est consacré aux fonctions transcendantes entières; l'étude du point singulier essentiel est faite d'après les indications de Picard; la décomposition en facteurs primaires de Weierstrass

et le théorème de Mittag-Leffler trouvent comme applications les développements en produit du sinus et de la fonction $\sigma(x)$ de Weierstrass.

Les deux derniers Chapitres de cette deuxième Partie traitent de la transformation

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

et de ses principales propriétés au point de vue de la théorie des groupes, enfin de la représentation conforme au moyen des fonctions analytiques.

Troisième Partie. Fonctions élémentaires. — Cette Partie est destinée à faire connaître au lecteur les propriétés les plus indispensables des fonctions simples, et en même temps à servir d'application pour les théories générales.

Les fonctions étudiées sont les fonctions trigonométriques et les logarithmes (dont la définition a été donnée dans la deuxième Partie) et leur application à la détermination de certaines intégrales, le dilogarithme d'Euler, les fonctions algébriques, les intégrales de fonctions algébriques, en particulier l'intégrale elliptique de première espèce, les fonctions doublement périodiques, les polynomes de Bernoulli, les fonctions de Stirling et de Legendre, la fonction gamma, enfin les formules sommatoires, comme celle de Maclaurin, de Stirling et les séries asymptotiques.

Cet exposé fait en 180 pages ne peut, naturellement, contenir beaucoup de détails, sur les fonctions elliptiques par exemple : mais on reconnaîtra de suite que ce n'est pas un exposé sommaire. Ainsi, un Chapitre consacré aux transcendantes élémentaires à argument algébrique conduit aux propositions suivantes :

« Si x désigne un nombre algébrique différent de *zéro* (ou de *un*), e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,tang} x$ sont des nombres transcendants. »

Ces théorèmes, dont la découverte a été commencée par les travaux d'Hermite sur l'exponentielle, doivent être comptés, disait Weierstrass, parmi les plus beaux de toute l'Arithmétique.

On peut, d'après ces indications, se faire quelque idée de l'esprit dans lequel l'Ouvrage, destiné pourtant à servir d'Introduction, a été rédigé.

E. Lacour.

MONTEL (P). — Leçons sur les séries de polynomes a une variable complexe (*Collection de Monographies sur la théorie des fonctions*, publiées sous la direction de M. Émile Borel). 1 vol. in-8°, VII-128 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Dans la série d'études qu'ils ont consacrées, au cours de ces quinze dernières années, à la théorie moderne des fonctions, M. Borel et ses collaborateurs ont exposé et enrichi cette théorie aux points de vue les plus divers. Pendant que, dans le domaine des fonctions analytiques, les propriétés des fonctions qui se présentent chaque jour aux analystes, fonctions entières, fonctions méromorphes, intégrales d'équations différentielles, avaient à être approfondies de manière à arriver à des énoncés de plus en plus précis, — dans le sens de la compréhension, comme disent les logiciens, — c'est l'extension, ou, mathématiquement parlant, la généralité, que visent les recherches sur les fonctions de variables réelles; et, à cet égard, les progrès de la théorie des ensembles ont permis des raffinements inespérés. On aurait pu craindre, il est vrai, de voir ces recherches, par leur trop grande généralité, donner des résultats par trop vagues et incomplets, d'embrasser mal pour avoir voulu trop étreindre. Les séries trigonométriques tout d'abord, puis les séries de polynomes [les unes et les autres ont été traitées avec tout le soin nécessaire dans les précédentes *Monographies* de la même collection (¹)] peuvent être considérées comme ayant précisément pour objet de montrer que cette crainte est vaine, en fournissant des représentations relativement simples pour des catégories extrêmement générales de fonctions.

Transportée dans le domaine complexe, cette même notion de série de polynomes permet de répondre à une préoccupation en quelque sorte symétrique de la précédente et de rejoindre, en partant des fonctions analytiques soumises aux lois si remarquables et si précises que l'on connaît, la généralité rencontrée dans le cas des fonctions de variable réelle.

C'est ce nouvel aspect de la question que développe, cette fois,

(¹) *Voir* en particulier Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques;* Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues;* Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes.*

M. Montel, bien désigné à cet égard par les belles recherches inaugurées dans sa Thèse *Sur les suites de fonctions* et continuées dans ses Mémoires ultérieurs.

Se conformant à la règle suivie par ses prédécesseurs, M. Montel n'exige de son lecteur d'autres connaissances que les premières notions de l'Analyse. En particulier, bien qu'il renvoie occasionnellement aux autres Volumes de la Collection, il ne suppose jamais leur lecture préalable. Il entend que l'Ouvrage, tout en faisant partie d'un ensemble, se suffise à lui-même.

On ne s'étonnera point, par conséquent, de lui voir rappeler une série de principes, fussent-ils parmi les plus classiques, relatifs aux ensembles, alors que plusieurs de ces principes ont déjà été développés et appliqués dans les précédentes *Monographies*. Au reste, il se trouve conduit à faire du nouveau, même sur ce point, en consacrant un théorème, important pour la suite, aux ensembles parfaits discontinus dans le plan complexe.

De même, les propriétés fondamentales des fonctions analytiques sont rappelées et, si connue qu'elle soit, l'Auteur ne peut se dispenser d'insister sur l'intégrale de Cauchy, qui servira de base à toute son analyse ultérieure. Mais, ici encore, il est amené à apporter un complément remarquable aux principes qu'il expose. Parmi ceux-ci figure le théorème de Weierstrass d'après lequel une suite de fonctions holomorphes $f_n(z)$, uniformément convergente le long d'un contour fermé, l'est encore à l'intérieur de l'aire limitée par ce contour et représente, dans cette aire, une nouvelle fonction holomorphe. Or, M. Montel constate qu'on peut se passer de l'hypothèse de la convergence uniforme ; il suffit que les fonctions $f_n(z)$ soient *bornées dans leur ensemble*, c'est-à-dire que leurs valeurs absolues aient, sur tout le contour, une limite supérieure commune, indépendante de n.

Mais il y a plus. On connaît le théorème (théorème de Weierstrass-Bolzano) d'après lequel toute suite infinie et bornée de nombres, si elle ne tend pas vers une limite déterminée, admet au moins un élément limite (c'est-à-dire qu'on peut en extraire une suite partielle tendant vers une limite).

Moyennant quelles hypothèses supplémentaires cette conclusion reste-t-elle valable lorsqu'il s'agit de fonctions et non plus de nombres ?

Cette question est à la base des nombreuses recherches poursuivies dans ces dernières années sur le *principe de Dirichlet*. On y répond par un théorème de M. Arzelà, qui donne pour condition suffisante que les fonctions f_n qui composent la suite soient ce qu'on nomme *également continues*.

Mais lorsqu'il s'agit de fonctions analytiques d'une variable complexe, la réponse est beaucoup plus simple : il suffit encore que les fonctions f_n soient bornées dans leur ensemble (cette propriété entraîne d'ailleurs celle d'égale continuité).

La réciproque est vraie, c'est-à-dire que, si une famille de fonctions analytiques dans un domaine D possède la propriété que de toute suite infinie de ces fonctions on puisse extraire une suite nouvelle ayant une fonction limite, le module de ces fonctions reste inférieur à un nombre fixe dans tout domaine intérieur à D.

Dans le même ordre d'idées, quand des fonctions analytiques sont bornées dans leur ensemble à l'intérieur d'un domaine connexe, il suffit, et cette proposition est une conséquence des précédentes, que la suite formée par ces fonctions converge en une infinité de points ayant au moins un point limite intérieur au domaine (et non sur la frontière) pour qu'elle converge dans tout ce domaine (et même converge uniformément).

En même temps que ces propositions générales, on trouvera indiqués et discutés, dans ce même premier Chapitre (toujours en vue des applications ultérieures), les théorèmes récemment obtenus qui permettent de multiplier ou d'additionner les singularités de deux fonctions analytiques données par leurs développements en séries de puissances.

Ces principes posés, il convient, bien entendu, de démontrer tout d'abord le théorème fondamental qui met immédiatement en évidence la souplesse pour ainsi dire illimitée du développement en série de polynomes, et en vertu duquel une fonction analytique $f(z)$ est développable (d'une infinité de manières) en série de polynomes à l'intérieur d'une aire *de forme quelconque* où elle est holomorphe.

En raison de l'importance de ce théorème, l'Auteur indique les principales démonstrations qui en ont été données ; la démonstration primitive de M. Painlevé tout d'abord, laquelle consiste, au fond, à introduire un développement de Taylor autour d'un

centre variable et qui suppose encore le contour convexe; celle de M. Hilbert, échappant à cette nécessité et que M. Montel simplifie par un artifice de calcul dû à Jacobi ; enfin celle de M. Runge, qui consiste, comme on sait, à passer par l'intermédiaire d'un développement en fractions rationnelles (celui qu'on obtient en remplaçant successivement l'intégrale définie de Cauchy par l'une quelconque des sommes qui en sont, par définition, les valeurs approchées).

La méthode de Hilbert est, grâce à une formule d'Hermite, reliée à une formule classique d'interpolation de Lagrange et la relation ainsi établie permet d'établir, avec M. Runge, un résultat d'une importance capitale, à savoir que cette formule ne donne pas une approximation indéfinie lorsque le nombre des points d'interpolation augmente indéfiniment. La formule d'Hermite fait, en effet, connaître l'erreur commise en substituant à la fonction donnée le polynome d'interpolation et l'on peut dès lors, dans des cas simples, former une expression asymptotique explicite de cette erreur et constater qu'elle ne tend pas partout vers zéro.

La méthode de M. Runge a été rapprochée par l'Auteur du théorème de M. Appell sur les développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle et *extérieure* à ces cercles. Peut-être conviendrait-il de comparer à ce même théorème le procédé de développement de M. Painlevé, généralisation naturelle des séries de M. Appell relatives à l'aire *intérieure* à plusieurs cercles, et qui est à ces séries ce qu'une intégrale définie est à une somme ordinaire.

Après quelques mots consacrés aux polynomes de Tchebichell, en vue de compléter simplement celles des démonstrations données pour le cas réel ([1]) qui ne s'étendent pas aisément au domaine imaginaire, on passe à l'application de la représentation conforme.

C'est un artifice bien simple et, au premier abord, sans portée, que celui qui consiste à opérer, dans une série de Maclaurin, un changement de variable indépendante quelconque, de manière à obtenir une série ordonnée suivant les puissances d'une fonction. Il n'en est que plus intéressant de voir les résultats auxquels cette méthode (combinée, il est vrai, avec d'autres moyens d'action tels

---

([1]) *Voir* l'Ouvrage cité de M. Borel, p. 82.

que les procédés de multiplication des singularités exposés au premier Chapitre) donne entre les mains de chercheurs tels que M. Faber.

Jusqu'ici, on n'a considéré un développement en série de polynomes que dans un domaine d'un seul tenant. Mais les moins remarquables des séries dont il s'agit ne sont pas celles qui convergent dans plusieurs domaines différents, où l'on sait qu'elles peuvent représenter des fonctions différentes. On notera, à cet égard, les exemples, remarquables par leur simplicité, que fournit l'Auteur et les conclusions qu'il obtient avec M. Runge, relativement au domaine d'existence d'une fonction uniforme.

Le dernier Chapitre apparaîtra sans doute comme le plus suggestif aux lecteurs habitués à la théorie des fonctions. Il débute par un important théorème de M. Osgood sur la convergence uniforme. Soit une suite de fonctions analytiques convergente (sans qu'on en sache davantage) dans une certaine région du plan. M. Osgood montre que, dans tout domaine intérieur à cette région, on en peut trouver un autre où la suite est bornée dans son ensemble et par conséquent (d'après ce qui a été dit au commencement de l'Ouvrage) converge uniformément, de sorte que sa somme y est une fonction holomorphe. De curieux exemples illustrent ce fait : l'un d'eux conduit à établir, avec M. Lebesgue, que toute fonction continue, analytique ou non, d'une variable complexe z (par exemple, la partie réelle de z) est exprimable par une série *double* de polynomes en z. Par contre, on voit que cette série double ne peut pas être transformée en série simple, sans quoi, d'après le théorème de M. Osgood, sa somme serait analytique au moins dans une infinité de parties du plan.

Il n'est pas non plus exact qu'une série de polynomes ne puisse représenter une fonction analytique sans converger uniformément, ainsi que l'Auteur en fournit un exemple.

Dès lors, quelles conditions doit remplir une série convergente de polynomes pour représenter nécessairement une fonction analytique? Cette question n'est pas encore complètement résolue. Si l'on remplaçait le mot *analytique* par le mot *continu*, la condition consisterait, d'après un beau théorème de M. Arzelà, dans la convergence *quasi-uniforme*. Mais, comme le montre M. Montel par un exemple, cette condition ne suffit pas pour l'analyticité.

L'Ouvrage se termine par l'étude des points *irréguliers*, c'est-à-dire des points autour desquels la convergence n'est pas uniforme, étude à laquelle on est naturellement amené par le théorème de M. Osgood. Ce théorème montre aisément que cet ensemble est parfait, mais non dense, tout en étant continu et aussi d'un seul tenant avec la frontière du domaine d'existence de la série.

Autour de ces points, les valeurs des polynomes $P_n(x)$ obtenus en limitant la série à un nombre quelconque de termes présentent des propriétés curieuses. Grâce aux récents compléments que M. Landau a apportés au célèbre théorème de M. Picard sur les fonctions entières, on peut montrer que l'équation

$$P_n(x) = a$$

(a étant une constante) admet, dans le voisinage d'un point irrégulier, un nombre de racines qui croît indéfiniment avec n, et cela pour toute valeur de la constante a, une seule au plus exceptée. Cette conclusion subsiste même si l'on remplace la constante a par une fonction holomorphe quelconque (toujours avec exception possible pour une de ces fonctions).

Si, a étant donné, on marque sur le plan les différents points-racines des équations $P_n(x) = a$ pour toutes les valeurs de n, et si l'on appelle E_a l'ensemble dérivé de ces points-racines (en comptant dans E_a tout point qui vérifierait une infinité d'équations de la forme précédente), on voit que tout point irrégulier appartient à tous les ensembles E_a (un seul au plus excepté). Au contraire, un point régulier n'appartient qu'à un seul E_a, celui qu'on obtient en prenant pour a la valeur de la série en ce point.

Nous espérons avoir donné une idée de la richesse des matières rassemblées dans ce court Volume. Ajoutons que M. Montel y est arrivé à une union parfaite de la rigueur et de la simplicité, conciliation difficile en pareille matière et assurément impossible à qui ne posséderait pas la rare maîtrise qu'y apporte l'Auteur.

J. Hadamard.

HAUCK (Guido). — Vorlesungen ueber darstellende Geometrie. *Unter besonderer Berücksichtigung der Bedurfnisse der Technik. Herausgegeben von* Alfred Hauck. In zwei Bänden. Erster Band, mit 650 Textfiguren. 1 vol. gr. in-8, XII-339 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1912.

Dans sa Préface, M. Alfred Hauck nous présente, avec la plus affectueuse reconnaissance filiale, l'Ouvrage qu'il publie comme formé dans sa plus grande partie par les leçons que feu son père, le Dr Guido Hauck, avait professées avec un grand talent à l'École technique supérieure de Berlin, leçons qu'il a rassemblées, coordonnées et complétées en vue des besoins actuels de l'enseignement technique.

Cet Ouvrage, dont le premier Volume fait l'objet du présent compte rendu, comprendra un second Volume où seront traitées la Perspective conique et les Ombres.

Vingt-trois Chapitres, groupés en sept Parties, composent ce premier Volume.

Dans la première Partie, qui comprend six Chapitres, est exposée l'étude des éléments des figures et des polyèdres par la méthode de Monge.

Le premier Chapitre contient la représentation du point, de la droite et du plan dans les cas usuels seulement; le plan étant toujours limité à un polygone.

Dans le deuxième, où sont étudiées les intersections de droites et de plans, ceux-ci sont regardés comme illimités et représentés par leurs traces.

Des problèmes divers sont résolus dans le troisième; à la suite de la perpendiculaire commune à deux droites, de l'angle de deux plans, de la sphère circonscrite à un tétraèdre, du point commun à trois sphères, etc. on y trouve la construction du rayon réfléchi par un miroir plan et le tracé d'un cadran solaire déclinant.

Le Chapitre IV est consacré aux changements de plans de projections et en particulier aux projections auxiliaires de profil, toutes questions qui offrent un grand intérêt pour les applications. Celles-ci sont nombreuses, les unes théoriques, les autres pratiques, empruntées à la charpente et à l'architecture : arbalétrier avec ses assemblages, cheminée sur un toit, etc.

Dans le Chapitre V, relatif aux polyèdres, sont résolues deux questions : représenter un polyèdre d'après des conditions données; résoudre des problèmes sur un polyèdre donné par ses projections, tels que la détermination des grandeurs des arêtes et des angles, des aires des faces; applications de ces questions aux toits des maisons qui ont la forme de prismes triangulaires.

Le Chapitre VI termine l'étude des polyèdres, avec le tracé des sections planes et des intersections. Toutes les sections planes sont exécutées par l'emploi d'une projection auxiliaire qui est, en effet, très usuelle. Les exemples sont nombreux et empruntés à la pratique : aux travaux de terrassement, pour lesquels, à vrai dire, les projections cotées conviendraient peut-être mieux, et au domaine de l'architecture, rencontre de toits, noues, clochers, tourelles, etc.

La deuxième Partie est consacrée à la *Méthode axonométrique*, dont le but est de donner une représentation rapide d'un objet formant image. Cette représentation peut être obtenue de deux manières. Soit par une projection orthogonale sur un plan oblique aux directions principales de l'objet (Chap. VII), soit par une projection oblique sur un plan parallèle à une face principale de l'objet (Chap. VIII). Des motifs d'architecture, entablement dorique, croix en pierre, sont représentés dans l'un ou l'autre de ces deux modes.

La troisième Partie étudie, dans un seul Chapitre, le neuvième, sous le nom d'*affinités géométriques*, les relations d'homologie qui existent entre un polygone plan et sa projection oblique ou centrale, entre la projection orthogonale d'une figure plane et son rabattement; les principes de la géométrie projective avec la propriété du rapport anharmonique, et une application classique au quadrilatère complet.

La quatrième Partie comprend quatre Chapitres consacrés à l'étude des courbes.

Dans le Chapitre X sont données des généralités sur les courbes planes, tangentes, points singuliers, développantes et développées, avec des observations sur le dessin des courbes dont tous ceux qui s'occupent d'arts graphiques reconnaîtront la justesse :

le tracé d'une courbe est mieux assuré par la connaissance d'un certain nombre de points et de tangentes convenablement situés que par un grand de points placés au hasard; l'œil et un certain sentiment de la forme qui s'acquiert par la réflexion et la pratique font le reste.

Les courbes du second ordre sont étudiées dans le Chapitre XI, comme perspectives du cercle, en partant de deux faisceaux projectifs. L'ellipse est aussi considérée comme la projection orthogonale ou oblique d'un cercle. On y trouve, pour les trois courbes, les constructions usuelles déduites des théorèmes de Pascal et de Brianchon.

A propos de la construction par points d'un segment de parabole défini par deux tangentes, l'Auteur établit la formule

$$S = \Delta - \frac{\Delta}{4} - \frac{\Delta}{4^2} - \ldots = \frac{2}{3}\Delta$$

qui donne l'aire du segment parabolique, Δ désignant l'aire du triangle formé par les deux tangentes et la corde qui unit leurs points de contact.

Des notions sur les courbes gauches sont données dans le Chapitre XII, on y trouve en particulier les points singuliers fournis par la projection de ces courbes, des indications sur la développable lieu des tangentes, et un tracé approximatif relatif à la rectification d'un arc de courbe gauche au moyen de son cylindre projetant.

L'hélice est étudiée en particulier dans le Chapitre XIII. Un grand nombre de figures font connaître les différentes formes que peut affecter la projection de cette courbe, dont la transformation en une courbe plane est obtenue par le développement de la surface lieu de ses tangentes.

La cinquième Partie, intitulée *Surfaces développables*, comprend les Chapitres XIV et XV. Le premier renferme des généralités sur les surfaces courbes en général, regardées comme lieux d'une ligne, et leur classification en trois groupes : surfaces réglées (développables ou gauches); surfaces engendrées par une ligne qui se déplace en restant semblable à elle-même dans un plan qui reste parallèle à lui-même (Rückungsflächen) (surfaces de révolution et surfaces du seconde ordre); et surfaces spirales, comprenant principalement les surfaces hélicoïdales.

Le deuxième s'occupe spécialement des surfaces développables : hélicoïde; cônes et cylindres, avec le développement, les sections planes, les intersections et des applications à la stéréotomie : voûte d'arête, lunette, arc de cloître, et à la chaudronnerie : tuyaux coudés, etc.

La sixième Partie, *Rückungsflächen*, est divisée en quatre Chapitres.

Des généralités sur les surfaces à courbures opposées avec la distinction en régions de points elliptiques ou hyperboliques, sont données dans le Chapitre XVI.

Le Chapitre XVII est consacré aux surfaces de révolution : construction de plans tangents, de sections planes, d'intersections de surfaces de révolution entre elles ou avec des cônes et des cylindres, en se bornant à la détermination de points dans les cas les plus simples.

Dans le Chapitre XVIII, on trouve une étude élémentaire des surfaces du second ordre, en vue de bien montrer la forme de ces surfaces, une classification basée à la fois sur la considération de la section faite par le plan tangent et par le plan de l'infini; enfin la détermination des projections d'un point de la surface définie par deux sections principales parallèles aux plans de projection.

Le Chapitre XIX traite des surfaces topographiques dans ses questions les plus élémentaires, et l'application à l'établissement d'un chemin horizontal sur un terrain incliné avec talus de déblai et de remblai.

La septième Partie, comprenant les quatre derniers Chapitres, a pour objet l'étude des *surfaces réglées gauches*.

Les principaux modes de génération des surfaces gauches et leurs propriétés générales sont donnés dans le Chapitre XX.

Le Chapitre XXI est consacré aux deux surfaces du second ordre et à leurs applications : comble gauche, mur paraboloïde, paraboloïde de joint dans les voûtes biaises, engrenages hyperboloïdes.

Dans le Chapitre XXII, on trouve les surfaces gauches d'ordre supérieur utilisées dans les arts : coin de Wallis, cylindroïde de Frézier, biais passé gauche, arrière-voussure de Marseille.

Enfin, le Chapitre vingt-troisième et dernier est réservé aux surfaces hélicoïdales gauches, dont les applications sont nombreuses : vis, escalier à vis, pont biais appareillé dans le système hélicoïdal simplifié.

On voit, par le rapide exposé que nous venons de faire, que l'Ouvrage de M. Hauck n'est pas un traité théorique analogue à ceux de Friedler ou de Jules de la Gournerie, mais un livre où l'on trouve présenté simplement et avec ordre tout ce qui est utile pour comprendre les méthodes de la géométrie descriptive en vue de leurs applications pratiques. Je dois dire cependant que plusieurs constructions des Chapitres II et III, où l'Auteur s'est astreint à chercher chaque fois les traces des plans, m'ont paru trop spéciales et peu pratiques pour des techniciens.

L'Auteur a fait un choix judicieux et intéressant de ces applications aux différents arts graphiques. Les épures sont claires et souvent accompagnées d'esquisses perspectives qui en facilitent la compréhension.

Nous avons remarqué une innovation qui semble heureuse, au moins pour un lecteur déjà familiarisé avec la Géométrie descriptive, c'est la suppression presque complète des lettres dans les épures. De cette façon, le lecteur au lieu de suivre mécaniquement sur la figure les lettres du texte est obligé à plus de réflexion, en même temps que l'épure gagne en clarté et en puissance de représentation; en revanche cela exige des explications souvent plus longues, que l'Auteur a d'ailleurs su présenter sans trop alourdir le texte.

Les nombreux exercices traités ont été, de propos délibéré, expliqués très brièvement, l'Auteur jugeant avec raison que l'étudiant a tout à gagner à faire l'épure et à compléter par son travail personnel les constructions et les explications : l'effort seul, en effet, permet d'acquérir des connaissances en même temps qu'il procure de la satisfaction.

Ainsi compris, ce Livre sera un auxiliaire utile et un bon guide pour les élèves des écoles techniques.

C. R.

ADHÉMAR (R. D'). — LEÇONS SUR LES PRINCIPES DE L'ANALYSE. Tome I : *Séries. Déterminants. Intégrales. Potentiels. Équations différentielles et fonctionnelles.* Un vol. gr. in-8, VI-324 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

« Si, dans le titre de ce Livre, j'emploie le mot *Principes*, il suffit de lire la Table des matières pour voir que j'ai voulu dire *Questions principales*, fondamentales et non point approfondissement des premiers principes de la Science mathématique. » C'est par ces mots que débute la Préface du nouveau Livre que M. d'Adhémar vient de publier, et cette phrase se trouve en effet bien justifiée par le nombre et la variété des questions qui y sont abordées.

L'Ouvrage est conçu dans le même esprit que les *Exercices et Leçons d'Analyse* du même Auteur, mais plus développé et plus complet. Il s'adresse à tous les étudiants en Mathématiques, mais particulièrement aux meilleurs d'entre eux, c'est-à-dire à ceux, en grand nombre, qui n'ont pas pour but unique l'obtention d'un Certificat, mais qui désirent surtout s'instruire et qui ne craignent pas de dépasser quelquefois les programmes.

Réservant pour un second Volume la théorie des fonctions analytiques, l'Auteur s'occupe principalement ici des fonctions de variables réelles. Les premiers Chapitres sont consacrés aux matières les plus classiques : séries, déterminants, intégrales simples et multiples. Les définitions et les théorèmes fondamentaux y sont rappelés d'une manière concise mais claire, avec, pour les illustrer, un certain nombre d'applications. Çà et là sont abordées certaines questions très élevées (telles que théorie des ensembles, déterminants d'ordre infini), où M. d'Adhémar a su très judicieusement choisir les points qui pouvaient être exposés sans dépasser les connaissances possédées par les lecteurs auxquels il s'adresse.

La seconde partie du Livre est certainement celle qui sera lue avec le plus d'intérêt. Là sont traitées les questions, pleines d'actualité, qui sont comme le trait d'union entre l'Analyse et la Physique mathématique. L'Auteur étudie d'abord les propriétés fondamentales des potentiels de simple et de double couche et de leurs dérivées, en vue de leur application aux célèbres problèmes

de Dirichlet et de Neumann. Il est ainsi conduit à développer la méthode par laquelle M. Fredholm a résolu l'équation intégrale à laquelle son nom reste attaché. Les principaux travaux de MM. Hilbert et Schmidt relatifs à la même équation, dans le cas du noyau symétrique, se trouvent également exposés. Un dernier Chapitre traite des théorèmes généraux sur les équations différentielles : le théorème fondamental d'existence est établi par la méthode des approximations successives de M. Picard, celle des fonctions majorantes de Cauchy étant réservée pour le Tome II. Enfin, l'Ouvrage se termine par quelques pages relatives au calcul fonctionnel.

A la lecture de ce Volume, l'étudiant s'instruira certainement. Bien plus, sa curiosité ayant été mise en éveil par les nombreux aperçus que M. d'Adhémar lui aura ouverts sur les domaines les plus élevés et les plus nouveaux de l'Analyse, il aura acquis le désir de s'instruire encore davantage et d'approfondir certaines questions qui ne sont qu'effleurées. Le but que s'est proposé l'Auteur se trouvera ainsi atteint : « Puisse ce Livre rendre quelque service aux étudiants qui veulent apprendre vraiment, c'est-à-dire à ceux qui veulent lire les travaux des maîtres. »

H. Vergne.

WHITFORD (Edward-Everett). — The Pell equation. 1 vol. gr. in-8, IV-193 pages. New-York, College of the City, 1912.

M. Whitford expose en détail toutes les recherches relatives à la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée du second degré à deux inconnues

$$x^2 - Ay^2 = 1 \tag{1}$$

et montre ainsi qu'elle a été certainement étudiée bien longtemps avant Pell.

Legendre a écrit que Fermat est, semble-t-il, le premier qui ait connu la solution de l'équation (1); mais, d'après Gauss, la solution complète de cette équation est due à Lagrange. Gauss a montré la connexion de l'équation (1) avec la théorie des formes

quadratiques. Dirichlet a donné plusieurs théorèmes relatifs à la résolution de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = -1 \tag{2}$$

pour certaines valeurs de A, et, avec Jacobi, il a montré que la résolution du problème de la division de la circonférence en parties égales est liée à la théorie de l'équation (1) et de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = 4.$$

Kronecker a le premier employé les fonctions elliptiques pour la solution de l'équation de Pell. Il a montré que diverses expressions algébriques peuvent être approximativement représentées par la même expression.

M. Whitford donne une *Bibliography* très étendue des publications se rapportant à l'équation de Pell et aux Tables contenant les solutions fondamentales des équations (1) et (2). Les premiers calculs ont été faits par Euler pour les valeurs de A depuis 1 jusqu'à 100. Le *Canon Pellianus* de Degen, publié en 1817, donne les solutions pour les valeurs non carrées de A depuis 1 jusqu'à 1000 et quelques résolutions de l'équation (2). *The British Association Report for* 1893 contient une Table qui continue ce *Canon* jusqu'à 1500.

M. Whitford, dans le Livre dont nous rendons compte, donne la Table des solutions pour les valeurs non carrées de A allant de 1501 à 2012. Son travail diffère des précédents en ce que la solution de l'importante équation (1) est donnée même dans le cas où l'équation (2) a une solution. Ses calculs, fondés sur le développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue, sont amplement expliqués.

L'Ouvrage de M. Whitford est intéressant à parcourir, parce qu'il contient un exposé clair d'un grand nombre de recherches sur l'équation de Pell, une *Bibliography* avec de sobres indications sur les recherches qui ne sont pas analysées; de plus, il est utile à cause des Tables qui sont dues à M. Whitford lui-même.

Er. L.

Opere matematiche del marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano pubblicate sotto gli Auspici della Societa italiana per il Progresso delle Scienze dai soci V. Volterra, G. Loria, D. Gambioli. Volume primo che contiene la materia del tomo I delle *Produzioni Matematiche*, VII-474 p. Volume secondo che contiene la materia del tomo II delle *Produzioni Matematiche*, IX-471 p. Volume terzo : *Altri scritti scientifici. Scritti polemici. Carteggio. Biografia.* XI-227 p. Milano, Roma, Napoli, Societa editrice Dante Alighieri di Albrighi, Segali et C.; 1912.

En recevant ces trois Volumes publiés, comme l'indique leur titre, sous les auspices de la Société italienne récemment fondée pour l'Avancement des Sciences, les bibliophiles qui possédaient un exemplaire des rarissimes « produzioni matematiche » du comte marquis de Fagnano éprouveront sans doute l'impression désagréable de quiconque voit un diamant précieux changé en une pierre commune. Mais tous ceux qui s'intéressent au progrès des Sciences mathématiques seront heureux, par contre, de pouvoir consulter dorénavant un Ouvrage précieux pour l'histoire de la Science, qui ne se trouvait plus que dans les bibliothèques les plus complètes et les plus richement dotées. J'ajouterai que la nouvelle publication, faite par MM. Volterra, Loria et Gambioli, ne comprend pas seulement les *Produzioni matematiche*, le chef-d'œuvre de Fagnano, mais qu'elle contient dans son troisième Volume différents écrits du génial mathématicien, ce que l'on a pu retrouver de sa correspondance et sa biographie, écrite par M. Gambioli, avec un soin pieux auquel tout le monde rendra hommage. L'Italie a bien fait de remettre en lumière, de répandre les travaux d'un de ses illustres enfants dont le nom figurera toujours à la place d'honneur parmi ceux des initiateurs de la théorie des fonctions elliptiques.

G. D.

SCHWAHN (Paul). — Mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse. (*Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende*, herausgegeben von E. Jahnke. 8.) Mit 20 Figuren im Text. Un vol. in-8, V-128 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1910.

Cet Ouvrage sur la théorie des éclipses astronomiques est en partie formé par les Conférences publiques sur l'Astronomie sphé-

rique que M. Paul Schwahn a faites à l'Observatoire Uranie, à Berlin. L'Auteur a cru devoir publier ces Conférences, parce que, dans la plupart des manuels astronomiques, la théorie des éclipses n'est traitée qu'incomplètement ou seulement au point de vue de son emploi pour la détermination des longitudes. L'Auteur présente la théorie et les calculs permettant de prédire les éclipses de Lune et de Soleil, les passages des planètes devant le disque du Soleil, les occultations d'étoiles par la Lune. Il a renoncé à la théorie de Hansen, en faveur de l'élégante théorie mathématique de Bessel. De nombreuses figures d'orientation et des exemples traités explicitement ont été joints aux discussions théoriques. Aussi M. Paul Schwahn pense-t-il que son Livre pourra servir de guide aux personnes qui étudient l'Astronomie et aux élèves des grandes Écoles.

Em. et Er. L.

SCHOY (Carl). — Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben. Mit 3 Figuren im Text und 8 Tafeln. Un vol. in-8, VII-40 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1910.

M. Charles Schoy, dans son Livre sur les méthodes de résolution des problèmes sphérico-astronomiques, indique d'abord les moyens purement géométriques qu'employaient les astronomes grecs, indiens et arabes, et montre qu'en soumettant leurs procédés à un examen attentif, on est amené à reconnaître que des formules que l'on avait cru nouvelles résultent des solutions anciennes où le calcul n'entrait pas. L'Auteur a, pour la première fois et très simplement, déterminé l'époque et la durée du crépuscule le plus court par le procédé de projection orthographique au lieu d'employer le procédé de projection stéréographique.

Em. et Er. L.

MAYOR (B.). — Statique graphique des systèmes de l'espace. Un vol. de texte in-8, de 208 pages et un Atlas de 7 planches. Lausanne, F. Rouge et Cie; Paris, Gauthier-Villars; 1910.

Pour appliquer le calcul graphique aux systèmes à trois dimensions, il faut d'abord savoir représenter l'espace sur un plan. Mais

le mode de représentation qu'on adopte, doit avoir égard « à la nature spéciale des éléments géométriques, qui jouent un rôle prépondérant dans la théorie des systèmes de forces. Ces éléments dérivent tous de la ligne droite. » Aussi est-ce la *représentation plane de l'espace réglé* qui forme le principe fondamental de la nouvelle méthode exposée par M. B. Mayor.

Une droite de l'espace dépend de quatre paramètres. Il faut donc, pour la représenter sur un plan Π, lui faire correspondre un système d'éléments dépendant aussi de quatre paramètres : c'est ainsi que la Géométrie descriptive ordinaire définit une droite par ses deux projections (qui dépendent chacune de deux paramètres). Dans le système proposé par M. Mayor, une droite de l'espace est représentée sur le plan Π par *une droite et un point :* et, réciproquement, une droite et un point quelconques du plan Π définissent une droite de l'espace et une seule.

Le principe de la méthode est analogue à celui, bien connu, sur lequel Cremona a fait reposer la théorie des *figures réciproques* de Maxwell. Donnons-nous, une fois pour toutes, un système de vecteurs qui sera dit *système directeur :* ce système sera, par exemple, défini par son *axe central.* Deux droites (f) et (f') de l'espace sont dites *conjuguées* par rapport au système directeur, s'il est posible de réduire ce système à deux vecteurs ayant respectivement pour lignes d'actions (f) et (f'). On sait qu'une droite arbitraire admet une conjuguée et une seule. Ceci posé, une droite (f) de l'espace sera représentée sur le plan Π par les éléments suivants qui, en général, la déterminent complètement :

1° Sa projection orthogonale f sur ce plan ;
2° La trace φ' sur ce plan, de sa conjuguée (f').

A ces éléments, il est souvent utile d'adjoindre ceux-ci, qui s'en déduisent d'ailleurs immédiatement, et qui ne sont autres que les éléments représentatifs de la droite conjuguée de (f) :

3° La projection orthogonale f' de la droite (f') :
4° La trace φ de (f) sur le plan Π.

Dans les applications, il est toujours avantageux de choisir le plan de projection Π perpendiculaire à l'axe central du système directeur. Alors les constructions se simplifient : les projections f

et f' de deux droites conjuguées (f) et (f') sont parallèles, et les traces φ et φ' sont en ligne droite avec le point O où l'axe central du système directeur perce le plan Π.

Mais, en statistique graphique, on n'a pas à représenter que des droites : il faut envisager aussi la représentation des forces ; et c'est ce que M. Mayor fait de la façon suivante : deux forces (F) et (F′) sont dites *conjuguées* par rapport au système directeur, si, pour le système formé par ces deux forces, l'ensemble des *droites de moment nul* (complexe d'action) est le même que pour le système directeur ; en d'autres termes, les lignes d'action de deux forces conjuguées sont deux droites conjuguées, et il existe un nombre λ (positif ou négatif), tel que le système des deux vecteurs (λF) et $(\lambda F')$ soit équivalent au système directeur. Une force (F) sera représentée sur le plan Π par sa projection orthogonale F et par la trace φ' de sa conjuguée. De même que pour les droites, il sera le plus souvent utile d'adjoindre à ces éléments ceux, F′ et φ, qui caractérisent la force conjuguée (F′) ; d'ailleurs, ces derniers éléments se déduisent immédiatement des précédents.

Il reste, pour terminer, à dire quels éléments du plan de projection Π on fera correspondre à un point ou à un plan de l'espace.

Un point sera représenté par sa projection orthogonale sur le plan Π et par la trace sur ce plan de son *plan focal*, lieu des droites de moment nul passant par ce point.

Un plan sera représenté par sa trace sur le plan Π et par la projection orthogonale de son *foyer*, point où se croisent toutes les droites de moment nul de ce plan.

On voit qu'un plan et son foyer ont les mêmes éléments représentatifs. On retrouve donc, comme il arrivait déjà pour la représentation de deux droites conjuguées, « ce caractère dualistique qui distingue les conceptions de la Géométrie réglée ».

Telle est, dans ses traits essentiels, la méthode de M. Mayor. Un point fort intéressant au point de vue théorique est l'extension à l'espace de la notion si importante du *polygone funiculaire :* si l'on envisage dans l'espace un ensemble de plusieurs systèmes de forces, il est possible de leur faire correspondre une suite de *complexes linéaires*, que l'Auteur appelle chaîne funiculaire, e

qui jouit, par rapport à l'ensemble de systèmes de forces, de propriétés toutes semblables à celles du polygone funiculaire d'un ensemble de forces contenues dans un même plan.

A côté de son intérêt théorique, la méthode est susceptible de présenter aussi une utilité pratique, car elle peut servir à la détermination graphique des efforts supportés par les barres d'un système articulé à trois dimensions. L'Auteur en expose plusieurs exemples et donne notamment les épures relatives à certaines constructions techniques, telles que pylônes et coupoles. Malgré la complexité de quelques tracés géométriques, ces épures paraîtront relativement simples, étant donnée la nature du problème à résoudre.

H. VERGNE.

BROGGI (H.). — VERSICHERUNGSMATHEMATIK. Deutsche Ausgabe. Un vol. in-8, VIII-360 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1911.

Le *Bulletin* a déjà rendu compte, en 1906 (¹), de l'édition originale (en italien) du Traité de M. Broggi, et, en 1907, de la traduction française qui en a été faite par M. Lattès. Ce Volume vient d'être traduit en allemand par M. F. Bernstein ; comme le constate le traducteur allemand, la tâche de l'Auteur était particulièrement ingrate, puisqu'il lui fallait concilier le caractère essentiellement pratique de l'Ouvrage avec les tendances théoriques des étudiants auxquels il s'adresse. Les deux traductions qui ont été faites de cet Ouvrage viennent témoigner que l'Auteur a pleinement atteint ce but, ainsi qu'il résultait déjà des Analyses publiées dans le *Bulletin* (²).

R. G.

(¹) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXX$_1$, 1906, p. 141.
(²) *Ibid.*, t. XXXI$_1$, 1907, p. 71.

MÉLANGES.

SUR DIFFÉRENTES PROPRIÉTÉS DES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UNE CONGRUENCE DE COURBES;

PAR M. GASTON DARBOUX.

Considérons les courbes définies par les équations différentielles

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \tag{1}$$

où X, Y, Z sont des fonctions données de x, y, z. Elles forment un assemblage dépendant de deux paramètres, ce que nous appelons aujourd'hui *une congruence;* et réciproquement, toutes les courbes d'une congruence, données en termes finis, satisfont à des équations différentielles de la forme (1).

Si nous écartons le cas où l'on a

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

c'est-à-dire où les courbes de la congruence sont isotropes, nous pourrons toujours admettre qu'on a remplacé X, Y, Z par des quantités qui leur seront proportionnelles c, c', c'' et qui satisferont à la relation

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1. \tag{2}$$

Alors c, c', c'' seront les cosinus directeurs de la tangente à la courbe qui passe au point (x, y, z) et les équations différentielles (1) pourront être remplacées par les suivantes

$$\frac{dx}{c} = \frac{dy}{c'} = \frac{dz}{c''}; \tag{3}$$

de sorte que les trajectoires orthogonales de ces courbes auront

pour unique équation différentielle la suivante

$$c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0, \tag{4}$$

qui est une équation de Pfaff.

On connaît le degré de généralité de cette équation. On sait que, dans le cas où la quantité

$$\mathrm{I} = c\left(\frac{\partial c'}{\partial x} - \frac{\partial c''}{\partial y}\right) + c'\left(\frac{\partial c''}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial z}\right) + c''\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c'}{\partial x}\right) \tag{5}$$

est nulle, elle admet une intégrale de la forme

$$f(x, y, z) = \text{const.}; \tag{6}$$

en sorte que les courbes définies par l'équation (4) sont assujetties à l'unique condition d'être situées sur l'une des surfaces de la famille précédente. On sait aussi que, si I n'est pas nulle, le premier membre de l'équation (4) peut être mis, par l'intégration d'un système d'équations différentielles, sous la forme

$$d\mathrm{A} + \mathrm{B}\,d\mathrm{C} = c\,dx + c'\,dy + c''\,dz, \tag{7}$$

où A, B, C sont trois fonctions indépendantes; en sorte que l'intégration de l'équation (4) est donnée par les formules

$$\mathrm{A} = \varphi(\mathrm{C}), \qquad \mathrm{B} = -\varphi'(\mathrm{C}), \tag{8}$$

où le symbole φ désigne une fonction arbitraire. Les courbes intégrales forment donc un assemblage que Lie aurait appelé d'ordre ∞^∞.

Parmi elles, cependant, on peut en distinguer évidemment certaines, qui forment un assemblage moins étendu, parce qu'elles sont définies par une propriété complémentaire, par exemple celles dont les tangentes sont parallèles à un plan, celles qui satisfont à une seconde équation différentielle de la forme (4) ou d'une forme plus compliquée, d'un ordre plus élevé, etc. Dans un très intéressant Mémoire publié récemment, M. Reginald A. P. Rogers a considéré plus spécialement celles pour lesquelles la droite de cosinus directeurs c, c', c'', qui, dans tous les cas, est normale à la courbe, devient une *normale principale* [1].

---

[1] Reginald A. P. Rogers, *Some differential properties of the orthogonal trajectories of a congruence of curves, with an application to curl and divergence of vectors.* (*Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol. XXIX, sect. A, n° 6, février 1912).

Ces solutions particulières de l'équation (4) sont définies par le système suivant, où s désigne l'arc de la courbe,

$$(9) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \lambda c, \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \lambda c', \qquad \frac{d^2z}{ds^2} = \lambda c'',$$

qui admet une solution avec trois constantes arbitraires.

Elles engendrent donc un *complexe* de courbes qui jouit de cette propriété que les courbes du complexe passant en un point (x, y, z) ont leurs tangentes en ce point situées dans un même plan, normal à la droite dont les cosinus directeurs sont c, c', c''. M. Rogers a eu l'idée très ingénieuse d'introduire ces courbes spéciales d'une manière systématique dans l'étude générale de toutes celles qui satisfont à l'unique équation différentielle

$$c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0.$$

Désignons par la lettre (Φ) ces dernières courbes et par la lettre (G) celles dont les normales principales ont pour cosinus directeurs c, c', c''. Il y aura toujours une courbe (G), et une seule, tangente en un point déterminé M à une courbe (Φ). M. Rogers désigne sous le nom de *courbure normale* et de *torsion normale* de la courbe (Φ) au point M, la courbure et la torsion de la courbe (G) qui lui est tangente en ce point; et son Mémoire contient un grand nombre de propriétés intéressantes et de formules relatives à ces deux éléments.

Je me propose de reprendre ici cette étude par une voie nouvelle, sans introduire la notion des courbes (G), et de rapprocher plusieurs des résultats obtenus par M. Rogers de ceux que Hamilton et Kummer nous ont fait connaître sur les propriétés infinitésimales des congruences rectilignes.

I.

Je commence par remarquer que, dans le cas où la quantité I serait nulle, toutes les courbes satisfaisant à l'équation (4) et passant par un point seraient situées sur une même surface. Cela m'a conduit naturellement à étendre au cas actuel la méthode que j'ai appliquée aux courbes tracées sur une surface, dans la deuxième Partie de mes *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (Livre V, Chap. I).

Considérons un trièdre trirectangle (T) admettant pour axe des z la droite de cosinus directeurs c, c', c'' et dont l'axe des x sera choisi arbitrairement dans le plan perpendiculaire à cette droite. Soient a, a', a'' et b, b', b'' respectivement les cosinus directeurs de l'axe des x et de l'axe des y. Si x, y, z sont les coordonnées du sommet M du trièdre (T), on pourra considérer les 9 cosinus directeurs comme des fonctions connues de x, y, z, et l'on aura les relations bien connues de la forme

$$(10) \qquad a = b'c'' - c'b'', \qquad b = c'a'' - a'c'', \qquad c = a'b'' - b'a'',$$

et toutes celles qu'on en déduira par des permutations circulaires. On aura aussi les suivantes :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial a}{\partial x} = br - cq, & \dfrac{\partial b}{\partial x} = cp - ar, & \dfrac{\partial c}{\partial z} = aq - bp, \\ \dfrac{\partial a}{\partial y} = br' - cq', & \dfrac{\partial b}{\partial y} = cp' - ar', & \dfrac{\partial c}{\partial y} = aq' - bp', \\ \dfrac{\partial a}{\partial z} = br'' - cq'', & \dfrac{\partial c}{\partial z} = cp'' - ar'', & \dfrac{\partial c}{\partial y} = aq'' - bp'' \end{array} \right.$$

et toutes celles qu'on en déduirait en remplaçant a, b, c par a', b', c' ou a'', b'', c''. Ces 27 relations feront connaître les dérivées des 9 cosinus en fonction de 9 quantités, qui sont les rotations du trièdre (T), quand x, y, z varient successivement.

D'après cela, considérons une des courbes (Φ) partant du point M, et soient α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ'' les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe, de sa normale principale et de sa binormale.

Si l'on appelle ω l'angle que la tangente à la courbe (Φ) fait avec l'axe des x du trièdre (T) et ϖ l'angle que sa normale principale fait avec l'axe des z de ce trièdre, on pourra évidemment poser

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' = \cos\omega, \\ b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' = \sin\omega, \\ c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'' = 0, \\ a\beta + a'\beta' + a''\beta'' = -\sin\omega\sin\varpi, \\ b\beta + b'\beta' + b''\beta'' = \cos\omega\sin\varpi, \\ c\beta + c'\beta' + c''\beta'' = \cos\varpi, \\ a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma'' = \sin\omega\cos\varpi, \\ b\gamma + b'\gamma' + b''\gamma'' = -\cos\omega\cos\varpi, \\ c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma'' = \sin\varpi, \end{array} \right.$$

et de là on tirera

$$(13)\quad \begin{cases} \alpha = \alpha \cos\omega + b \sin\omega, \\ \alpha' = \alpha' \cos\omega + b' \sin\omega, \\ \alpha'' = a'' \cos\omega + b'' \sin\omega. \end{cases}$$

Si x, y, z désignent les coordonnées de M et s l'arc de la courbe (Φ), on a d'ailleurs

$$(14)\quad \frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \alpha', \qquad \frac{dz}{ds} = \alpha''.$$

Cela posé, différentions les formules (12), en tenant compte des formules de Serret-Frenet,

$$(15)\quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta}{\rho}, \qquad \frac{d\alpha'}{ds} = \frac{\beta'}{\tau}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{\gamma}{\tau} - \frac{\alpha}{\rho},$$

où ρ désigne le rayon de courbure de la courbe et τ son rayon de torsion.

On aura

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\varpi}{\rho} = \dfrac{d\omega}{ds} + \mathrm{R}, \\ \dfrac{\cos\varpi}{\rho} = \mathrm{P} \sin\omega - \mathrm{Q} \cos\omega, \\ \dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{\tau} = \mathrm{P} \cos\omega + \mathrm{Q} \sin\omega. \end{cases}$$

où P, Q, R ont les expressions suivantes

$$(17)\quad \begin{cases} \mathrm{P} = p \dfrac{dx}{ds} + p' \dfrac{dy}{ds} + p'' \dfrac{dz}{ds}, \\ \mathrm{Q} = q \dfrac{dx}{ds} + q' \dfrac{dy}{ds} + q'' \dfrac{dz}{ds}, \\ \mathrm{R} = r \dfrac{dx}{ds} + r' \dfrac{dy}{ds} + r'' \dfrac{dz}{ds} \end{cases}$$

et sont par suite les rotations du trièdre (T), quand on se déplace sur la courbe (Φ).

Si l'on pose

$$(18)\quad \begin{cases} \mathrm{P}_1 = ap + a'p' + a''p'', & \mathrm{P}_2 = bp + b'p' + b''p'', & \mathrm{P}_3 = cp + c'p' + c''p'', \\ \mathrm{Q}_1 = aq + a'q' + a''q'', & \mathrm{Q}_2 = bq + b'q' + b''q'', & \mathrm{Q}_3 = cq + c'q' + c''q'', \\ \mathrm{R}_1 = ar + a'r' + a''r'', & \mathrm{R}_2 = br + b'r' + b''r'', & \mathrm{R}_3 = cr + c'r' + c''r'', \end{cases}$$

on a, pour un déplacement sur la courbe (Φ),

$$(19)\qquad \begin{cases} P = P_1 \cos\omega + P_2 \sin\omega, \\ Q = Q_1 \cos\omega - Q_2 \sin\omega, \\ R = R_1 \cos\omega + R_2 \sin\omega, \end{cases}$$

et les formules (16) prennent la forme définitive

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\varpi}{\rho} = \dfrac{d\omega}{ds} + R_1 \cos\omega + R_2 \sin\omega, \\ \dfrac{\cos\varpi}{\rho} = P_2 \sin^2\omega + (P_1 - Q_2)\sin\omega\cos\omega - Q_1 \cos^2\omega, \\ \dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{\tau} = P_1 \cos^2\omega + (P_2 + Q_1)\sin\omega\cos\omega + Q_2 \sin^2\omega, \end{cases}$$

où P_2, P_1, ... sont des fonctions connues de x, y, z. La quantité que nous avons désignée plus haut par I s'exprime en fonction de P_1 et de Q_2 par la formule

$$(21)\quad I = c\left(\frac{\partial c'}{\partial z} - \frac{\partial c''}{\partial y}\right) + c'\left(\frac{\partial c''}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial z}\right) + c''\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c'}{\partial x}\right) = P_1 + Q_2,$$

dont nous aurons à faire usage.

II.

Les formules (20) ont la plus extrême analogie avec celles que j'ai données au Chapitre indiqué plus haut des *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Elles donnent lieu à des conséquences analogues.

On voit, d'après ces formules, que $\frac{\cos\varpi}{\rho}$ et $\frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds}$ seront les mêmes pour toutes les courbes (Φ) ayant la même tangente en M. Ces deux éléments sont précisément ceux qui ont été considérés par M. Rogers sous les noms de courbure normale et de torsion normale. Car si l'on considère la courbe (G) tangente à (Φ), pour cette courbe (G) on aura $\varpi = 0$, et les éléments précédents se réduiront à $\frac{1}{\rho}$ et à $\frac{1}{\tau}$. On voit donc que, sans introduire les courbes (G), nous retrouvons les résultats de M. Rogers. La seconde formule (20) donne la généralisation du théorème de Meusnier; la troisième, la généralisation de la formule de Bonnet. On peut encore étendre au cas actuel la formule de Laguerre.

On a ici, en effet,

$$(22)\quad \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) = 2(P_2+Q_1)\sin\omega\cos\omega - (P_1-Q_2)(\cos^2\omega-\sin^2\omega)$$
$$= 2\left(\frac{d\varpi}{ds}-\frac{1}{\tau}\right) - I.$$

En utilisant cette relation, on trouve une équation de la forme suivante :

$$(23)\qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right) + \left(I - 2\frac{d\varpi}{ds} + \frac{2}{\tau}\right)\frac{\sin\varpi}{\rho} = \mathcal{F}_3(\sin\omega, \cos\omega),$$

$\mathcal{F}_3$ désignant une fonction homogène du troisième degré de $\sin\omega$, $\cos\omega$. Le premier membre de cette équation sera donc, comme le second, le même pour toutes les courbes ayant même tangente. Pour $I = 0$, on retrouve la formule de Laguerre.

On pourrait, ici encore, appliquer le procédé que nous avons indiqué au Chapitre cité plus haut, pour obtenir une suite de formules analogues à la précédente, dans le cas particulier des courbes tracées sur une surface [1].

III.

M. Rogers a rattaché à l'emploi des formules (20), où l'on fait $\varpi = 0$, la considération de certains systèmes de lignes analogues aux lignes de courbure, aux lignes asymptotiques, etc., d'une surface. Par exemple, si l'on écrit que la courbure normale $\frac{\cos\varpi}{\rho}$ est nulle, on a une congruence de courbes analogues aux lignes asymptotiques d'une famille de surfaces; de même, si l'on écrit que la torsion géodésique $\frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds}$ est nulle, on a une première généralisation des lignes de courbure, à laquelle on peut en adjoindre une autre en cherchant les lignes de plus grande ou de plus petite courbure normale. La relation (22) montre que ces deux généralisations ne peuvent conduire à un même système de lignes que si la fonction I est nulle, c'est-à-dire si l'on est ramené au cas des courbes tracées sur une surface. Il est facile de rattacher les relations entre ces trois systèmes de lignes : courbes de courbure

---

[1] *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IIe Partie, p. 359-360.

normale nulle, courbes de plus grande et de plus petite courbure normale, courbes de torsion géodésique nulle, auxquelles on pourrait ajouter encore les courbes de torsion géodésique maximum ou minimum, etc., aux belles propriétés établies par Hamilton et Kummer pour les congruences rectilignes.

Considérons, en effet, les droites de cosinus directeurs c, c', c'', menées par les divers points du plan des xy du trièdre (T). Ces droites engendrent une congruence et celles qui émanent des points infiniment voisins du sommet M du trièdre forment un pinceau, auquel on peut appliquer tous les théorèmes de Kummer. Nous allons d'abord définir ce pinceau.

Un point M′ du plan des xy de (T), infiniment voisin de M, a pour coordonnées, par rapport aux axes fixes,

$$x + \alpha\, ds, \quad y + \alpha'\, ds, \quad z + \alpha''\, ds;$$

et la droite menée par ce point a pour cosinus directeurs

$$c + dc, \quad c' + dc', \quad c'' + dc''$$

ou

$$c + (aQ - bP)\, ds, \quad c' - (a'Q - b'P)\, ds, \quad c'' - (a''Q - b''P)\, ds.$$

Elle fera donc avec les axes du trièdre (T) des angles dont les cosinus seront

$$Q\, ds, \quad -P\, ds, \quad 1.$$

Quant au point M′, ses coordonnées relatives à ce trièdre seront évidemment

$$ds \cos\omega, \quad ds \sin\omega, \quad 0.$$

Donc les équations, *relatives au trièdre* (T), de la droite de la congruence rectiligne considérée, seront

$$\begin{aligned} x - ds\cos\omega &= Q z\, ds, \\ y - ds\sin\omega &= -P z\, ds, \end{aligned}$$

ou, en remplaçant P et Q par leurs valeurs (19),

$$(24) \qquad \begin{cases} x = ds\cos\omega(1 + Q_1 z) + Q_2 z\, ds \sin\omega, \\ y = -ds\cos\omega P_1 z + (1 - P_2 z)\, ds \sin\omega. \end{cases}$$

On sait que toutes les droites d'un pinceau peuvent être considérées comme rencontrant deux droites fixes, dont la déter-

mination suffit à faire connaître le pinceau. On les obtiendra comme il suit : à chaque valeur de ω correspondent une série de droites du pinceau qui engendreront une surface réglée passant par l'axe des z du trièdre (T). Le plan tangent à cette surface réglée en un point de l'axe des z aura pour équation

$$(25)\qquad \frac{Y}{X} = \frac{-P_1 z \cos\omega + (1 - P_2 z)\sin\omega}{(1 + Q_1 z)\cos\omega + Q_2 z \sin\omega},$$

et quand z restera fixe, il variera généralement avec ω, à moins qu'on n'ait

$$(26)\qquad \frac{-P_1 z}{1 + Q_1 z} = \frac{1 - P_2 z}{Q_2 z}.$$

Cette équation du second degré détermine les *points focaux* du pinceau ; c'est-à-dire les deux points où toutes les surfaces réglées du pinceau auront les mêmes plans tangents. Ces plans tangents, c'est-à-dire les *plans focaux* du pinceau, seront déterminés par l'équation

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{-P_1 z}{1 + Q_1 z}.$$

Désignons par a et b les deux valeurs de z, par α et β les valeurs correspondantes de ζ. Un calcul facile nous permettra d'exprimer P_1, P_2, Q_1, Q_2 en fonction de a, b, α, β, dont la signification géométrique nous est connue. On trouve ainsi

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} P_1 &= -\frac{(a-b)\sin\alpha\sin\beta}{ab\sin(\alpha-\beta)},\\ Q_1 &= \frac{\alpha\sin\beta\cos\alpha - b\sin\alpha\cos\beta}{ab\sin(\alpha-\beta)},\\ P_2 &= \frac{a\sin\alpha\cos\beta - b\sin\beta\cos\alpha}{ab\sin(\alpha-\beta)},\\ Q_2 &= -\frac{(a-b)\cos\alpha\cos\beta}{ab\sin(\alpha-\beta)}. \end{aligned}\right.$$

La quantité I aura pour expression

$$(28)\qquad I = \frac{b-a}{ab}\cot(\alpha-\beta).$$

On voit qu'elle ne deviendra nulle (en laissant de côté le cas où

a et b sont égaux) que si l'on a

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2},$$

ce qui est un résultat bien connu.

Si l'on introduit les valeurs P_1, P_2, Q_1, Q_2 dans les deux dernières formules (20), elles prennent les formes suivantes :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin(\alpha-\beta)\frac{\cos\varpi}{\rho} = \frac{1}{b}\sin(\omega-\beta)\cos(\omega-\alpha) - \frac{1}{a}\sin(\omega-\alpha)\cos(\omega-\beta),\\ &\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\frac{\sin(\omega-\alpha)\sin(\omega-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)},\end{aligned}\right.$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &2\sin(\alpha-\beta)\frac{\cos\varpi}{\rho} = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sin(\alpha-\beta) + \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\sin(2\omega-\alpha-\beta),\\ &2\left(\frac{d\varpi}{ds}-\frac{1}{\tau}\right) = \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(2\omega-\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}.\end{aligned}\right.$$

Ces formules élégantes mettent en évidence les relations que M. Rogers a signalées. Par exemple, les lignes de plus grande et plus petite courbure moyenne sont distinctes des lignes de torsion nulle, etc. Je n'insisterai pas là-dessus, mais j'établirai des relations entre les courbures considérées et d'autres éléments relatifs à la congruence.

IV.

Reprenons les équations (24) qui définissent la normale à la courbe (Φ), considérée au point, voisin de M, qui a pour coordonnées $ds\cos\omega$, $ds\sin\omega$, 0 ; et écrivons-les sous la forme plus simple, déjà donnée,

$$\begin{aligned} x &= ds(\cos\omega + Qz),\\ y &= ds(\sin\omega - Pz).\end{aligned}$$

On verra facilement que le pied de la plus courte distance de cette droite et de l'axe des z est défini par la valeur suivante de z :

$$(30)\qquad z = \frac{P\sin\omega - Q\cos\omega}{P^2+Q^2},$$

de sorte que les coordonnées x, y de l'extrémité de cette courte

distance ont pour expressions

$$(31)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{P\,ds(P\cos\omega + Q\sin\omega)}{P^2+Q^2}, \\ y = \dfrac{Q\,ds(P\cos\omega + Q\sin\omega)}{P^2+Q^2}. \end{cases}$$

Si donc on désigne par δ cette plus courte distance et par θ l'angle qu'elle fait avec l'axe des x du trièdre (T), on aura

$$\frac{\delta\cos\theta}{P\,ds} = \frac{\delta\sin\theta}{Q\,ds} = \frac{P\cos\omega + Q\sin\omega}{P^2+Q^2}.$$

Ainsi la plus courte distance elle-même aura pour valeur

$$(32)\qquad \delta = \frac{P\cos\omega + Q\sin\omega}{\sqrt{P^2+Q^2}}\,ds,$$

et l'angle qu'elle fait avec l'axe des x du trièdre (T) sera déterminé en grandeur et en signe par les formules

$$(33)\qquad \frac{\cos\theta}{P} = \frac{\sin\theta}{Q} = \frac{1}{\sqrt{P^2+Q^2}}.$$

Il est évident, d'ailleurs, qu'on a

$$(34)\qquad \sqrt{P^2+Q^2}\,ds = d\tau,$$

$d\tau$ désignant l'angle des deux normales infiniment voisines.

Si l'on compare ces diverses relations aux formules (13), on voit qu'on a

$$(35)\qquad \delta = ds\cos(\omega - \theta).$$

$$(36)\qquad \delta\,d\tau = ds\left(d\varpi - \frac{ds}{\tau}\right).$$

Cette dernière formule donne le *moment* des deux normales infiniment voisines. On peut lui adjoindre la suivante :

$$(37)\qquad ds\frac{\cos\varpi}{\rho} = d\tau\sin(\omega - \theta).$$

V.

Nous ne voulons pas insister sur les nombreuses conséquences de ces formules; mais nous allons montrer qu'on peut les remplacer par des constructions des plus simples.

Rappelons d'abord les propriétés fondamentales du plan tangent aux surfaces réglées, dues à Michel Chasles.

Si, dans un plan *quelconque* passant par une génératrice rectiligne de la surface, on élève en un point convenablement choisi E de cette génératrice, le *point central*, une perpendiculaire ED égale à une ligne donnée qu'on appelle le *paramètre de distribution*, l'angle que le plan tangent à la surface en un point quelconque M de la droite fait avec le *plan central*, c'est-à-dire le plan tangent en E, est égal, en grandeur et en signe, à l'angle plan PDE. On peut compléter cette construction par la remarque suivante : coupons la surface réglée par le plan (Π) perpendiculaire en M à la génératrice rectiligne ME, le plan (Π) coupe la génératrice rectiligne infiniment voisine de ME en un point M′ et l'on reconnaît immédiatement que MM′ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle infiniment petit, situé dans le plan (Π) et dont les deux autres côtés sont : l'un, une droite MS′ égale et parallèle à la plus courte distance des deux génératrices infiniment voisines ; l'autre, une droite M′S′ égale à l'angle $d\tau$ des deux génératrices multiplié par ME. Comme l'angle en M de ce triangle sert de mesure à l'angle des deux plans tangents à la surface réglée en M et en E, il est égal à l'angle MDE ; et les deux triangles MDE, MM′S′ sont semblables. Si donc nous désignons par ds le déplacement $\overline{MM'}$ du point M, évidemment normal en M à la génératrice rectiligne, nous aurons, en écrivant que les côtés des deux triangles semblables sont proportionnels,

$$\frac{ds}{\overline{MD}} = \frac{\overline{EM}\,d\tau}{\overline{EM}} = \frac{\delta}{\overline{ED}}.$$

Et de là on déduit les deux formules

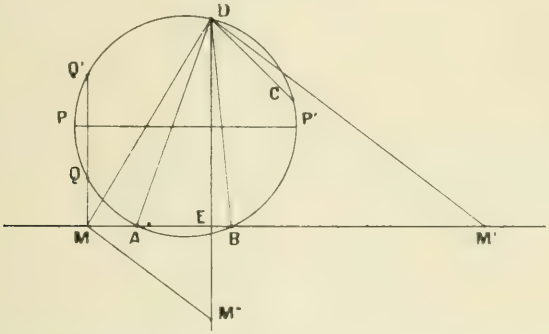
$$(38) \qquad d\tau = \frac{ds}{\overline{DM}}, \qquad \delta = ds\,\frac{\overline{ED}}{\overline{DM}},$$

qui complètent la construction de Chasles.

Appliquons ces remarques si simples au cas actuel.

Toutes les surfaces réglées de la congruence qui contiennent la droite du pinceau partant de M ont les mêmes plans tangents en deux points A et B (*voir* la figure), situés respectivement aux distances a, b du point M, et ces deux plans tangents communs à

toutes les surfaces font respectivement des angles donnés α, β avec un plan fixe passant par la droite MAB.



Si donc, sur la droite AB et dans un plan fixe passant par cette droite, on construit un segment de cercle capable de l'angle $\alpha - \beta$, tous les points D relatifs aux surfaces réglées du pinceau qui contiennent MAB seront nécessairement sur ce segment, puisqu'il faut que les rayons DA, DB émanés de l'un d'eux fassent entre eux l'angle $\alpha - \beta$.

Ces diverses surfaces réglées sont caractérisées par l'angle ω que fait le plan tangent en M avec le plan fixe passant par MAB. Si l'on se donne cet angle ω, il est clair que le point D sera défini par la condition que l'angle MDA soit égal à $\omega - \alpha$. Il sera donc à l'intersection du cercle déjà construit avec le segment décrit sur MA et capable de l'angle $\omega - \alpha$.

On voit ainsi que, si l'on choisit sur le cercle un point C tel que l'angle BDC soit égal à β, on aura aussi

$$\mathrm{ADC} = \alpha. \qquad \mathrm{MDC} = \omega.$$

Par suite, comme l'angle θ introduit plus haut est précisément l'angle que fait, avec le plan fixe, le plan tangent au point central E, on aura encore

$$\mathrm{EDC} = \theta.$$

Il serait aisé de le calculer, sur la figure, en fonction de a, b, α, β et ω. On retrouverait ainsi les formules obtenues plus haut.

Nous aurons également les formules déjà démontrées

$$(39) \qquad d\tau = \frac{ds}{\mathrm{DM}}, \qquad \delta = ds\,\frac{\overline{\mathrm{ED}}}{\overline{\mathrm{DM}}}.$$

Et les relations (35), (36), (37) nous donneront

$$(40)\qquad \frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{\tau} = \frac{\overline{ED}}{\overline{DM}^2},$$

$$(41)\qquad \frac{\cos\varpi}{\rho} = \frac{\overline{ME}}{\overline{DM}^2}.$$

Si l'on élève en D la perpendiculaire à DM, qui coupe AB en M′, on déduit de la relation précédente

$$(42)\qquad \frac{\rho}{\cos\varpi} = \overline{MM'},$$

formule évidente géométriquement, si l'on remarque que *les plans tangents à la surface réglée en* M *et en* M′ *sont rectangulaires.*

En élevant de même une perpendiculaire en M à MD jusqu'à sa rencontre en M″ avec ED, on aura

$$(43)\qquad \frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\overline{DM''}}.$$

La construction que nous avons donnée du point central entraîne les propriétés des *points limites* de Kummer. Les positions extrêmes de E s'obtiennent quand le point D vient se placer à l'une des extrémités P, P′ du diamètre parallèle à AB. D'après les formules données, les directions de plus grande ou de plus petite courbure normale, qui sont rectangulaires, correspondent aux positions du point D qui sont en ligne droite, soit avec M et P, soit avec M et P′. Les points Q, Q′ situés sur la perpendiculaire élevée en M à la génératrice, points qui ne sont pas toujours réels, donnent les directions pour lesquelles la courbure normale est nulle, etc.

VI.

Les résultats précédents pourraient être beaucoup étendus et ils sont susceptibles d'applications variées. Je me bornerai, pour aujourd'hui, à ce qui précède; mais, en terminant, je reviendrai sur les courbes considérées par M. Rogers.

Ce sont celles pour lesquelles la normale principale se confond

avec l'axe des z du trièdre (T), c'est-à-dire pour lesquelles on a $\varpi = 0$. Elles satisfont donc à l'équation différentielle

$$(44) \qquad \frac{d\omega}{ds} + R_1 \cos\omega - R_2 \cos\omega = 0,$$

à laquelle il faut joindre les trois équations

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= a \cos\omega + b \sin\omega, \\ \frac{dy}{ds} &= a' \cos\omega + b' \sin\omega, \\ \frac{dz}{ds} &= a'' \cos\omega + b'' \sin\omega. \end{aligned} \right.$$

L'ensemble des équations (43) et (44) forme un système qui s'intègre avec trois constantes arbitraires. On pourrait, par exemple, former une équation du troisième ordre à laquelle satisferait ω. Les lignes (G) ainsi obtenues sont analogues aux lignes géodésiques des surfaces, mais elle ne donnent la solution d'aucun problème de Calcul des Variations, tout au moins de la nature de ceux qu'on a considérés jusqu'ici. Le problème du Calcul des Variations qui correspond à celui des lignes géodésiques pourrait s'énoncer comme il suit :

Parmi toutes les courbes satisfaisant à l'équation différentielle

$$(46) \qquad c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0,$$

trouver celle qui permet d'aller d'un point à un autre par le chemin le plus court. L'application pure et simple des méthodes du Calcul des Variations conduit à la considération de l'intégrale

$$\int ds - \lambda(c\,dx + c'\,dy + c''\,dz),$$

et aux équations différentielles

$$(47) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2x}{ds^2} - c\frac{d\lambda}{ds} + \lambda\left[\frac{dy}{ds}\left(\frac{\partial c'}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y}\right) - \frac{dz}{ds}\left(\frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial c''}{\partial x}\right)\right] = 0, \\ &\frac{d^2y}{ds^2} - c'\frac{d\lambda}{ds} + \lambda\left[\frac{dz}{ds}\left(\frac{\partial c''}{\partial y} - \frac{\partial c'}{\partial z}\right) - \frac{dx}{ds}\left(\frac{\partial c'}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y}\right)\right] = 0, \\ &\frac{d^2z}{ds^2} - c''\frac{d\lambda}{ds} + \lambda\left[\frac{dx}{ds}\left(\frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial c''}{\partial x}\right) - \frac{dy}{ds}\left(\frac{\partial c''}{\partial y} - \frac{\partial c'}{\partial z}\right)\right] = 0, \end{aligned} \right.$$

qui forment un système du quatrième ordre, lorsqu'on leur adjoint l'équation (46).

Si on les multiplie successivement par a, a', a'', puis par b, b', b'', puis par c, c', c'', on obtient trois équations équivalentes, qui se réduisent aux deux suivantes

$$(48)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\varpi}{\rho} + \lambda I = 0, \\ \dfrac{\cos\varpi}{\rho} - \dfrac{d\lambda}{ds} + \lambda(P_3 \sin\omega + Q_3 \cos\omega) = 0. \end{cases}$$

On voit que, si l'on a

$$I = 0,$$

on retrouve la propriété du plan osculateur des lignes géodésiques.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

PLANCK (Max). — *Ueber neue thermodynamische Theorien* (Nernstsches Wärmetheorem u. Quantenhypothese). In-8, 34 p. Leipzig, Akadem. Verlagsgesellschaft. 1,60 m.

RIECKE (Eduard). — *Lehrbuch der Physik zu eigenem Studium u. zum Gebrauche bei Vorlesungen.* 1. Bd. *Mechanik, Molekularerscheingn. u. Akustik. Optik.* 5e édition augmentée. Gr. in-8, XVI-600 p. avec 475 fig. Leipzig, Veit und Co. 12 m.; relié, 13 m.

BARLOW. — *Table of square cube, square roots.* 200 p. New-York, Spon et Co. 1,50 dollar.

CARVALLO (E.). — *Le Calcul des Probabilités et ses Applications.* In-8, IX-169 p. avec 15 fig. Paris, Gauthier-Villars. 6fr,50.

DEDEKIND (Rich.). — *Stetigkeit u. irrationale Zahlen.* 4. unveränd. Aufl. Gr. in-8, VII-24 p. Braunschweig, F. Vieweg et Sohn. 1 m.

— *Was sind u. was sollen die Zahlen?* 3. unveränd. Aufl. In-8, XXI-58 p. Braunschweig, F. Vieweg et Sohn. 1,80 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DINI (ULISSE). — SULLI SVILUPPI IN SERIE PER LA RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE DATE ARBITRARIAMENTE IN UN CERTO INTERVALLO. *Lezioni date nella Università di Pisa.* 1 vol. in-8° autographié de 477 pages. Pisa, Nistri; 1911.

1. La dernière Partie de ces Leçons autographiées (pages 137-477), devait, dès 1880, former le second Volume du Livre de M. Dini : *Sur les séries de Fourier et autres représentations analytiques des fonctions d'une variable réelle.*

La première Partie (pages 1-136) fut exposée par l'Auteur dans ses leçons de l'année scolaire 1903-1904 à l'Université de Pise. Depuis cette époque, de nombreux résultats sur les mêmes sujets ont été obtenus au moyen des équations intégrales. La méthode exposée ici est la même que celle qui est suivie dans tout le Livre sur les séries de Fourier et conduit souvent à une plus grande généralité que les méthodes plus récentes.

L'Auteur se réserve d'imprimer sous une forme définitive les leçons qu'on l'a prié de publier dès maintenant.

PREMIÈRE PARTIE. — *Développements en série de fonctions* H *qui satisfont à l'équation du second ordre*

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dH}{dx}\right) + [F(x)c(z) - F_1(x)]H = 0.$$

Il est nécessaire de rappeler une généralisation des séries de Fourier indiquées dans le Volume intitulé : *Sur les séries de Fourier.*

Il s'agit de reconnaître si une fonction $f(x)$ d'une variable réelle, donnée dans un intervalle (a, b) peut être représentée analytiquement au moyen d'une série de forme donnée, quand les termes de cette série, ou les coefficients de ces termes, sont des

intégrales prises entre les limites a et b et telles que la fonction donnée $f(x)$ figure en facteur sous le signe somme.

M. Dini a montré, en suivant une voie ouverte par Du Bois Reymond, que cela revient à chercher si la série considérée rentre dans la forme

$$\int_a^b f(x)\frac{\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)}{G(x)-G_1(x)}dx$$
$$+\sum_1^\infty \int_a^b f(x)\frac{[\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)-\varphi(x-\alpha,\alpha,h_{n-1})]}{G(x)-G_1(x)}dx,$$

h_n étant une constante positive ($>\varepsilon>0$) devenant infinie en même temps que l'entier n, et $\varphi(t,\alpha,h_n)$ étant, pour toute valeur du paramètre α comprise entre a et b, une des fonctions étudiées en détail dont la propriété fondamentale est la suivante :

Si $a\leqq\alpha<b$, on a

$$\lim_{n=\infty}\int_0^t \varphi(t,\alpha,h_n)\,dt = G(\alpha),$$

quand $0<t\leqq b-\alpha$, et

$$\lim_{n=\infty}\int_0^t \varphi(t,\alpha,h_n)\,dt = G_1(\alpha),$$

quand

$$a-\alpha\leqq t<0.$$

L'un des exemples les plus simples permettant de se représenter une de ces fonctions est

$$\varphi(t,\alpha,h_n)=\frac{h_n\varphi_n}{1-h_n^2\varphi_n^2t^2},$$

φ_n désignant une fonction de α, toujours positive (et même supérieure à un nombre positif donné ε) et toujours finie; pour cette fonction $G(\alpha)=G_1(\alpha)=\frac{\pi}{2}$.

Le cas le plus important est celui des développements de la forme

$$f(\alpha)=\Sigma q_n H_n(\alpha),$$

les fonctions $H_n(x)$ (pour $n=1,2,3,\ldots$) étant telles que l'on ait

$$\int_a^b F(x)H_m(x)H_n(x)\,dx=0 \qquad (m\neq n).$$

On considérera spécialement le cas qui se présente dans de nombreuses questions de Physique mathématique (en particulier dans la propagation de la chaleur et l'étude des vibrations), où les fonctions H sont des intégrales de l'équation du second ordre mise par Kneser sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dH}{dx}\right) + (gz - l)H = 0,$$

où K, g, l sont des fonctions données de x, régulières ainsi que leurs deux premières dérivées, les deux premières K et g étant supposées positives et différentes de zéro dans un intervalle (a, b).

On désigne une intégrale de cette équation par $H(z, x)$, en mettant en évidence la valeur z du paramètre, et l'on démontre qu'on a

$$\int_a^b g\,H(\lambda_m, x)\,H(\lambda_m, x)\,dx = 0,$$

λ_m et λ_n étant deux valeurs distinctes de z satisfaisant aux conditions aux limites

$$\left.\begin{array}{ll} K\dfrac{dH}{dx} - h'H = 0 & \text{pour } x = a \\ K\dfrac{dH}{dx} - hH = 0 & \text{pour } x = b \end{array}\right\} \quad (h, h' \text{ constants}).$$

En désignant par w_1, w_2 deux intégrales déterminées par les conditions

$$w_1(a) = 0, \qquad w_1'(a) = 1, \qquad w_2(a) = 1, \qquad w_2'(a) = 0,$$

quel que soit z, on démontre le théorème suivant qui doit être considéré comme fondamental :

Si une fonction $f(x)$ est intégrable entre a et b, ainsi que les produits $w_1 f(x)$, $w_2 f(x)$ et si l'on sait que, pour toutes les fonctions normales relatives à l'équation différentielle du second ordre, les intégrales $\int_a^b f(x)\,H(x)\,dx$ sont nulles, on devra nécessairement avoir $f(x) \equiv 0$.

C'est en s'appuyant sur ce théorème que l'on étudie la possibi-

lité du développement d'une fonction $f(x)$ en série $\Sigma q_n H_n(x)$ et l'unicité de ce développement, après avoir ramené l'équation différentielle à la forme canonique

$$H'' + (z^2 - 1)H = 0.$$

Deuxième Partie. — Elle commence par l'examen des cas principaux dans lesquels les séries données pour la représentation analytique d'une fonction d'une variable réelle dans un intervalle (a, b) convergent uniformément dans une portion de cet intervalle où la fonction elle-même est finie et continue.

On passe ensuite à l'étude des séries qui se déduisent des séries précédentes quand on intègre, entre des limites déterminées, les termes de l'une de ces séries ou ces termes multipliés par une fonction de x. On précise les conditions permettant d'admettre l'égalité suivante :

$$\int_c^{x_0} f(x)\psi(x)\,dx = \int_c^{x_0} \psi(x)\,dx \int_a^b f(\alpha)\frac{\varphi(\alpha - x, x, h_0)}{G(\alpha) + G_1(\alpha)}\,d\alpha$$
$$+ \sum_1^\infty \int_c^{x_0} \psi(x)\,dx \int_a^b f(\alpha)\frac{[\varphi(\alpha - x, x, h_n) - \varphi(\alpha - x, x, h_{n-1})]}{G(\alpha) + G_1(\alpha)}\,d\alpha,$$

c et x_0 étant deux nombres de l'intervalle (a, b).

Ces résultats donnent lieu à beaucoup de conséquences connues quand on particularise la nature des développements dont on part et les fonctions $f(x)$, $\psi(x)$; on prend comme exemple les séries de Fourier, les séries de fonctions de Legendre, les séries de fonctions de Bessel représentant une fonction donnée $f(x)$.

On obtient de nouvelles formules très générales en supposant que les fonctions $f(x)$ et $\psi(x, \xi)$ satisfont à la condition

$$\int_c^{\xi} f(x)\psi(x, \xi)\,dx = \rho(\xi) - \rho(c),$$

puis en introduisant une fonction $\theta(\xi, \eta)$ et en écrivant

$$\int_c^{\eta} [\rho(\xi) - \rho(c)]\,\theta(\xi, \eta)\,d\xi = \int_c^{\eta} \theta(\xi, \eta)\,d\xi \int_c^{\xi} f(x)\psi(x, \xi)\,dx.$$

Si les fonctions $\psi(x, \xi)$, $\theta(x, \eta)$ ont pu être choisies de façon

que

$$\int_x^{\eta} \psi(x, \xi)\, \theta(\xi, \eta)\, d\xi = \mu(x)\, \nu(\eta),$$

on trouve, en s'appuyant sur une formule de Dirichlet,

$$f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\nu(x)} \int_c^x [\rho(\xi) - \rho(c)]\, \theta(\xi, x)\, d\xi \right],$$

sous des conditions qui sont précisées.

Un grand nombre de formules connues sont rattachées aux résultats très généraux qui précèdent. Je citerai seulement cette conséquence du développement de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

savoir :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\, dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

et des généralisations de cette dernière formule.

3. Après s'être occupé de l'intégration terme à terme des séries fournissant la représentation analytique d'une fonction $f(x)$ donnée dans un intervalle (a, b), on passe à la dérivation terme à terme de ces séries : la série des dérivées des termes d'une série représentant une fonction $f(x)$ ne représente pas toujours la dérivée $f'(x)$ de cette fonction, même si cette dérivée est finie et continue.

Si l'on considère le développement de Fourier pour une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, la dérivation terme à terme sera applicable si les valeurs extrêmes $f(\pi)$ et $f(-\pi)$ sont égales entre elles. Si l'on n'a pas $f(\pi) = f(-\pi)$, pour que la série des dérivées

$$\sum_1^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx),$$

convenablement modifiée, représente $f'(x)$ aux points ordinaires de l'intervalle $(-\pi, \pi)$, il faudra ajouter à ses termes les termes

correspondants de la série

$$\frac{f(\pi)-f(-\pi)}{2\pi}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{f(\pi)-f(-\pi)}{\pi}\cos nx.$$

Une étude analogue est faite pour les développements en série de fonctions de Bessel, de Legendre, de Jacobi.

4. Les derniers Chapitres se rapportent à la façon dont les termes d'une série représentant une fonction donnée tendent vers zéro, au produit de deux de ces séries, à l'intégrale de Fourier et à des intégrales analogues.

On doit se féliciter que M. Dini ait consenti à publier sans retard les résultats si nombreux et si intéressants de ses Leçons, et l'on souhaite vivement que le temps ne lui manque pas pour publier les compléments dont il parle dans sa Préface.

E. Lacour.

HEYWOOD (H.-B.) et FRÉCHET (M.). — L'équation de Fredholm et ses applications a la Physique mathématique. Avec une Préface et une Note de M. Jacques Hadamard; 1 vol. grand in-8, vi-165 pages. Paris, A. Hermann et fils; 1912.

Nous ne saurions mieux faire, pour donner une idée du but et de l'esprit de cet Ouvrage, que de reproduire les lignes suivantes, extraites de la Préface de M. Hadamard : « A mesure que, en Analyse, problèmes et méthodes tendent à perdre de leur caractère formel et à dépasser le cercle des cas d'intégrabilité proprement dits, il semble bien que l'intégration et non plus la différentiation doive apparaître comme l'élément simple, comme l'outil le plus usuel, parce que le plus puissant et le plus maniable, du calcul infinitésimal. L'intervention des équations intégrales dans l'étude des problèmes de la Physique mathématique est, au fond, une phase de cette évolution.... La belle méthode qu'on doit à Fredholm marque un tel progrès qu'il importe de la rendre accessible... à tous ceux qui, à quelque degré que ce soit, étudient les Mathématiques supérieures. »

MM. Heywood et Fréchet, en abordant ce sujet, « ont visé à être clairs, élémentaires et pratiques. Ils ont retenu de la théorie tout ce qui a déjà acquis sa forme définitive et pratiquement utilisable. Ils n'ont pas séparé cette théorie des applications qui en sont la raison d'être et l'origine même, et qu'ils ont passées en revue avec grand soin. Grâce à l'œuvre ainsi conçue, nos étudiants pourront, tout en restant sûrs de ne pas être entraînés dans des difficultés inutiles, posséder aisément le nouvel instrument analytique ».

L'Ouvrage est divisé en trois Parties : après une courte introduction relative aux fonctions orthogonales, à la normalisation, aux constantes de Fourier, aux inégalités de Bessel, un premier Chapitre contient l'énoncé des problèmes de Physique mathématique qui conduisent à une équation de Fredholm de deuxième espèce

$$\varphi(M) - \lambda \int_D K(M, P)\, \varphi(P)\, d\omega_P = f(M).$$

Le second Chapitre est consacré à l'étude de cette équation, et les résultats trouvés sont utilisés dans un troisième Chapitre, pour résoudre les problèmes qui ont été posés dans le premier.

I. Les problèmes qu'on rencontre en Physique reviennent en général à chercher une fonction satisfaisant à une équation aux dérivées partielles dans un certain domaine et vérifiant une relation R donnée sur la frontière S de ce domaine. Si l'équation proposée est celle de Laplace, $\Delta V = 0$, c'est-à-dire si V est harmonique, on est conduit, suivant la nature de R, au problème de *Dirichlet* $[V_S = f(M)]$, de *Neumann* $\left[\frac{\partial V}{\partial n_S} = g(M)\right]$, ou de *la chaleur* $\left[\frac{\partial V}{\partial n_S} + p(M) V_S = h(M)\right]$, chacun de ces problèmes pouvant d'ailleurs être *extérieur* ou *intérieur*. Ceux-ci se généralisent en considérant l'équation $\Delta V = \varphi(M)$. Les trois formes classiques de potentiel (spatial, de simple couche et de double couche) jouent ici un rôle prépondérant et leurs propriétés sont rappelées de façon à la fois très claire et très concise.

Au point de vue physique, les problèmes précédents sont relatifs à l'attraction newtonienne et électrostatique (Dirichlet), à l'hydrodynamique (Neumann), V étant alors le potentiel permanent des vitesses, à l'électrostatique (problème de Neumann généralisé), à

l'équilibre thermique avec rayonnement; le problème du magnétisme, qui consiste à se donner sur S l'expression $\mu \frac{\partial V}{\partial n_i} - \frac{\partial V}{\partial n_e}$, se rapproche aussi des précédents.

La mise en équation se fait en mettant la solution sous la forme d'un potentiel de double couche (problème de Dirichlet) ou de simple couche (problèmes de Neumann, de la chaleur) dont la densité vérifie une équation de Fredholm.

Si maintenant on envisage l'équation

$$\Delta V = R(x, y, z) V,$$

la solution égale à $f(M)$ sur S satisfait à l'équation

$$V(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_D G(M, P) R(P) V(P) \, d\omega_P + c(M),$$

c étant harmonique et égale à f sur S, et G étant une *fonction de Green*, harmonique, nulle sur S et infinie en P comme $\frac{1}{MP}$. Les autres conditions aux limites conduisent à des équations analogues.

L'équation

$$\Delta V = R \frac{\partial V}{\partial t},$$

du type *parabolique* (problème du refroidissement), se ramène à la précédente par la substitution $V = e^{-\lambda t} \varphi(x, y, z)$, qui donne $\Delta \varphi = -\lambda R \varphi$.

Si $V_S = 0$, on est conduit à une équation intégrale homogène résoluble seulement pour une suite infinie de valeurs λ_n de λ, correspondant à des solutions φ_n. On mettra donc V sous la forme d'une série $\Sigma A_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n$, les A_n étant déterminés par la condition que $V = \alpha(x, y, z)$, pour $t = 0$. Le cas où $V_S = f(M)$ se ramène au précédent.

Enfin l'équation

$$\Delta V = R \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

du type *hyperbolique*, se traite d'une manière analogue, en remplaçant $e^{-\lambda t}$ par $\cos \lambda t$ ou $\sin \lambda t$.

Dans tous ces problèmes, on peut démontrer que la solution est unique, chaque fois que la Physique permet de le prévoir.

II. Les principaux résultats relatifs à la résolution de l'équation

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s),$$

sont très nettement exposés dans le second Chapitre. K est supposé *continu presque partout*, c'est-à-dire borné, intégrable et n'admettant qu'un nombre fini de discontinuités sur une même parallèle aux axes ([1]). La méthode de l'itération, les recherches de Schmidt, la méthode de Fredholm, le cas des noyaux infinis sont traités avec une grande clarté.

L'équation homogène fait l'objet d'une étude spéciale : cette équation n'est résoluble que pour certaines valeurs λ' de λ, racines du déterminant $D(\lambda)$ de Fredholm, toute solution continue étant une combinaison linéaire de q fonctions linéairement indépendantes (système de *fonctions fondamentales* relatives à λ' et à K). Si p est l'ordre de la racine λ' de $D(\lambda)$, λ' est pôle d'ordre r de la résolvante, et l'on a

$$q = p - r + 1.$$

Si $\lambda = \lambda'$, l'équation avec second membre n'a pas de solution, sauf si f est orthogonale aux q fonctions fondamentales relatives à l'équation *associée* [c'est-à-dire dont le noyau est $K(t, s)$].

Tout cela suppose a et b finis : sinon des différences profondes s'introduisent ([2]); les Auteurs en donnent un exemple très net.

La fin du Chapitre est consacrée au cas du *noyau symétrique* (les constantes caractéristiques sont alors réelles et pôles simples de la résolvante) et aux développements en séries de fonctions fondamentales : celles-ci se prêtent aisément à la normalisation puisque deux solutions de l'équation homogène, correspondant à deux constantes caractéristiques différentes, sont orthogonales. On développe ainsi toute fonction de la forme $\int_a^b K(s, t)\,p(t)\,dt$ et

---

([1]) Dans ces conditions, si f est continue, la solution

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b k(s, t, \lambda) f(t)\,dt$$

est continue, $k(s, t, \lambda)$ étant la *résolvante* du noyau K.

([2]) É. Picard, *Comptes rendus*, 13 octobre 1910.

ar suite la solution de l'équation. Les noyaux successifs se développent également. Enfin les Auteurs donnent un aperçu des travaux de Schmidt sur le noyau dissymétrique.

III. Les résultats du Chapitre précédent s'étendent immédiatement au cas de plusieurs dimensions. Les problèmes de Dirichlet et de Neumann se ramènent respectivement à deux équations associées, avec

$\lambda = +1$ cas intérieur Dirichlet, extérieur Neumann;
$\lambda = -1$ cas extérieur Dirichlet, intérieur Neumann,

$\lambda = -1$ étant une constante caractéristique, mais non $\lambda = +1$.

Si l'on cherche une fonction harmonique à l'intérieur ou à l'extérieur de S (et dans ce cas nulle à l'infini), et vérifiant sur S une des conditions

$$1^\circ \quad V_i = 0, \qquad 2^\circ \quad V_e = 0, \qquad 3^\circ \quad \frac{\partial V}{\partial n_i} = 0, \qquad 4^\circ \quad \frac{\partial V}{\partial n_e} = 0,$$

on trouve $V = 0$ pour 1°, 2°, 4°, et $V = \text{const.}$ pour 4°. Si la donnée est $f(M)$ au lieu de zéro, on obtient une solution unique pour 1° et 4°; pour 2° et 3°, on doit avoir les conditions respectives

$$\int_S f(P)\,\varphi(P)\,dS = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_S f(P)\,dS = 0,$$

$\varphi(P)$ étant la densité d'une couche électrique en équilibre étalée sur S; sinon le troisième problème n'a pas de solution et le 2° ne peut se résoudre par un potentiel de double couche.

Les constantes caractéristiques des équations associées relatives à ces problèmes sont réelles et pôles simples de la résolvante, la première étant $\lambda = -1$.

Quant au problème de la chaleur $\left[\frac{\partial V}{\partial n_e} - p(M)\,V_S = h(M)\right]$, il admet une solution unique, pour le cas intérieur si $p(M) < 0$, et pour le cas extérieur si $p(M) > 0$.

Ce qui précède permet de construire les fonctions de Green satisfaisant aux conditions suivantes sur S :

$$1^\circ \quad G_i = 0, \qquad 2^\circ \quad \frac{\partial G_i}{\partial n_e} = 0, \qquad 3^\circ \quad \frac{\partial G_i}{\partial n} - p(M)\,G_i = 0, \qquad 4^\circ \quad \frac{\partial G_i}{\partial n_e} = \frac{4\pi}{S}.$$

Ceci permet de résoudre les problèmes généralisés relatifs à $\Delta V = \varphi(x, y, z)$ ou $\Delta V = R(x, y, z) V$: dans ce dernier cas, on aura sûrement une solution si $R > 0$.

Si nous considérons maintenant l'équation du type parabolique $V = R \frac{\partial V}{\partial t}$, V étant nul sur S et égal à $\alpha(x, y, z)$ pour $t = 0$, on opérera comme il a été dit plus haut, ce qui donnera comme solution $\Sigma A_n \varphi_n(M) e^{-\lambda_n t}$, les φ_n étant les fonctions fondamentales relatives au noyau $G(MP) R(P)$, et la série représentant pour $t = 0$ le développement de α, qui, étant nul sur S, peut se mettre sous la forme

$$\int_D G(M, P) f(P) d\omega_P$$

et est par suite développable en série de fonctions fondamentales (Chap. II). La solution est unique. Les problèmes de Dirichlet et de Neumann se traitent d'une manière identique, en décomposant la solution en plusieurs autres.

Dans le cas de l'équation des ondes $\Delta V = R \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, il s'introduit quelques différences qu'on aperçoit aisément sur un cas particulier $\left[\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \text{ sur la surface S}; V = \alpha(M), \frac{\partial V}{\partial t} = \beta(M) \text{ pour } t = 0\right]$: c'est le cas du mouvement d'un gaz parfait renfermé à l'intérieur d'une surface fixe.

Le Chapitre se termine par l'exposé de la méthode de M. Picard relative à l'équation générale du type elliptique [1]. L'Ouvrage contient également deux Notes : la première traite de l'itération des noyaux infinis dans le cas des intégrales doubles, et la deuxième est un exposé des résultats essentiels relatifs à la résolvante dans le cas d'un noyau quelconque.

Tels sont les principaux sujets traités dans cet Ouvrage : la clarté méthodique de l'exposition, la rigueur précise du raisonnement en rendent la lecture fort attrayante. Tous ceux qui, désirant se mettre au courant de cet important Chapitre de l'Analyse moderne, avaient été quelque peu effrayés par le nombre des Mémoires qui y sont consacrés, trouveront dans ce petit Livre un

---

[1] *Rendiconti di Palermo*, juillet 1906, et *Annales Éc. norm. sup.*, 1906.

moyen sûr d'acquérir rapidement sur ce sujet les notions les plus nettes et les plus utiles. Est-il vraiment possible de demander mieux?

M. Gevrey.

LALESCO (T.). — Introduction a la théorie des équations intégrales. In-8, 152 pages. Paris, Hermann; 1912.

L'histoire des Mathématiques contient peu d'exemples de théories devenues classiques aussi rapidement que celle des équations intégrales après la publication des travaux de M. Fredholm. « Les résultats essentiels de Fredholm, dit M. E. Picard dans sa Préface au Livre de M. Lalesco, avaient la beauté des choses simples et définitives, et aucune érudition préliminaire n'était nécessaire pour pénétrer dans la question. Aussi la mode, qui joue parfois un grand rôle dans l'orientation des recherches scientifiques, s'attacha-t-elle vite à ce type d'équations fonctionnelles et l'on remplirait une bibliothèque avec les travaux faits depuis dix ans sur le problème résolu pour la première fois par Fredholm. »

Le débutant qui veut s'initier à la théorie des équations intégrales ne saurait entreprendre, sans un fil conducteur, l'étude d'un sujet si vaste et l'on ne peut lui donner de meilleur conseil que celui de lire d'abord le petit Livre de M. Lalesco. Il y trouvera, exposés avec précision et clarté, les points essentiels de la théorie pure, les applications étant systématiquement laissées de côté. Il appréciera l'élégance et la simplicité des démonstrations. Entre les diverses méthodes, souvent nombreuses et toutes également intéressantes, qui ont été proposées pour établir les théorèmes fondamentaux, le choix a dû être bien des fois difficile. Combinant au besoin plusieurs méthodes distinctes et ajoutant ainsi son œuvre propre à celle des géomètres qu'il cite, l'Auteur a toujours fait le choix qui lui permettait d'obtenir le plus rapidement le plus grand nombre de résultats et a pu ainsi traiter dans son petit Volume beaucoup de sujets différents. Ce choix ne l'empêche pas de donner quelques indications sur les méthodes qu'il ne peut exposer complètement, en renvoyant pour plus de détails aux Mémoires originaux. Quelques lignes, placées au début de chaque

Chapitre, attirent de la manière la plus heureuse l'attention du lecteur sur les circonstances les plus remarquables de la théorie qui va suivre, sur les particularités qui la distinguent d'une théorie analogue, vue précédemment, et sur les liens qui la rattachent à des sujets dont elle paraît d'abord éloignée. Aussi la lecture de ce Livre est-elle facile et séduisante pour les esprits qui se plaisent dans les idées générales, comme pour ceux qu'attire surtout l'élégance des démonstrations. Après cette lecture, on peut aborder sans peine celle des nombreux Mémoires qui traitent des applications, aussi bien que la lecture de ceux qui traitent d'une manière plus complète de la théorie et dont une bibliographie détaillée se trouve à la fin de l'Ouvrage.

La plus grande partie du Livre de M. Lalesco est naturellement consacrée à l'*équation de Fredholm* (de seconde espèce), c'est-à-dire à l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b N(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x),$$

la fonction inconnue étant $\varphi(x)$ et le *noyau* $N(x, s)$ étant fini. Mais il y a d'abord une première partie traitant de l'*équation de Volterra*, et à la fin une troisième partie traitant des équations singulières et des équations d'ordre supérieur.

L'équation de Volterra est une équation intégrale dans laquelle les limites d'intégration sont o et x. Comme l'équation de Fredholm, elle est dite *de première espèce*, si la fonction inconnue ne figure que sous le signe d'intégration, et *de seconde espèce*, si elle figure aussi en dehors. C'est à cette équation que devait nécessairement être consacrée la première Partie d'un Ouvrage sur les équations intégrales, tant parce que les travaux de Volterra ont précédé ceux de Fredholm que parce que l'équation de Volterra est un cas particulier de l'équation de Fredholm et que son étude prépare bien à celle du cas général. Après avoir montré comment l'équation de Volterra peut être considérée comme la limite d'un système d'équations linéaires, M. Lalesco expose les résultats principaux du géomètre italien en utilisant les méthodes qu'il a lui-même fait connaître dans sa thèse de doctorat. L'équation de première espèce, à condition que $N(x, x)$ ne s'annule pas et que $f(0) = 0$, est ramenée à une équation de seconde espèce

dont on obtient la solution sous la forme d'une série toujours convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de λ; la forme de cette solution introduit la notion du *noyau résolvant*. On trouve ensuite l'étude de la liaison entre l'équation de Volterra et les équations différentielles linéaires, et celle des équations de Volterra à plusieurs variables indépendantes.

En abordant l'étude de l'équation de Fredholm, M. Lalesco montre d'abord qu'elle peut être aussi considérée comme la limite d'un système d'équations linéaires. Sans insister sur cette méthode, il en déduira seulement qu'on peut s'attendre à ce que le *noyau résolvant*, c'est-à-dire la fonction $\mathfrak{N}(x, s)$ telle que la solution de l'équation de Fredholm soit donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b \mathfrak{N}(x, s, \lambda) f(s)\, ds,$$

soit une fonction méromorphe de λ. D'autre part, on obtient immédiatement le développement du noyau résolvant suivant les puissances croissantes de λ. En identifiant la série obtenue avec le quotient de deux séries de puissances qu'on achèvera de déterminer par une relation supplémentaire, on obtient très simplement les formules de Fredholm et ses théorèmes relativement au cas où la fonction entière $D(\lambda)$ du dénominateur n'est pas nulle. Ce Chapitre se termine par quelques théorèmes, dus en partie à l'Auteur, sur les zéros de $D(\lambda)$.

Le second Chapitre consacré à l'équation de Fredholm, a pour objet l'étude approfondie du noyau résolvant. On y trouve d'abord la théorie des fonctions orthogonales et biorthogonales, puis l'exposé des travaux de MM. Goursat et Heywood sur la partie principale du noyau résolvant dans le voisinage d'un pôle et sur les fonctions principales. Fidèle au principe de commencer par les cas particuliers simples et intéressants en eux-mêmes, M. Lalesco interrompt un instant la suite des idées pour étudier, d'après MM. Goursat et E. Schmidt, les noyaux de la forme

$$a_1(x)b_1(y) + a_2(x)b_2(y) + \ldots + a_n(x)b_n(y).$$

Revenant ensuite à son objet principal, il étudie les fonctions fondamentales, en utilisant la théorie des formes bilinéaires, puis les solutions fondamentales, indique les circonstances différentes

qui se présentent pour les pôles simples et les pôles multiples et arrive enfin aux théorèmes de Fredholm relatifs au cas où $D(\lambda) = 0$. Si l'on a simplement pour but de démontrer ces théorèmes, la méthode suivie est plus détournée, et aussi moins élémentaire, que celle du géomètre suédois. Mais elle conduit à une connaissance plus complète du noyau résolvant et montre bien les liens qui existent entre la théorie des formes quadratiques et bilinéaires et celle des équations intégrales.

Le Chapitre suivant est consacré à l'étude de quelques noyaux spéciaux. On trouve d'abord les belles recherches de MM. Hilbert et E. Schmidt sur les noyaux symétriques, conduisant à leurs théorèmes sur les développements en séries de fonctions fondamentales, puis le cas du noyau symétrique gauche, et enfin le cas plus général du noyau symétrisable, signalé et étudié par M. Marty.

Le dernier Chapitre de la seconde Partie a pour objet l'étude des équations de première espèce. Les points essentiels en sont naturellement le théorème de MM. Fischer et F. Riesz sur les séries de Fourier généralisées, le théorème de M. E. Schmidt sur les développements en séries de fonctions caractéristiques, et les résultats de M. E. Picard, qui mettent bien en évidence la nature des équations de première espèce, si différente de celle de l'équation de Fredholm, et les restrictions qu'il faut introduire pour se poser un problème d'existence.

Passons à la troisième Partie, consacrée aux *équations singulières* et aux *équations d'ordre supérieur*. A propos de l'équation de Volterra, nous trouvons d'abord les théorèmes de MM. Volterra et Holmgren sur le cas où $N(0, 0) = 0$, puis l'étude du cas où $N(x, y)$ devient infini, mais de manière que $(x - y)^\alpha N(x, y)$ reste fini, α étant un nombre compris entre 0 et 1. Ce cas comprend comme cas particulier le célèbre problème d'Abel.

A propos de l'équation de Fredholm, nous trouvons d'abord le cas analogue au second cas signalé pour l'équation de Volterra, et qui est particulièrement important pour les applications. Il n'est pas véritablement singulier, bien que les formules générales de Fredholm ne lui soient pas applicables, car le caractère analytique de la solution est le même que pour les équations non singulières. M. Lalesco le montre d'abord par la méthode d'itération de Fredholm, et indique ensuite une modification des formules générales

qui les rend applicables directement à ce cas particulier. Il passe ensuite au cas réellement singulier, pour lequel il est nécessaire d'introduire la variable complexe. Il indique, d'après M. Picard, les diverses circonstances, qui surprennent d'abord, qu'on rencontre dans ce cas, notamment que les valeurs de λ pour lesquelles la solution est indéterminée ne forment plus, en général, un ensemble dénombrable de points isolés, et que la nature analytique de la solution par rapport à λ peut dépendre du second membre.

Le dernier Chapitre a pour objet l'étude des *équations non linéaires*. La généralisation la plus naturelle de l'équation linéaire s'obtient en remplaçant sous le signe d'intégration le produit $N(x, s)\varphi(s)$ par l'expression plus générale $F[x, s, \varphi(s)]$. Les principaux résultats obtenus sur ce sujet sont ceux de M. E. Schmidt sur l'existence et le caractère analytique de la solution.

Des équations sur lesquelles les résultats obtenus sont autrement importants sont les équations *d'ordre itératif supérieur*, qui ont fait l'objet d'une série de travaux récents de M. Volterra. M. Lalesco définit la composition et la permutabilité de première et de seconde espèces, les corps de fonctions permutables, et expose la méthode si féconde que le géomètre italien a déduite de l'analogie formelle qui existe entre les opérations de composition sur les fonctions permutables et les opérations ordinaires de l'Algèbre. Il termine son Livre en renvoyant à celui que M. Volterra doit faire paraître très prochainement sur ces questions.

Les théories étudiées dans cette troisième Partie sont des théories en train de se faire. Tandis que les questions traitées dans les deux premières Parties ont une forme qui semble définitive, il faut s'attendre à ce que la troisième devienne très vite incomplète. Mais les résultats déjà connus mettent bien en évidence les difficultés nouvelles qui se présentent à propos des équations singulières ou d'ordre supérieur, et font voir ces équations sous un aspect qui est certainement leur aspect véritable. Aussi, quel que soit le développement ultérieur de cette branche de la Science, il est permis de penser que le Livre de M. Lalesco restera une excellente introduction à l'étude d'Ouvrages plus complets.

PAUL LÉVY.

APPELL (PAUL). — COURS DE MÉCANIQUE DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES. Conforme au Programme du 27 juillet 1904, à l'usage des candidats aux Écoles Normale, Polytechnique, Centrale, Navale. Troisième édition, entièrement refondue. 1 vol. in-8, 527 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1912.

M. Appell vient de publier la troisième édition du *Cours de Mécanique*, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales et conformément au programme du 27 juillet 1904. A leur entrée dans les grandes Ecoles, les candidats reçus doivent connaître déjà les principales lignes du cours de Mécanique rationnelle et en posséder nettement les notions fondamentales. L'étude approfondie de la Statique et des principes de la Cinématique et de la Dymanique du point leur est donc nécessaire. Tel est l'esprit de la réforme de 1904.

M. Appell s'en est inspiré et, avec son habituelle clarté et sa grande maîtrise, il développe successivement les matières du programme. Dans un Chapitre préliminaire, il rappelle quelques notions d'un usage courant en Mécanique (définition d'un segment, d'un vecteur, théorème des projections, somme et différence géométrique de vecteurs); il divise ensuite l'Ouvrage en trois Parties consacrées respectivement à la Cinématique, à la Dynamique du point et à la Statique.

Cinématique. — Après avoir défini la Cinématique comme *l'étude des mouvements dans leurs rapports avec le temps*, et avoir insisté sur l'importance de l'idée de *relativité* du mouvement, l'Auteur aborde la Cinématique du point. Elle repose essentiellement sur la considération des deux vecteurs *vitesse* et *accélération*. La notion de la vitesse est tout élémentaire; celle de l'accélération, variation géométrique de la vitesse dans l'unité de temps, tombe moins sous le sens : elle est d'abord considérée en elle-même, géométriquement, par l'étude de ses deux composantes, tangentielle et normale. Plusieurs exemples particuliers éclairent les définitions. Le cas du mouvement rectiligne est d'abord envisagé : mouvement vibratoire simple, mouvement uniformément accéléré, préparant le lecteur à aborder, en Dynamique,

le problème de la chute libre des corps pesants. Puis le mouvement circulaire conduit à la notion de vitesse et d'accélération angulaires.

L'étude du mouvement d'un point est reprise ensuite par la méthode analytique, c'est-à-dire en rapportant la trajectoire à trois axes de coordonnées. Les expressions des projections de la vitesse et de l'accélération sont calculées d'abord en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées polaires et semi-polaires. Quelques exemples de mouvements sont traités avec détails : citons le mouvement circulaire et le mouvement vibratoire elliptique d'un point autour d'un centre. Viennent ensuite l'étude de la vitesse aréolaire, et la démonstration du théorème des aires ; enfin l'application de la notion de dérivée géométrique à la définition de l'accélération.

Lorsqu'un point se meut sur une courbe donnée, on peut représenter son mouvement sur un diagramme, où l'on porte en abscisses les temps et en ordonnées les espaces parcourus : de tels diagrammes sont utilisés dans les chemins de fer pour représenter graphiquement la marche des trains. Si les ordonnées, au lieu d'être proportionnelles aux espaces, le sont aux vitesses, ou aux accélérations tangentielles, on obtient d'autres diagrammes qui sont, comme les précédents, étudiés d'une façon détaillée. Un autre mode de représentation schématique est relatif au cas où le mouvement envisagé est rectiligne et vibratoire : si l'on considère un *vecteur tournant* animé, dans un plan, d'une rotation uniforme autour de son point d'application, sa projection sur une direction fixe du plan représente l'élongation d'un point animé d'un mouvement vibratoire simple. Ce procédé, qui donne aussi la représentation de la vitesse et de l'accélération par des vecteurs décalés de $\frac{\pi}{2}$, est fréquemment utilisé en Optique et en Électricité.

Après la Cinématique du point vient celle du corps solide ou système invariable. On trouvera l'étude complète des trois mouvements simples fondamentaux : mouvement de translation, mouvement de rotation, mouvement hélicoïdal, avec la détermination, dans chaque cas, des vitesses et des accélérations des différents points du corps. Des exemples bien familiers donnent la réalisation concrète de ces trois mouvements : glissière, tourillon et coussinet, vis et écrou.

Pour achever la Cinématique, il reste à étudier les changements du système de comparaison, c'est-à-dire le passage d'un système de repères à un autre, ou la composition des mouvements. Tandis que la composition des vitesses se fait suivant la règle simple du parallélogramme, celle des accélérations exige l'intervention d'un vecteur complémentaire. Mais, comme les seules applications visées se bornent au cas où le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation, ce vecteur complémentaire se trouve nul, et la règle du parallélogramme s'applique aussi aux accélérations.

La composition d'une rotation uniforme avec une translation uniforme donne lieu à la génération de la cycloïde, lorsque la translation est perpendiculaire à l'axe de rotation : les propriétés géométriques de cette courbe sont ainsi déduites de sa définition cinématique ; lorsqu'au contraire la translation est parallèle à l'axe de rotation, on retrouve le mouvement hélicoïdal.

Le mouvement résultant de la composition de deux ou de n mouvements vibratoires parallèles de même période, est un mouvement vibratoire ayant aussi la même période, et dont l'intensité et la phase dépendent des intensités et des phases des mouvements composants. C'est ici que la représentation des mouvements vibratoires par des *vecteurs tournants* trouve une application particulièrement intéressante : car on obtient le vecteur tournant représentatif de la vibration résultante en composant géométriquement les vecteurs tournants représentatifs des vibrations composantes.

Dynamique. — Ayant défini le système d'*axes absolument fixes* comme un trièdre « dont l'origine est au centre de gravité du système solaire, et dont les arêtes sont dirigées vers trois des étoiles appelées *étoiles fixes* », M. Appell postule le principe d'inertie : *un point matériel livré à lui-même a, par rapport aux axes fixes, une accélération nulle.* Suivent les définitions de la force et de la masse et la relation capitale

$$F = m\gamma,$$

entre la force, la masse et l'accélération, relation qui, peut-on dire, contient à elle seule toute la Dynamique du point matériel libre.

La question des *unités* se présente avec une extrême importance, aussi bien en Mécanique que dans tous les Chapitres de la Physique. Aussi M. Appell prend-il soin de lui consacrer plusieurs pages. La Géométrie ne connaît qu'une unité fondamentale, celle de longueur ; à celle-ci, la Cinématique adjoint l'unité de temps ; en Dynamique, il faut en introduire trois, celle de longueur, celle de temps, et une troisième qui est, suivant le choix, l'unité de masse ou celle de force. La description des différents systèmes d'unités (système C. G. S. et système industriel) est suivie de l'étude de l'homogénéité et des formules de dimensions des unités dérivées.

Après ces préliminaires, la traduction en langage analytique de la relation fondamentale

$$F = m\gamma$$

conduit à l'établissement des équations différentielles du mouvement

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

au moyen desquelles on peut aborder les deux problèmes généraux de la Dynamique du point :

1° Etant donnée la masse d'un point et son mouvement, trouver la force qui le sollicite à chaque instant ;

2° Connaissant la loi de la force qui agit sur un point matériel et les conditions initiales dans lesquelles il est placé, déterminer son mouvement.

Le premier problème, ne nécessitant que des dérivations par rapport au temps, peut toujours se résoudre et conduit à l'expression de la force en fonction du temps.

Le second problème exige l'intégration des équations du mouvement : il est abordé dans quelques cas particulièrement simples et importants.

Le cas d'une force constante conduit à l'étude du mouvement rectiligne uniformément varié (mouvement vertical d'un corps pesant), puis du mouvement curviligne des projectiles dans le vide, accompagnée des discussions intéressantes qu'appellent ces questions.

Un autre problème, susceptible d'être complètement traité par les méthodes élémentaires, est celui du mouvement (rectiligne ou curviligne) d'un point matériel attiré (ou repoussé) par un centre fixe proportionnellement à la distance. L'exposé de cette question est d'ailleurs facilité par l'étude cinématique, précédemment faite, du mouvement vibratoire elliptique.

Le Chapitre relatif au point matériel libre se termine par l'établissement des *équations intrinsèques* du mouvement, qui ne font intervenir aucun choix d'axes particuliers.

« La notion de travail est la plus importante de la Mécanique : c'est en effet par leur travail que les forces sont utilisées dans l'industrie et le rôle des machines consiste principalement dans la transformation d'un travail en un autre ». Il importe donc d'approfondir cette notion capitale. Après avoir donné, dans le cas le plus général, la définition et les expressions analytiques du travail d'une force dans un déplacement élémentaire et dans un déplacement fini, M. Appell insiste sur le cas important où le travail ne dépend que des positions initiale et finale du mobile : il y a alors *fonction de force* ou *potentiel :* c'est ce qui se présente, par exemple, dans le champ de la pesanteur et pour les forces centrales ne dépendant que de la distance.

Les *surfaces équipotentielles* ou *surfaces de niveau*, et leurs trajectoires orthogonales les *lignes de forces*, jouent un rôle prépondérant dans certaines branches de la Physique, notamment en Électricité et Magnétisme. On trouvera plusieurs exemples du tracé de ces figures ; citons entre autres les suivants : attraction newtonienne par deux centres fixes ; répulsion par deux centres ; attraction par un centre et répulsion par un autre.

La notion de travail conduit immédiatement et naturellement au *théorème de la force vive*, qui prend toute son importance lorsque la force appliquée au point dérive d'une fonction de forces : on peut alors parler d'une énergie totale, somme constante de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique, et le théorème de la force vive fournit une intégrale première des équations du mouvement.

Un point matériel attiré par un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance, décrit une conique, admettant ce point fixe pour foyer : c'est le cas d'une planète parcourant une orbite

képlérienne autour du Soleil. M. Appell traite dans tous ses détails ce beau problème, qui est parfaitement susceptible d'être approfondi par les élèves de Mathématiques spéciales, familiers avec la géométrie des coniques. Son étude fournit, relativement aux théorèmes généraux de la Mécanique, les applications les plus instructives et les plus intéressantes.

Quelques exemples, relatifs au point matériel non libre, terminent l'exposé de la Dynamique.

Le mouvement d'un point sur un plan incliné, donne lieu à l'énoncé et à l'étude des lois générales du frottement de glissement.

Le problème du pendule simple s'intègre élémentairement dans le cas des *petites oscillations* qui satisfont à la loi d'isochronisme. Pour les oscillations d'amplitude finie, l'expression, toujours calculable, de la vitesse, permet de déterminer en chaque point la réaction normale du cercle, autrement dit la tension du fil auquel est suspendu le pendule.

Statique. — La Statique constituait autrefois à elle seule tout le programme de Mécanique en Mathématiques spéciales. Elle en reste une partie fort importante.

Les notions fondamentales de la théorie des vecteurs et des moments font l'objet d'un Chapitre d'introduction où ces questions se trouvent exposées tant géométriquement qu'analytiquement.

Les conditions d'équilibre d'un point matériel libre sont fort simples, puisqu'elles expriment seulement que la force agissante est nulle ; mais elles prennent une forme particulièrement intéressante, au point de vue de la stabilité, lorsqu'il existe une fonction de forces : un raisonnement approximatif, mais suffisamment convaincant, fait voir qu'alors les points où la fonction des forces est maximum sont des positions d'équilibre stable. C'est ainsi que, dans l'exemple d'un point attiré par n centres fixes proportionnellement à la distance, le centre de gravité des n points fixes correspond à une position de stabilité.

Lorsque le point mobile est assujetti à se déplacer sur une surface ou sur une courbe fixe (sans frottement), un calcul simple conduit à la condition d'équilibre qui traduit la normalité de la force agissante à la surface ou à la courbe. Ici encore, le cas où il y

a fonction de forces, donne lieu à une interprétation intéressante de la stabilité. S'il y a frottement du point sur la surface ou sur la courbe, les conditions d'équilibre s'expriment par des inégalités, et il y a alors des *régions* d'équilibre.

Dans l'étude des systèmes de points matériels, la distinction s'impose entre les forces intérieures et les forces extérieures. Celles-ci doivent forcément, pour qu'il y ait équilibre, satisfaire à six conditions *nécessaires*, exprimant que leur somme géométrique et leur moment résultant par rapport à un point quelconque de l'espace sont nuls. Lorsque le système envisagé est un corps solide indéformable, ces six conditions sont aussi suffisantes. C'est ce qui ressort de la théorie, développée dans tous ses détails, de la *réduction* d'un système de forces, suivie de celle des systèmes de forces équivalents.

L'étude des forces parallèles, et celle du *centre* de ces forces, conduit à la notion du centre de gravité. Les théorèmes relatifs aux simplifications qu'apportent à la recherche du centre de gravité les divers cas de symétrie qui peuvent se présenter, sont exposés avec de nombreux exemples de détermination de ce point, tant pour les surfaces que pour les volumes.

La Statique proprement dite se termine par l'examen de l'équilibre de quelques solides non libres : corps ayant un point fixe, ou un axe fixe, ou encore pouvant tourner autour d'un axe et glisser le long de cet axe, corps s'appuyant sur un plan fixe par un ou plusieurs points.

Un Chapitre spécial est consacré aux machines simples : leur théorie purement statique est suivie de l'application de la notion de travail aux conditions de leur équilibre, et de la vérification, dans chaque cas, que, s'il n'y a pas frottement, le travail de la puissance est égal à celui de la résistance.

Enfin, l'Ouvrage s'achève par quelques notions sur les moments d'inertie, avec les deux théorèmes fondamentaux sur les variations du moment d'inertie d'un système par rapport à des axes parallèles, et par rapport à des axes concourants.

Tel est, brièvement résumé, ce *Cours de Mécanique*. Ajoutons, ce qui n'est pas sans intérêt, que chaque Chapitre est suivi d'exercices nombreux sur les questions qui y sont traitées. Les professeurs liront ce Livre avec l'intérêt très grand qui se dégage

toujours des Ouvrages de M. Appell, et les élèves, appréciant la grande clarté de l'exposition, ne pourront que se féliciter de l'avoir pris pour guide de leurs premiers pas dans le domaine de la Mécanique générale.

H. Vergne.

Lectures delivered at the celebration of the twentieth anniversary of the foundation of Clark University, under the Auspices of the Department of Physics, by V. Volterra, E. Rutherford, R.-W. Wood, C. Barus. 1 vol. in-8 de 161 pages avec figures et photographies. New-York, Stechert and C°.

Introduction. — L'Université de Clark a été fondée en 1889, principalement en vue de provoquer des recherches scientifiques. A l'occasion du vingtième anniversaire de sa fondation, le Département de Physique invita des savants éminents d'Amérique et d'Europe à faire des lectures sur des sujets se rapportant à leurs recherches personnelles. Dans ce Volume sont reproduites les Leçons suivantes :

V. Volterra, *Sur quelques progrès récents de la Physique mathématique* (3 leçons).

E. Rutherford, *History of the Alpha Rays from Radioactives Substances.*

C. Barus, *Certain Physical Properties of the Iron Carbides together with Inference deducibles therefrom.*

R. W. Wood, *The Optical Properties of Metallic Vapors.*

Il était presque impossible de résumer, en peu de pages, ces six Leçons, qui sont déjà des résumés et qui sont pleines d'idées originales, sans que le compte rendu soit par trop insuffisant. J'ai seulement ici donné un aperçu de la troisième des Leçons de M. V. Volterra et de la Leçon de M. E. Rutherford : les noms des Auteurs disent déjà le très grand intérêt de cette publication.

Troisième Leçon de M. Volterra. — La loi de Hooke (*ut tensio sic vis*) qui est la base de la théorie de l'élasticité, n'est qu'une loi approchée. Il faut la modifier, en partant du principe

que l'état actuel du système élastique dépend de l'histoire des efforts qui l'ont sollicité. Pour montrer comment on peut y arriver, on prend pour exemple la torsion d'un fil, soient ω l'angle de torsion et M le moment de torsion; dans la théorie ordinaire de l'élasticité, on pose

$$\omega = KM \qquad (K \text{ constant}), \tag{1}$$

si l'on veut que ω dépende de l'histoire du moment de torsion M, il faudra corriger l'équation (1) en écrivant

$$\omega = KM + \varphi,$$

φ étant un terme qui dépend de toutes les valeurs prises par M depuis le temps $-\infty$ jusqu'à l'instant actuel; on obtient pour φ un développement en série provenant, par un passage à la limite, d'une série de Taylor, à plusieurs variables. Pour cela, on néglige d'abord le temps antérieur à un instant t_0, on divise l'intervalle (t_0, t) en n parties $h_1, h_2, \ldots, h_n$: $M_1, M_2, \ldots, M_n$ désignant les valeurs de la fonction $M(t)$ dans ces intervalles successifs, on regarde φ comme une fonction de $h_1 M_1, h_2 M_2, \ldots, h_n M_n$ qui s'annule lorsque ces quantités sont nulles. La série de Taylor qui, nous l'admettons, représente cette fonction, est

$$\sum_1 h_i M_i G_i - \frac{1}{1.2} \sum_1 h_i M_i \Sigma h_k M_k G_{ik} - \ldots,$$

après un passage à la limite (qui a besoin d'être justifié), on trouve

$$\omega(t) = KM(t) - \int_{t_0}^{t} M(\tau)\varphi(t, \tau)\, d\tau$$
$$- \frac{1}{1.2} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{t} d\tau_2\, M(\tau_1) M(\tau_2) \varphi(t, \tau_1, \tau_2) + \ldots.$$

Enfin, dans une première approximation, on néglige tous les termes à partir du troisième, il vient

$$\omega(t) = KM(t) - \int_{t_0}^{t} M(\tau)\varphi(t, \tau)\, d\tau. \tag{3}$$

La relation étant devenue linéaire, les effets de la superposition des moments de torsion se somment.

Voici maintenant, en partant de l'équation (3), les questions qui se posent :

1° Quelle est l'interprétation du coefficient $\varphi(t,\tau)$?

2° La fonction $\varphi(t,\tau)$ étant connue, comment peut-on déterminer $M(t)$ lorsqu'on donne $\omega(t)$?

3° Comment peut-on déterminer la fonction $\varphi(t,\tau)$, si l'on suppose qu'elle soit inconnue ?

4° Est-il possible d'étendre les conceptions précédentes au cas général de l'élasticité ?

5° Est-il possible de les étendre aux phénomènes magnétiques et diélectriques ?

6° Quels phénomènes rentreront dans le cadre des solutions qu'on trouvera ?

Pour la première question, on voit de suite que $\varphi(t,\tau)\,d\tau$ est la torsion induite, au temps t, par un moment de torsion égal à l'unité qui s'est exercé dans l'intervalle de temps $(\tau, \tau - d\tau)$; on appelle $\varphi(t,\tau)$ *le coefficient d'hérédité*.

$\varphi(t,\tau)$ étant connue et $\omega(t)$ étant donnée, la détermination de $M(t)$ revient à la résolution de l'équation intégrale (3) de forme bien connue.

Avant de passer à la troisième question, on insiste sur la notion de cycle fermé. On suppose que M varie périodiquement avec le temps et que ω varie avec la même période ; on en déduit que la torsion induite, après un certain temps, par un moment donné de torsion dépend de la grandeur de cet intervalle et ne dépend pas de l'instant où le moment a été appliqué : c'est là le *principe du cycle fermé*.

Or, si $\varphi(t,\tau) = \varphi(t-\tau)$, l'équation intégrale se transforme facilement en celle-ci

$$\omega(t) = KM(t) - \int_0^{t-t_0} M(t-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

et la détermination de φ, connaissant M et ω, revient encore à la résolution d'une équation intégrale d'une forme simple.

Si maintenant on envisage la question générale de l'élasticité, en tenant compte de l'hérédité, on est conduit à des équations

intégro-différentielles

$$K\,\Delta u(t) + (L + K)\frac{\partial\,|\,\theta(t)}{\partial x}$$
$$+ \int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\,\Delta u + \varphi(t,\tau) + \psi(t,\tau)\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial x}\right]d\tau = \rho\,X(t),$$

et à deux équations qui se déduisent de celles-ci en remplaçant u par v puis par w, X par Y puis par Z, x par y puis par z ; L et K désignent des constantes et

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ces équations correspondent aux problèmes statiques.

Les équations des vibrations s'en déduisent en remplaçant, d'après le principe de d'Alembert ρ^X, ρ^Y, ρ^Z, par

$$\rho\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right),\quad \rho\left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right),\quad \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right).$$

Dans le cas général, les analyses des équations intégrales et celles des équations différentielles ne suffisent pas pour résoudre le problème ; il faut une méthode nouvelle.

Cette méthode est indiquée dans un cas particulier du problème de l'électromagnétisme pour les corps en repos, en ayant égard à l'hérédité. La solution dépend alors de l'équation

$$\Delta v - \int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) - \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau) - \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right]d\tau = 0,$$

qui peut être prise comme type des équations intégro-différentielles elliptiques, comme l'équation de Laplace est le type des équations différentielles elliptiques.

La conclusion est que, par la théorie des équations intégrales et des équations intégro-différentielles, on peut développer d'une manière générale l'étude analytique des phénomènes d'hérédité, sans faire aucune hypothèse particulière sur les fonctions qui caractérisent le mode d'hérédité et qui, pour cette raison, ont été appelées *coefficients d'hérédité*.

Ces cofficients seront fixés dans chaque cas particulier ou déterminés par la comparaison des formules générales avec les résultats de l'observation.

Enfin l'hérédité a été considérée dans un cas particulier qui peut être appelé *cas de l'hérédité linéaire;* le *traînage*, les actions consécutives (*Nachwirkung*) s'approchent de cette sorte d'hérédité ; l'hystérésis, dite *électrotechnique*, n'y rentre pas.

On a ainsi répondu aux six questions posées dans la première partie de cette Leçon sur ce que M. Picard a appelé la *mécanique de l'hérédité*.

Histoire des rayons α émis par les substances radioactives, par E. Rutherford. — En étudiant les radiations de l'uranium et de ses composés, en 1898, l'Auteur observa deux types de rayons : le type le moins pénétrant, qui était promptement absorbé par quelques centimètres d'air ou par une mince feuille de métal, fut appelé rayons α, le type le plus pénétrant, rayons β : Giesel montra que les rayons β présentent les mêmes caractères que les rayons cathodiques, et peuvent, par conséquent, être considérés comme formés par des particules très petites, chargées d'électricité négative. Strutt, en 1901, et Crookes, en 1902, firent remarquer que les rayons α pouvaient être regardés comme formés de particules chargées d'électricité positive, analogues aux rayons canalysés de Goldstein. Rutherford arriva à la même conclusion à la suite d'expériences dans lesquelles il était arrivé à dévier les rayons α dans un champ électrique et magnétique et à déduire de cette déviation la vitesse et le rapport $\frac{e}{m}$ (de la charge à la masse) d'une particule. Les nombres trouvés permettaient de supposer qu'une particule des rayons α est un atome d'hydrogène ou d'hélium, ou d'une substance inconnue, de poids atomique faible.

Vers cette époque, à la suite de recherches faites en collaboration avec Soddy, Rutherford fut conduit à sa théorie de la *désintégration spontanée des matières radioactives*. Comme exemple simple des phénomènes à expliquer, le thorium produit une nouvelle substance appelée *thorium* X ; celle-ci se change en un produit gazeux, l'émanation de thorium, et celui-ci se transforme en un produit solide qui, se déposant à la surface des corps, détermine ce que P. Curie et Mme Curie ont appelé la *radioactivité induite*. En cherchant comment ces transformations sont influencées par ces actions physiques ou chimiques, on a été amené à penser que la transformation a lieu, non dans la molécule,

en laissant les atomes intacts, mais dans ce qu'on appelait l'*atome* lui-même. « L'atome de la matière radioactive devient instable : une explosion en résulte ; un fragment de l'atome (une particule α) est projetée avec une très grande vitesse. L'expulsion des particules α accompagne ainsi la transformation des atomes et peut servir à mesurer le degré de cette transformation. »

A ce point de vue, l'émission continue d'énergie sous la forme de radiations, n'est pas en contradiction avec le principe de la conservation de l'énergie : la vitesse considérable de la particule projetée conduit à penser que l'atome de matière radioactive, peut être complexe et se composer de particules chargées, les unes d'électricité positive, les autres d'électricité négative, décrivant à l'intérieur de l'atome des orbites avec une vitesse très grande : la particule expulsée conserve la vitesse de son mouvement orbital. Ainsi l'énergie de la radiation provient de l'énergie intérieure de l'atome et les produits des transformations successives ont des énergies atomiques décroissantes. On explique simplement de cette façon la production continue de chaleur par le radium établie par P. Curie et Laborde, l'énergie de mouvement des particules α se transformant en chaleur quand elles viennent se heurter, soit aux parois du tube qui contient le radium, soit aux couches plus voisines de la surface du radium lui-même.

« A ce point de vue, dit Mme Curie, dans sa Conférence pour le prix Nobel, un des plus beaux triomphes de la théorie a consisté à prévoir que le gaz d'hélium, toujours présent dans les minéraux radioactifs, peut représenter un des produits terminaux de l'évolution du radium et que c'est sous forme de rayons α que sont expulsés les atomes d'hélium qui se forment lors de la désintégration du radium. »

Il faudrait citer tout au long l'exposé de la suite des idées et des expériences de Rutherford, arrivant à compter le nombre des particules α projetées par un petit grain de radium et à montrer la concordance de ce nombre avec celui des scintillations qui se produisent sur un écran de sulfure de zinc voisin du grain de radium. Pour la première fois, on pouvait, pour ainsi dire, distinguer un à un les atomes, comme nous percevons les étoiles lointaines, et l'on comprend l'admiration, pour ces belles expériences, de physiciens qui ont, par leurs recherches expérimentales, illustré

l'Atomistique. (*Voir* Jean Perrin, *Revue du mois*, 1908 : *Peut-on peser un atome ?*)

En terminant, Rutherford explique la déduction des poids atomiques des produits successifs de la série uranium-radium : chacun des poids atomiques se déduit du précédent, en retranchant 4, valeur sensiblement égale au poids atomique de l'hélium.

Le dernier produit, a très sensiblement le même poids atomique que le plomb, d'où la présomption que le dernier produit des transformations successives est du plomb. Dans la Conférence déjà citée, Mme Curie disait que des expériences ayant pour but la vérification de cette conclusion étaient poursuivies dans son laboratoire.

Je cite textuellement la dernière phrase de la Note de Rutherford :

« It seems not unreasonable to conclude that helium may prove to be a constituent of other non-radio-active elements and that helium may be one of the secondary units in building up one element from another. »

E. Lacour.

PICARD (Émile). — Œuvres de Charles Hermite, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, t. III, 1 vol. in-8, IV-522 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1912.

La publication des *Œuvres d'Hermite* se poursuit avec régularité sous la direction de M. Émile Picard, auquel M. Henry Bourget continue son précieux concours.

Les Mémoires qui sont reproduits dans ce Volume embrassent la période de 1877 à 1880. Mais M. Émile Picard y a joint un un travail inédit *Sur l'extension du théorème de Sturm à un système d'équations simultanées*, qui date de la jeunesse d'Hermite et a été retrouvé récemment dans les papiers de Liouville. A ce Mémoire plein d'intérêt, M. Émile Picard a eu la bonne idée de joindre divers Chapitres empruntés au *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, une Note sur les équations résolubles par radicaux publiée dans l'*Algèbre supérieure* de Serret et enfin

une Leçon *Sur l'équation de Lamé*, faite à l'École Polytechnique pendant l'hiver de 1872-1873, dans laquelle le grand géomètre préludait aux recherches qu'il devait poursuivre quelques années plus tard.

Le Volume est orné d'un beau portrait qui représente Hermite à l'âge de 65 ans. Comme les précédents, il fait honneur à l'imprimerie Gauthier-Villars. G. D.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne, avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de *Jules Molk*. Tome I (2e vol.). Algèbre. Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de *François Meyer*. Fasc. IV. Gr. in-8, 425-520 p. Paris, Gauthier-Villars. Leipzig, B.-G. Teubner. 3,60 m.

Fergusson (J.-Coleman). — *Fergusson's percentage unit of angular measurement, with logarithms;* also a description of his percentage theodolite and percentage compass; for the use of surveyors, navigating officers, civil and military engineers, universities and colleges. LXVII-666 p. New-York, Longmans. 20 dollars.

Lichtenstein (Léon). — *Beweis des Satzes, dass jedes hinreichend kleine, im wesentlichen stetig gekrümmte, singularitätenfreie Flächenstück auf e. Teil e. Ebene zusammenhängend u. in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet werden kann.* (Sonderdr.) In-8, 49 p. Berlin, G. Reimer. 2,50 m.

Mangoldt (Hans v.). — *Einführung in die höhere Mathematik f. Studierende u. zum Selbststudium.* 2. Bd. : *Differentialrechnung.* Gr. in-8, XI-566 p. avec 101 fig. Leipzig, S. Hirzel. 14,40 m; relié, 15,40 m.

Bachmann (P.). — *Ueber Gauss' zahlentheoretische Arbeiten.* (Sonderdr.) (*Materialien f. e. wissenschaftliche Biographie v. Gauss.* Gesammelt v. *F. Klein* u. *M. Brendel*). 1. Heft. In-8, III-54 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 2 m.

CRELIER (L.). — *L'enseignement des Mathématiques dans les Écoles techniques moyennes suisses.* (*Der mathematische Unterricht in der Schweiz. L'enseignement mathématique en Suisse.* Berichte der schweiz. Subkommission der internationalen mathemat. Unterrichtskommission, hrsg. v. *H. Fehr.* Nr. 5.) In-8, 112 p. Bâle, Georg et Co. 2.25 m.

POTIER (A.). — *Mémoires sur l'Électricité et l'Optique.* Avec une Préface de *Henri Poincaré.* In-8 (25-16), XX-330 p. avec fig. et portrait. Paris, Gauthier-Villars. 13 fr.

MOHLER (G.-O.). — *Tabellen zur Berechnung der Tage, Zinszahlen u. deren Zinswerte f. Konto-Korrente nach retrograder u. progressiver Methode m. viertel- u. halb-jährlichen Abschlüssen.* Das Jahr zu 360 Tagen gerechnet. Anwendbar f. jedes Kapital. In-8, IX-231 p. Zürich, Art. Institut Orell Füssli. Relié. 16 m.

VIROLLEAUD (Ch.). — *L'astrologie chaldéenne. Le livre intitulé « Enuma Anu il Bel » trad. et commenté.* Fasc. 11, second supplément, texte cunéiforme, 1re partie (Sid, Samash), 68 pl. Paris, P. Geuthner. 12 fr.
— Fasc. 14, second supplément, transcription, 2e partie (Istar, Adar), 69 pl. Paris, P. Geuthner. 12 fr. 50.

WHITEHEAD (Alfr.-North.) and RUSSELL (Bertrand). — *Principia mathematica.* Vol. 2. 796 p. Cambridge Univ. Press. 30 s.

THOMSON (J.-J.). — *Passage de l'électricité à travers les gaz*, trad. par R. FRIC et A. FAURE. In-8, X-694 p. avec 209 fig. Paris, Gauthier-Villars. 24 fr.

HOFFMANN (Bernh.). — *Mathematische Himmelskunde u. niedere Geodäsie an den höheren Schulen.* (*Abhandlungen üb. den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Veranlasst durch die internationale mathemat. Unterrichtskommission, hrsg. v. *F. Klein.* III, 4.) In-8, V-68 p. avec 9 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 2 m.

Annales du Bureau central météorologique de France, publiées par A. ANGOT, Directeur du Bureau central météorologique. Année 1909. III : Pluies. 152 p. et 4 planches. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

APPELL (P.). — *Cours de Mécanique de la Classe de Mathématiques spéciales.* 3e édition. In-8, IV-517 p. avec 191 fig. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DARBOUX (GASTON). — ÉLOGES ACADÉMIQUES ET DISCOURS. *Volume publié par le Comité du Jubilé scientifique de M.* GASTON DARBOUX. 1 vol in-18 jésus, avec un Portrait. VI-525 pages; Éloges et Discours : p. 1-440; Jubilé : p. 441-502; Liste des souscripteurs : p. 503-524. Paris, A. Hermann et fils, 1912.

Le 21 janvier 1912, les mathématiciens français et étrangers, auxquels s'étaient unis les anciens élèves, les amis et les admirateurs de M. Gaston Darboux, ont célébré le cinquantième Anniversaire de son entrée dans l'Enseignement. Le Comité, qui avait de longue main organisé cette belle fête, a eu l'heureuse idée d'offrir aux nombreux adhérents au Jubilé de M. Gaston Darboux, en outre d'une Médaille reproduisant ses traits, un Livre précieux où, avant les Discours si sincères prononcés à la Cérémonie par d'illustres savants de France et d'Europe et les cordiales Adresses d'Académies et de Sociétés savantes, sont imprimés les Éloges et les Notices historiques que M. Gaston Darboux a lus dans des séances publiques de l'Académie des Sciences, en qualité de Secrétaire perpétuel de cette Académie, et quelques-uns des Discours qu'il a prononcés dans diverses cérémonies.

C'est avec le plus vif intérêt qu'on lit l'exposé que fait M. Gaston Darboux de la vie des savants qu'il nous rappelle, les points saillants de leur caractère, l'appréciation impartiale de leur œuvre. Le continuel souci qu'il a toujours eu de respecter la vérité donne une grande valeur historique à ses Éloges et Notices. Dans tous ses Éloges, Notices et Discours, M. Gaston Darboux s'exprime avec une générosité de cœur, une élévation, une noblesse rappelant les Écrits des illustres Secrétaires perpétuels qui l'ont précédé à l'Académie des Sciences.

ER. L.

LEBON (ERNEST). SAVANTS DU JOUR : HENRI POINCARÉ. *Biographie, Bibliographie, Analyse des Écrits.* Seconde édition entièrement refondue, avec un Portrait en héliogravure. 1 vol. in-8 jésus, IV-112 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Lorsque, le 7 avril 1908, à Rome, les membres du IVe Congrès des Mathématiciens apprirent la soudaine manifestation chez Henri Poincaré d'une maladie grave, ce fut parmi eux une consternation générale : savants de nationalités variées, de valeurs diverses, mais également épris de la recherche du Vrai, tous se trouvèrent unis dans une commune inquiétude, témoignage à la fois d'admiration et de sympathie, et tous éprouvèrent un indicible soulagement en recevant l'assurance, au bout de quelques jours, du rétablissement apparent du Maître aimé. Ils n'étaient plus groupés, ses fervents, mais bien dispersés comme chaque année au début des vacances, quand, le matin du 17 juillet 1912, les journaux annoncèrent la mort foudroyante du grand savant : une habile intervention chirurgicale du docteur Desnos semblait devoir amener une guérison définitive, et voilà que brusquement une embolie terrassa le « lutteur ». Et tout le monde de la Science de rentrer précipitamment à Paris, de se presser aux funérailles, de dire sa douleur dans d'innombrables Discours prononcés devant la tombe, de crier aux profanes, dans des Articles de quotidiens ou de revues, la perte que faisait l'humanité, le vide immense laissé par la disparition de ce Génie pour lequel beaucoup eussent désiré les honneurs du Panthéon.

Les hommages ainsi rendus à la mémoire d'Henri Poincaré ne paraissent cependant pas plus durables, plus précieux, que la publication faite par M. E. Lebon, dans sa série de Monographies sur les *Savants du Jour*, d'une ample *Notice biographique et bibliographique*, où l'on trouve le tableau complet, définitif de l'œuvre du plus grand mathématicien que la France ait possédé depuis Cauchy. A vrai dire, ce n'est pas une étude nécrologique, ce n'est même qu'une réédition transformée et mise à jour d'un travail paru en 1909 et rapidement épuisé; mais, par la fatalité des circonstances, il se trouve qu'il y est fait état de *toutes* les productions de l'illustre académicien.

L'Opuscule, en tête duquel a été encarté un beau portrait assez récent en héliogravure, est divisé en sept Sections.

La première, consacrée à la biographie, contient la majeure partie du Discours prononcé par M. Frédéric Masson en recevant Henri Poincaré à l'Académie Française, une brève Allocution de M. Darboux, un *curriculum vitæ* détaillé et l'énumération des Écrits consacrés depuis 1908 à la personne et à l'œuvre de Poincaré.

Les trois Sections suivantes ont pour objet les travaux mathématiques rangés sous les chefs : *Analyse mathématique*, *Mécanique analytique* et *Mécanique céleste*, *Physique mathématique*. Chacune est précédée d'une substantielle étude empruntée soit au Rapport sur le prix Bolyai, décerné à Poincaré en 1905, soit au Discours de G. H. Darwin, lors de la remise, en 1900, de la médaille d'or de la Société royale astronomique de Londres. Mais la partie essentielle en est la liste systématique des publications de Poincaré, parfois avec une courte analyse, toujours avec l'indication complète des analyses qui furent faites. Le progrès de l'édition actuelle, par rapport à la première, consiste surtout dans une classification nouvelle et commode des Mémoires qui se trouvent groupés par sujets bien déterminés : ainsi tel qui s'intéresse à l'*Analysis Situs* trouvera réunis sous cette rubrique, dans l'ordre de leur publication, toutes les Notes, tous les Mémoires du Maître, de qui d'ailleurs cette classification a été approuvée.

La cinquième Section, relative à la *Philosophie scientifique*, et qui s'ouvre par l'analyse que donna Faguet du Livre *Science et Méthode*, s'est développée notablement du fait que Poincaré a été de plus en plus sollicité de porter un peu partout la bonne parole scientifique.

La sixième Section, refondue, a pour titre : *Histoire des Sciences*, et elle comporte aussi des divisions méthodiques. Ce groupement d'études montre comment les circonstances ont fait du mathématicien le plus intéressant et le plus autorisé des historiens de la Science contemporaine.

La dernière Section comprend comme *Publications diverses* tout ce qui ne s'est pas enchâssé logiquement dans les Sections précédentes : Articles pédagogiques, politiques, Discours, Rapports, Préfaces....

Le nombre des écrits cités a passé de 436 à 495; l'Ouvrage s'est accru d'une trentaine de pages, tant du fait des travaux nouveaux que des analyses et articles récemment publiés. La soigneuse exactitude, la religieuse minutie de M. Lebon nous sont un garant que rien n'a été omis : le monde savant sera reconnaissant à l'Auteur de la tâche de bénédictin qu'il s'est imposée.

Devant l'immense production de Poincaré, immense en profondeur comme en étendue, il semble se dégager un caractère de son génie qui n'a peut-être pas été assez observé : son œuvre a été tout entière « informée » par les circonstances. Tandis que de grands mathématiciens, comme Weierstrass, Sophus Lie, ont consacré toute leur vie à développer un petit nombre d'idées et à creuser des questions qu'ils se posaient eux-mêmes, Poincaré n'a jamais voulu rester ainsi enfermé dans sa « tour d'ivoire » : il a attaqué *tous* les problèmes qui s'imposaient à ses contemporains. « C'est faire un triste métier, écrivait Jules Tannery, que de descendre toujours en soi-même pour y chercher des idées. C'est faire comme une fille qui voudrait se féconder elle-même : la folle sait bien que ce n'est pas en elle qu'est la semence sacrée ». Henri Poincaré a eu une merveilleuse aptitude à recueillir tous les germes que l'agitation du siècle soulevait autour de lui et à les rendre nourris de sa substance, doués d'une vie énergique, prêts pour l'action.

Nul mieux que Poincaré n'a su *regarder* autour de lui, attentif à trier dans le fatras des idées banales et des faits insignifiants les moindres « valeurs » d'avenir, pour les transformer au point de les rendre méconnaissables. Son premier travail n'a-t-il pas été provoqué par les recherches de Briot et Bouquet sur les cas d'exception du théorème de Cauchy concernant les solutions des équations différentielles ordinaires? Et dans son extension de ces vues au cas des équations aux dérivées partielles, sa hardiesse de démonstration, préoccupée des difficultés de fondation, mais insoucieuse des détails, déconcerta Bouquet au point que celui-ci hésita à accepter, sous la forme présentée, cette belle étude comme thèse de doctorat. Ce n'est pas ici le lieu, mais il serait intéressant de suivre la liste chronologique des publications de Poincaré et de préciser pour chaque groupe la « force décrochante », comme eût dit Barré de Saint-Venant. Citons au hasard les travaux de Linstedt et de

Gyldén, qui ont provoqué les recherches sur le problème des trois corps et sur les séries de la Mécanique céleste, la question posée par l'Académie en 1880, et qui a été l'occasion de la création des transcendantes fuchsiennes, les expériences de Hertz et la télégraphie sans fil, qui ont fourni le point de départ d'importantes études théoriques, et, pour finir, laissant de côté les questions de philosophie, les vues de Planck sur les lois du rayonnement, qui ont déterminé Poincaré à aborder cette angoissante *théorie des quanta* qui fut comme son chant du cygne.

Le mot d'angoisse que je viens d'écrire n'est pas ici une épithète banale; il me paraît correspondre bien à un état d'âme du Maître en présence de certaines énigmes qu'il prétendait déchiffrer. Tels les problèmes de Géométrie de situation, dont la solution lui était nécessaire pour pousser plus avant l'étude des fonctions définies par des équations différentielles; et l'on a déjà bien attiré l'attention sur le curieux travail inachevé, publié à Palerme en mars 1912, et dans la préface duquel l'Auteur s'excusait de présenter des résultats incomplets, avec je ne sais quel sinistre pressentiment : « Après les inutiles efforts que j'ai faits pendant de longs mois, il m'a paru que le plus sage était de laisser mûrir le problème en m'en reposant durant quelques années; cela serait très bien si j'étais sûr de pouvoir le reprendre un jour; mais, à mon âge, je ne puis en répondre ». Telle encore cette théorie des quanta, où l'ordinaire substitution du continu de notre pensée au discontinu de la nature se bute à un obstacle insurmontable quand il s'agit d'éviter l'hypothèse de la variation discontinue de l'énergie des radiateurs lumineux : « Il est à peine nécessaire, écrit Poincaré, de faire remarquer combien cette conception s'écarte de tout ce qu'on avait imaginé jusqu'ici : les phénomènes physiques cesseraient d'obéir à des lois exprimables par des équations différentielles, et ce serait là, sans aucun doute, la plus grande révolution et la plus profonde que la Philosophie naturelle ait subie depuis Newton ».

Cet abandon de l'idée du continu en Physique théorique eût rendu presque vaines les méditations de la vie entière de Poincaré : il ne sera pas consenti. Il faut tourner l'obstacle qui n'a pu être franchi, faute de temps, par le Maître. C'est une tâche qui s'impose à ceux qui l'ont aimé, c'est un devoir de piété envers celui pour

qui la légendaire « sérénité de la Science » n'a été qu'un mot sonore et qui n'a connu que « l'angoisse de la recherche ».

A. Boulanger.

RAYLEIGH (John William STRUTT, Baron). Scientific Papers. — Vol. V (1902-1910). 1 vol. in-8 jésus, XIII-624 pages. Cambridge, University Press, 1912.

Lord Rayleigh poursuit la publication de ses Notes et Mémoires scientifiques; le présent Volume, qui contient 77 pièces, réunit ce qu'a produit l'activité scientifique de l'auteur depuis l'année 1902 jusqu'à la fin de l'année 1910.

Si cette activité surprend par son intensité, elle n'étonne pas moins par la variété des sujets sur lesquels elle s'exerce. Le présent Volume, par exemple, contient une multitude de Mémoires propres à retenir surtout le lecteur qu'intéresse l'application des Mathématiques à la Physique; mais il en est aussi, et de nombreux, que l'expérimentateur aura grand profit à étudier; tels sont ceux qui ont pour objets: *La loi de compressibilité des gaz entre* 75^{mm} *et* 150^{mm} *de mercure; La question de la présence de l'hydrogène dans l'atmosphère; L'influence des mouvements de la Terre sur la rotation du plan de polarisation; La distillation des mélanges binaires; La compressibilité des gaz entre une demi-atmosphère et une atmosphère;* mais nous serions trop prolixes si nous nous piquions d'être complets.

Nous n'analyserons pas ici ces travaux de Physique expérimentale ou de Chimie; nous ne retiendrons que les écrits de Physique mathématique; encore devrons-nous nous borner à mentionner quelques-uns d'entre eux; il en est un grand nombre dont l'étude nous entraînerait beaucoup trop loin; compléments ajoutés par Lord Rayleigh à sa *Theory of Sound* ou à ses Mémoires plus anciens, remarques suggérées par les travaux d'autrui, l'examen de chacun de ses écrits exigerait une longue introduction.

Deux importants Mémoires d'Optique géométrique sont consacrés à l'étude des aberrations.

En l'un d'eux ([1]), l'auteur, à l'aide de la *fonction caractéristique* introduite par Hamilton, retrouve très simplement les cinq aberrations définies par von Seidel. Il y joint quelques considérations sur les systèmes qui ont un champ de très grande ouverture angulaire — tels les objectifs photographiques. Il confirme et complète les résultats que M. Schwarzschild a obtenus à l'aide d'une forme spéciale donnée à la fonction caractéristique de Hamilton, et nommée par lui *iconiel* ([2]) de von Seidel.

L'autre ([3]) traite un problème qui, du moins à notre connaissance, n'avait pas été abordé jusqu'ici; il s'agit d'étudier les aberrations d'un système optique qui n'est plus de révolution, mais qui présente seulement deux plans de symétrie rectangulaires, de manière à offrir des grossissements différents dans les divers plans qui passent par l'intersection des deux premiers. De tels systèmes pourraient offrir de grands avantages en certaines circonstances; lorsqu'on se propose, par exemple, d'observer un spectre ou des franges d'interférence, on a besoin d'un fort grossissement dans une direction perpendiculaire aux lignes du spectre ou aux franges; mais dans une direction parallèle à ces lignes ou à ces franges, on n'a que faire d'un grossissement puissant; en délaissant ce grossissement inutile, on pourrait garder à l'image un éclairement beaucoup plus intense, ce qui, en de telles observations, est un très grand avantage.

La théorie de la diffraction est l'objet de plusieurs Mémoires composés par Lord Rayleigh en ces dix dernières années. Ces Mémoires ont trait, d'ailleurs, à la partie la plus délicate de cette théorie.

Parmi les problèmes que le mathématicien doit résoudre lorsqu'il veut analyser une expérience de diffraction, il en est un très grand

---

([1]) N° 329. *Hamilton's Principle and the five Aberrations of von Seidel*; pp. 456-464.

([2]) M. Schwarzschild a donné à cette fonction le nom allemand : *Das Eikonal* (εἰκὼν, image). Par certains traités français, s'introduit la fâcheuse habitude de transporter ce nom en français et de dire : L'*eikonal*. Mais de même que *Potential*, *Virial*, *Ergal* se traduisent par *potentiel*, *viriel*, *ergiel*, *Eikonal* doit évidemment se traduire par *iconiel* puisque εἰκὼν donne *icone*.

([3]) N° 328. *On the Aberration of Sloped Lenses and on their Adaption to Telescopes of Unequal Magni-fying Power in Perpendicular Directions*; pp. 442-455.

nombre qu'une heureuse circonstance vient simplifier : les dimensions des écrans qui s'opposent à la lumière ou des ouvertures qui la laissent passer sont extrêmement grandes par rapport aux longueurs d'onde des diverses couleurs qui figurent en cette lumière. Cette circonstance ne se rencontre pas dans les expériences d'Acoustique que l'on disposerait à l'imitation des expériences d'Optique ; aussi celles-ci prêtent-elles à une analyse beaucoup plus aisée que celles-là ; cette petitesse de la longueur d'onde par rapport aux dimensions des obstacles est l'approximation fondamentale admise par toutes les théories de la diffraction, depuis les géniales intuitions de Fresnel jusqu'à la rigoureuse méthode de Kirchkoff.

Mais, comme l'ont remarqué W. Voigt et Kirchkoff, il est des circonstances où cette approximation n'est plus de mise ; et certaines de ces circonstances sont trop importantes pour être délaissées.

Par exemple, les perfectionnements apportés à la construction des réseaux ont permis de fournir de tels instruments où la largeur des traits et la largeur de leurs intervalles sont grandeurs du même ordre que la longueur d'onde ; on sait de quel usage ces réseaux très fins sont en l'étude des spectres ; or, il serait illégitime de tirer l'explication des phénomènes qu'ils présentent de la théorie ordinaire de la diffraction ; cette explication doit être donnée directement par une analyse où la longueur d'onde ne soit plus dite infiniment petite à l'égard des dimensions des ouvertures et des écrans. Une telle analyse offrira toutes les difficultés qu'on rencontre en la solution des problèmes d'Acoustique ; nul, peut-être, n'est plus familiarisé avec ces difficultés que ne l'est Lord Rayleigh, ni plus habitué à en triompher ; nous ne nous étonnerons donc pas de lui voir consacrer deux importants Mémoires [1] à la théorie mathématique des réseaux.

L'emploi des réseaux n'est pas la seule circonstance où il soit nécessaire d'analyser la diffraction sans négliger la longueur d'onde par rapport aux dimensions des corps que la lumière doit

---

[1] N° 322. *On the Dynamical Theory of Gratings* : pp. 388-405. — N° 324. *On the Light dispersed from Fine Lines ruled upon Reflecting Surfaces or transmitted by very Narrow Slits* : pp. 410-418.

contourner; l'emploi, de plus en plus fréquent, des ondes hertziennes a multiplié les circonstances de ce genre; beaucoup plus lentes que les vibrations lumineuses visibles, les vibrations hertziennes ont, le plus souvent, des longueurs d'onde du même ordre de grandeur que les dimensions des obstacles qui troublent leur propagation. La diffraction des ondes hertziennes ne pourra donc se discuter par les formules introduites par Fresnel en l'étude de la diffraction de la lumière; elle devra être traitée directement.

Aussi est-ce en songeant constamment aux ondes hertziennes que l'auteur étudie (1) les phénomènes produits par des ondes lumineuses planes qui tombent sur une sphère transparente de dimensions comparables à la longueur d'onde. D'ailleurs, il avait déjà étudié, dans sa *Theory of Sound*, puis dans un Mémoire (2) antérieur à celui dont nous venons de parler, l'effet produit sur des ondes sonores par une sphère rigide de dimensions comparables à la longueur d'onde.

Il ne suffit pas que la longueur d'onde devienne négligeable par rapport aux dimensions des obstacles, pour que le problème de la diffraction des ondes hertziennes cesse de présenter des difficultés. Par rapport à la longueur d'onde des oscillations qu'emploie la télégraphie sans fil, le diamètre de la Terre est, à peu près, comme une longueur de 2^{cm} à 3^{cm} par rapport à la longueur d'onde d'une radiation lumineuse visible (3); si donc la Terre agissait sur les oscillations hertziennes de la même manière qu'un corps opaque, poli ou non, agit sur les vibrations lumineuses, la rotondité de la Terre intercepterait presque aussitôt les effets produits par un oscillateur électrique dont la distance au sol est de l'ordre de la longueur d'onde. La transmission, à des distances immenses, des signaux télégraphiques contredit formellement cette conclusion. La théorie de la diffraction des ondes hertziennes ne peut donc, même dans le cas où la longueur d'onde est négligeable par rapport aux dimensions des obstacles, être calquée sur la théorie de la diffraction des ondes lumineuses; elle

(1) N° 344. *The Incidence of Light upon a Transparent Sphere of Dimensions Comparable with the Wawe-length;* pp. 546-568.

(2) N° 292. *On the Acoustic Shadow of a Sphere;* pp. 149-165.

(3) N° 287. *On the Bending of Waves round a Spherical Obstacle;* pp. 112-114.

doit être reprise en elle-même, en introduisant, le long de la surface du sol, des conditions aux limites différentes de celles qui sont reçues en Optique. On connaît les efforts tentés par M. H. Poincaré pour résoudre ce problème; l'insuccès de ces efforts laisse à penser que la question est d'une extrême difficulté.

Les problèmes dont nous venons de parler appartiennent à l'Acoustique aussi bien qu'à l'Optique ou à l'Électrodynamique. Les Mémoires ou Notes qui intéressent surtout l'Acoustique abondent, d'ailleurs, dans le Volume que nous avons sous les yeux : tels sont une étude (1) du problème à deux dimensions qui correspond au problème des tuyaux ouverts, et toute une suite de Notes (2) sur la production et la distribution du son.

Les divers écrits dont nous venons de parler appliquent les équations de l'Hydrodynamique, de l'Élasticité ou de l'Électrodynamique à des milieux continus, et sont ainsi conduits à discuter des équations aux dérivées partielles; l'étude des petits mouvements des systèmes qui dépendent d'un nombre limité de paramètres est beaucoup plus simple, puisqu'elle se ramène à l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants; cette étude, néanmoins, peut fournir certains théorèmes généraux qu'une intuition bien naturelle, encore qu'elle requière une justification directe, étend ensuite aux systèmes continus.

Lorsque le système étudié est exempt de toute résistance passive, on sait, depuis Lagrange, écrire les équations générales des petits mouvements qu'il peut exécuter au voisinage d'une position d'équilibre stable, et mettre en évidence les principales propriétés de ces mouvements. Les géomètres anglais, Lord Kelvin, P.-G. Tait, Lord Rayleigh, M. Routh se sont attachés à l'étude des petits mouvements des systèmes où entrent en jeu des résistances proportionnelles aux vitesses. Lord Rayleigh, en particulier, soit en ses anciens Mémoires, soit en sa *Theory of Sound*, a étudié la résonnance de tels systèmes soumis à des forces extérieures périodiques; lorsque la période de l'une de ces forces coïncide avec la période de l'une des vibrations propres du système, l'amplitude

(1) N° 301. *On the Open Organ-pipe Problem in two Dimensions;* pp. 206-211.
(2) N° 290. *On the Production and Distribution of Sound*; pp. 126-141.

du mouvement excité n'est plus infinie, comme il arrive pour les systèmes dénués de viscosité.

Cette étude de la résonnance des systèmes affectés de résistance passive est reprise en un des Mémoires [1] ici réunis. L'auteur y recherche les circonstances qui rendent maximum, sous certaines conditions données, le travail de l'une des forces qui excitent la résonnance; les valeurs de ces travaux maxima sont susceptibles d'expressions d'une extrême simplicité; on peut en dire autant des formules que l'on rencontre dans l'évaluation de l'énergie restaurée par le résonnateur. L'intérêt des divers théorèmes établis par Lord Rayleigh est d'autant plus grand que la portée de ces théorèmes excède la Mécanique; on les peut, en effet, appliquer de toutes pièces à des ensembles de circuits électriques contenant des condensateurs.

Le problème auquel est consacré le Mémoire dont nous venons de parler se trouve très étroitement apparenté à un problème auquel on est conduit par la théorie des marées.

Laplace avait été amené, pour faire la théorie des marées à longue période, marées semi-mensuelles ou marées semestrielles, à supposer que grâce à l'influence des résistances passives, la mer pouvait être considérée comme ayant, à chaque instant, sa figure d'équilibre.

La théorie des petits mouvements rendrait cette proposition très vraisemblable si les marées pouvaient être considérées comme les vibrations forcées que des forces extérieures périodiques imposent à un système pris au voisinage d'un état d'équilibre stable; mais les marées ne sont pas des perturbations d'un système en équilibre; ce sont des perturbations introduites en un système en équilibre relatif, en un système qu'anime un mouvement de rotation uniforme; et ce que Laplace nomme une figure d'équilibre n'est même pas une figure d'équilibre relatif, mais la figure qui correspondrait à un certain régime permanent. Aussi, en partant des équations mêmes que Laplace avait données pour les oscillations d'une couche liquide d'uniforme épaisseur répandue sur une sphère animée d'un mouvement de rotation uniforme,

---

[1] N° 274. *Some general Theorems concerning Forced Vibrations and Resonance;* pp. 8-26.

G. Darwin a-t-il été amené à révoquer en doute l'exactitude du postulat de Laplace.

Pour jeter quelque jour sur cette difficile et importante question, Lord Rayleigh aborde (1) l'étude des vibrations forcées d'un système déterminé par un nombre fini de variables, en exemptant, il est vrai, ce système de toute viscosité, mais en le soumettant à des forces analogues aux forces centrifuges, à ce que Lord Kelvin et P.-G. Tait nomment des forces gyrostatiques ou des forces rotatoires. Comme ces forces sont proportionnelles aux dérivées par rapport au temps de certaines des variables, et comme, en outre, on les suppose ici très petites, les équations que l'on a à traiter ressemblent beaucoup à celles qui régissent les petites vibrations forcées d'un système affecté de viscosité. Cette analyse montre que la figure prise par un tel système, sous l'action de forces perturbatrices périodiques à très longue période, peut fort bien différer notablement de la figure qui correspondrait à l'écart de régime permanent, à supposer même que ce régime fût possible.

Cette influence de la rotation de la Terre sur les oscillations des mers est chose si importante, qu'on ne sera pas surpris de voir Lord Rayleigh y revenir à plusieurs reprises, soit pour discuter plus avant (2) les vibrations d'un système déterminé par un nombre limité de variables et soumis à de petites forces gyrostatiques; soit pour déterminer (3) les oscillations d'une couche de liquide pesant, bornée par des parois rectangulaires, et animée d'un mouvement uniforme et très lent de rotation autour d'un axe vertical passant par le centre du rectangle; soit, enfin, pour analyser les vibrations (4) d'un océan d'uniforme profondeur qui recouvrirait la surface de la sphère terrestre comprise entre deux méridiens.

De crainte d'être trop long, il nous faut délaisser l'analyse de mainte Note importante, afin de nous arrêter un instant à l'étude

---

(1) N° 282. *Note on the Theory of the Forthnigthly Tide;* pp. 84-88.

(2) N° 283. *On the Free Vibrations of Systems affected with Small Rotatory Terms;* pp. 89-92.

(3) N° 284. *On the Vibrations of a Rectangular Sheet of Rotating Liquid;* pp. 93-97.

(4) N° 334. *Notes concerning Tidal Oscillations upon a Rotating Globe;* pp. 497-514.

d'un Mémoire que son étendue même signale à notre attention : nous voulons parler de celui qui a pour objet la propagation, dans un gaz, d'une onde plane d'amplitude finie [1].

L'auteur débute par une analyse historique et critique, extrêmement intéressante, de toutes les recherches auxquelles ce problème a donné lieu depuis Poisson; il est amené, par là, à remettre en valeur un Mémoire très complètement, mais très injustement oublié, que Rankine avait composé. Voici le problème abordé et résolu par Rankine :

Un gaz parfait, dénué de viscosité, mais dont le coefficient de conductibilité k n'est pas nul, remplit un tuyau cylindrique illimité dans les deux sens; à l'infini vers la gauche, le gaz à une température θ_1, un volume spécifique v_1, une pression p_1, une vitesse (comptée positivement de gauche à droite) u; à l'infini vers la droite, les mêmes grandeurs ont pour valeurs θ_2, v_2, p_2, u_2. Si toutes ces valeurs sont maintenues constantes, il peut s'établir au sein de la masse gazeuse un régime permanent que Rankine détermine.

L'état du gaz, caractérisé en chaque point par les valeurs de θ, v, p, u, se propage de gauche à droite avec une vitesse

$$V_1 = u_1 + \sqrt{v_1 \frac{(\gamma - 1)\, p_1 - (\gamma + 1)\, p_2}{2}},$$

γ étant le rapport de la chaleur spécifique sous pression constante à la chaleur spécifique sous volume constant.

En outre, le principe de Carnot et de Clausius exige que l'on ait

$$p_1 > p_2$$

ou que la propagation ait lieu du gaz le plus fortement pressé vers le gaz le moins comprimé.

Or ces résultats sont semblables de tous points à ceux qu'Hugoniot a obtenus, longtemps après Rankine, en étudiant la propagation, au sein d'une masse gazeuse *non conductrice*, d'une onde de choc au travers de laquelle la pression tombe brusquement de la valeur p_1 à la valeur p_2.

Cette concordance attire vivement l'attention de Lord Rayleigh.

---

[1] N° 346. *Aerial Plane Waves of Finite Amplitude*; pp. 573-610.

« Un rapide examen, dit-il après avoir rappelé les résultats obtenus par Hugoniot, nous révèle que cette loi est *précisément la même* que celle qui avait été donnée quinze ans auparavant par Rankine. Ce fait est d'autant plus étonnant que les deux auteurs partent de points de vue entièrement différents. La recherche de Rankine, comme nous l'avons vu, est expressément fondée sur l'existence d'une conductibilité calorifique dans le gaz, tandis qu'Hugoniot suppose le gaz non conducteur. Une question quelque peu délicate est ici impliquée, qui demandera un examen attentif. »

Ajoutons que les problèmes traités par les deux auteurs sont, eux aussi, essentiellement différents; Rankine considère un *régime permanent* par lequel le gaz passe, *d'une manière continue*, de l'état 1 à l'état 2; Hugoniot étudie la propagation d'une *discontinuité* à laquelle il n'impose pas la condition de constituer un régime permanent; cette différence des problèmes traités permet seule de comprendre comment les formules obtenues peuvent être semblables, en dépit de l'opposition des hypothèses.

Lord Rayleigh paraît, d'ailleurs, révoquer en doute la possibilité de la propagation des ondes considérées par Hugoniot. « Je prétends, dit-il, que les ondes de cette espèce ne sont pas possibles dans les conditions, supposées par Hugoniot, où il n'y a ni viscosité ni conductibilité calorifique. »

Il nous semble, cependant, que l'analyse d'Hugoniot peut, dans l'analyse même de Rankine, trouver sa justification.

En résumant, en effet, les résultats de cette dernière analyse, Lord Raleigh écrit :

« Mathématiquement, l'onde est infiniment longue; mais, pratiquement, le changement de pression est effectué en une distance comparable à $\frac{k}{mc(\gamma-1)}$, ce qui, par rapport aux grandeurs qui servent ordinairement d'étalons, est petit. »

Si le coefficient de conductibilité k est très petit, la région du gaz où l'état varie notablement d'un point à l'autre se trouve pratiquement réduite à une couche extrêmement peu épaisse, à ce que nous avons appelé une *quasi-onde*, qui se propage avec la vitesse V_1. Si le coefficient de conductibilité k tend vers o d'une manière continue, le régime continûment variable, étudié par Rankine, a pour forme limite l'onde de choc étudiée par Hugoniot.

Ni l'un ni l'autre de ces deux auteurs n'a tenu compte de la viscosité dont le gaz est affecté. Lord Raleigh tente de reprendre l'analyse de Rankine en y introduisant l'action de cette viscosité. Malheureusement le problème, comme la plupart de ceux qui ont trait aux fluides visqueux, devient alors d'une difficulté extrême, et la solution n'en peut être menée jusqu'au terme.

Puisse cette analyse, bien imparfaite, donner à beaucoup de lecteurs le désir d'étudier les *Papers* de Lord Rayleigh; à ceux surtout qui veulent apprendre l'art de résoudre et de discuter d'une manière complète un problème de Physique posé avec précision, il serait, croyons-nous, difficile de trouver des modèles plus variés et plus achevés.

PIERRE DUHEM.

REID (LEGH WILBER). — THE ELEMENTS OF THE THEORY OF ALGEBRAIC NUMBERS, with an Introduction by DAVID HILBERT. 1 vol. grand in-8, XIX-454 pages. New-York, the Macmillan Company, 1910.

S'il est vrai, suivant le mot de M. Hilbert dans son introduction à l'Ouvrage de M. Reid, « qu'il n'existe jusqu'à présent aucune science qui n'ait suscité d'aussi fervents adeptes que la théorie des nombres », comment se fait-il que cette branche des Mathématiques soit aussi délaissée? Peut-être faut-il en chercher une raison dans la rareté des Ouvrages didactiques traitant de la question. Le Volume que M. Reid vient de lui consacrer comblera donc une lacune; sa lecture permettra à l'étudiant d'aborder directement les Mémoires originaux.

L'Ouvrage débute par un Chapitre préliminaire sur la définition des nombres et des entiers algébriques, des corps de nombres (« realm » suivant l'expression de M. Reid), des corps et des nombres conjugués. L'auteur indique (sans démonstration) que tout corps peut être défini à l'aide d'un seul nombre. Le premier corps qui se présente naturellement est le corps rationnel, R; les trois Chapitres suivants en développent les propriétés fondamentales, dont l'extension aux autres corps constituera l'objet des Chapitres ultérieurs. Les démonstrations relatives au corps rationnel ont donc été choisies de façon à pouvoir s'adapter aux

autres corps moyennant les modifications nécessaires. L'étude des corps algébriques conduit à l'introduction des idéaux dont l'étude des propriétés fondamentales est le but ultime de l'Ouvrage. D'ailleurs, il ne s'agira presque exclusivement que des corps quadratiques, pour lesquels les démonstrations sont singulièrement plus faciles.

Dans le Chapitre II (*Divisibilité des entiers*), l'Auteur définit les nombres premiers, montre qu'ils forment un ensemble infini et énonce la proposition de Dirichlet-Kronecker sur l'existence d'une infinité de nombres premiers dans la progression arithmétique $a+nr$ (a et r premiers entre eux). Puis il établit l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers à l'aide des trois théorèmes classiques suivants :

Théorème A. — *Si a et b sont deux entiers quelconques (dont le second est différent de zéro)*, il existe un entier m tel que

$$|a-mb|<|b|.$$

Théorème B. — *Si a et b sont deux entiers quelconques premiers chacun à chacun, il existe deux entiers x et y tels que*

$$ax+by=1.$$

Théorème C. — *Si le produit de deux entiers a et b est divisible par un nombre premier p, l'un au moins des entiers est divisible par p.*

Ces théorèmes permettent d'établir que si

$$x^l+a_1x^{l-1}+\ldots+a_l=0$$

est l'équation de degré minimum à laquelle satisfait un entier algébrique, les a_i sont des entiers rationnels, d'où il résulte que les termes d'entier rationnel et d'entier de R sont pleinement équivalents. Ce Chapitre se termine par des théorèmes classiques sur la divisibilité des entiers, la somme des diviseurs d'un nombre et la divisibilité de $(a+b+\ldots+k)!$ par $a!\,b!\ldots k!$

Le Chapitre III (*Congruences*) introduit la notion de congruence et en donne les propriétés fondamentales ; puis il définit la fonction numérique $\varphi(m)$, dont l'expression est calculée par

deux méthodes classiques ; la seconde de ces méthodes, plus compliquée, est susceptible d'extension aux corps algébriques.

Après avoir donné les propriétés de la fonction $\varphi(m)$ et la définition des fonctions $\varphi_n(m)$ d'ordre supérieur, l'Auteur démontre le théorème de Fermat sous la forme généralisée d'Euler ; il aborde ensuite la théorie des congruences à une ou plusieurs inconnues qu'il compare à celles des équations algébriques. La détermination d'un entier qui a des résidus donnés par rapport à des modules donnés, est effectuée de deux façons différentes lorsque ces modules sont premiers entre eux deux à deux. Puis vient la théorie de la divisibilité d'un polynome par un autre, relativement à un module premier, et l'extension aux polynomes des propriétés correspondantes de la théorie des nombres.

L'Auteur montre alors que le nombre des racines d'une congruence de degré n, relative à un module premier, est au plus égal à n, et il insiste sur le cas important de la congruence $x^{\varphi(m)} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$, d'ou résulte le théorème de Wilson ; puis il étudie les congruences à une inconnue par rapport à un module premier et donne les propositions classiques sur les résidus de puissances, les racines primitives et leur détermination, les indices et leur emploi pour la résolution des congruences : un cas particulièrement important est celui des congruences binomes auxquelles s'applique le critérium d'Euler.

Le lecteur se trouve ainsi préparé à la théorie des résidus quadratiques qui est développée dans le Chapitre IV. Après avoir déterminé les résidus d'un module premier donné, M. Reid aborde le problème inverse ; il définit le symbole de Legendre et démontre le lemme de Gauss ; quant à la loi de réciprocité, elle est établie par la méthode de Zeller. Le Chapitre se termine par des applications intéressantes de la loi à la théorie des nombres premiers.

Les Chapitres suivants étendent les propriétés du corps rationnel aux autres corps algébriques. Afin d'introduire progressivement le lecteur dans cette théorie, l'Auteur commence par traiter en détail dans le Chapitre V le cas particulièrement important du corps $k(\sqrt{-1})$. Il définit d'abord la norme d'un nombre du corps, puis la forme des entiers du corps, la base, le discriminant, les unités et les nombres premiers du corps. Il montre qu'on peut

étendre au corps $k(\sqrt{-1})$ les théorèmes A, B, C donnés pour le corps rationnel et, par suite, un entier du corps n'est décomposable que d'une manière en facteurs premiers. Viennent ensuite les extensions de la théorie des congruences, de l'expression de $\varphi(m)$ et du théorème de Fermat. Après avoir appliqué les théories précédentes à la représentation d'un entier (rationnel) comme somme de deux carrés, l'Auteur définit les entiers primaires du corps et fonde pour le corps $k(\sqrt{-1})$ la théorie des résidus quadratiques. Cette théorie fournit un exemple particulièrement remarquable du rôle de l'induction dans les recherches d'arithmétique ; et, afin de mieux faire apprécier par le lecteur le *charme particulier* de cette méthode, M. Reid reproduit l'analyse qui a permis à Gauss de déterminer les modules premiers primaires impairs dont un entier premier primaire est résidu ou non-résidu quadratique. Puis, il fait l'historique des recherches de Gauss sur les résidus biquadratiques et donne un aperçu de cette dernière théorie.

Les propriétés du corps rationnel s'étendent si naturellement au corps $k(\sqrt{-1})$ que le lecteur pourrait être amené à penser qu'elles sont vraies pour un corps quadratique quelconque. Afin de montrer qu'il n'en est rien, M. Reid étudie dans les Chapitres VI, VII et VIII les corps $k(\sqrt{-3})$, $k(\sqrt{2})$ et $k(\sqrt{-5})$ en s'attachant à faire ressortir les différences entre ces corps et le corps $k(\sqrt{-1})$. Dans le corps $k(\sqrt{-3})$ c'est la forme des entiers qui diffère ; le corps $k(\sqrt{2})$ possède une infinité d'unités. M. Reid montre qu'elles sont de la forme $(1+\sqrt{2})^n$; puis il résout l'équation $x^2-2y^2=\pm m$ en recherchant les entiers du corps $k(\sqrt{2})$ dont la norme est égale à $\pm m$.

Malgré leurs différences caractéristiques les corps $k(\sqrt{-1})$, $k(\sqrt{-3})$ et $k(\sqrt{2})$ possèdent en commun une propriété fondamentale du corps rationnel : l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers. Un corps algébrique quelconque ne jouit pas de cette propriété, comme le montre l'exemple classique du corps $k(\sqrt{-5})$ que M. Reid étudie dans le Chapitre VIII. Après avoir établi que les théorèmes A, B et C sont maintenant en défaut, il montre qu'il existe des entiers du corps $k(\sqrt{-5})$ pouvant effectivement être décomposés de deux manières différentes en produits de facteurs premiers. Il est donc impossible

d'édifier dans le corps $k(\sqrt{-5})$ une théorie de la divisibilité analogue à celle du corps rationnel. Il en serait de même, d'ailleurs, si l'on cherchait, par exemple, à raisonner sur le domaine des entiers positifs congrus à 1 (mod. 5) : on aurait ainsi

$$336 = 6 \times 56 = 16 \times 21$$

et les nombres 6, 16, 21, 56 sont *premiers* dans le domaine précédent. Or, désignons par le symbole (a, b) un entier qui ne fait pas partie de ce domaine, mais qui, dans le corps rationnel, représente le plus grand commun diviseur des nombres a et b du domaine ; nous aurons

$$\begin{aligned} 336 = 6 \times 56 &= (6, 16)(6, 21)(56, 16)(56, 21) \\ = 16 \times 21 &= (16, 6)(16, 56)(21, 6)(21, 56) \end{aligned}$$

et l'unicité de la décomposition se trouve rétablie après l'élargissement du domaine. C'est de l'application du même procédé au corps $k(\sqrt{-5})$ que résulte l'introduction des nombres idéaux.

Après avoir défini les idéaux et leur égalité, les idéaux principaux, la multiplication et la divisibilité des idéaux, l'idéal unité et les idéaux premiers, M. Reid montre qu'effectivement un idéal principal peut être décomposé (et d'une seule façon) en produits d'idéaux premiers.

Avant d'étendre aux corps quadratiques quelconques les résultats précédents, l'Auteur donne, dans le Chapitre IX, des théorèmes généraux concernant les nombres algébriques quelconques et leur représentation ; puis, dans le Chapitre X, il étudie spécialement les corps quadratiques $k(\sqrt{m})$. Il donne la forme des nombres du corps, définit les nombres primitifs et imprimitifs, le discriminant d'un nombre, la base et le discriminant du corps et détermine les différentes formes de la base du corps suivant que $m \equiv 1$ ou $m \not\equiv 1$ (mod. 4). Il devient alors possible d'étudier les idéaux d'un corps quadratique quelconque.

Le Chapitre XI montre d'abord l'existence d'une base pour un idéal et définit la base canonique de l'idéal ; puis il introduit la notion d'idéal principal et d'idéaux conjugués, de l'égalité, de la multiplication et de la divisibilité des idéaux. Il est très facile de démontrer dans le cas des corps quadratiques qu'à tout idéal I d'un tel corps on peut associer un idéal I′ tel que le produit II′

soit un idéal principal ; par suite, si tous les nombres d'un idéal I appartiennent à l'idéal J, I est divisible par J. On définit alors le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de deux idéaux, et l'on peut établir l'unicité de la décomposition d'un idéal en facteurs premiers, qui constitue la *raison d'être* des idéaux. Ce chapitre se termine par une double démonstration du théorème suivant :

Si I et J sont deux idéaux quelconques, il existe un nombre α tel que (α) I soit un idéal premier à J.

Dans le Chapitre XII, M. Reid expose la théorie des congruences par rapport à un idéal ; après avoir étendu les théorèmes élémentaires de la théorie des nombres rationnels, il classe les nombres d'un corps par rapport à un idéal, définit la norme d'un idéal et en fait connaître les propriétés fondamentales. Viennent ensuite, la détermination des idéaux premiers, leur classification en idéaux premiers du premier ou du second degré, la décomposition d'un idéal en ses facteurs premiers, puis la détermination de la norme et de la base d'un idéal. Après avoir déterminé le nombre α associé aux idéaux I et J dans l'énoncé d'un théorème précédent, il aborde la théorie de la fonction numérique $\varphi(I)$ et étend aux congruences, par rapport à un idéal, les théorèmes démontrés dans le Chapitre III pour les congruences entre entiers rationnels.

La théorie des idéaux des corps quadratiques trouve une application remarquable dans la détermination des unités de ces corps qui est exposée dans le Chapitre XIII. Après avoir montré que tous les corps quadratiques imaginaires autres que $k(\sqrt{-1})$ et $k(\sqrt{-3})$ ne possèdent pas d'autres unités que ± 1, l'Auteur aborde les corps réels et démontre d'abord le célèbre théorème de Minkowski ; puis il établit que, dans tout corps quadratique réel, il existe une infinité d'entiers tels que les valeurs absolues de leurs normes soient inférieures ou égales à $|\sqrt{d}|$ (d, discriminant du corps). Mais, dans tout corps imaginaire il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux dont les normes sont inférieures à $|\sqrt{d}|$; il doit donc exister dans tout corps quadratique réel une infinité d'unités. On démontre facilement que ces unités sont les puissances successives d'une unité fondamentale qu'on apprend

à déterminer. Cette détermination équivaut à la solution d'une équation de Pell au sujet de laquelle M. Reid énonce un théorème général.

Dans le Chapitre XIV, qui termine l'Ouvrage, M. Reid étudie les classes d'idéaux d'un corps quadratique. Il commence par définir l'égalité des idéaux et les classes d'idéaux ; puis il établit que le nombre de classes d'idéaux d'un corps quadratique quelconque est fini ; soit h ce nombre. Il montre comment on peut simplifier la recherche de h : en particulier, lorsque le discriminant d'un corps $k(\sqrt{m})$ est divisible par un seul nombre premier, h est impair.

L'Ouvrage de M. Reid est d'une lecture aisée ; de nombreux exemples habilement choisis viennent à chaque instant illustrer la théorie ; ils familiariseront rapidement le lecteur avec les opérations sur les idéaux. Et, puisque l'Auteur s'est proposé de faciliter l'étude des Mémoires et de susciter des recherches originales, tout permet d'espérer, selon le mot de M. Hilbert, qu'il « a pleinement atteint son but ».

RENÉ GARNIER.

VAHLEN (T.). — KONSTRUKTIONEN UND APPROXIMATIONEN IN SYSTEMATISCHER DARSTELLUNG EINE ERGÄNZUNG DER NIEDEREN EINE VORSTUFE ZUR HÖHEREN GEOMETRIE. 1 vol. gr. in-8, XII-349 pages. Leipzig und Berlin, B. 4, Teubner, 1911.

Au début de sa Préface, M. Vahlen fait remarquer que, entre l'enseignement mathématique dans les Écoles supérieures et cet enseignement dans les Universités, il existe une lacune, que « l'École ne conduit pas jusqu'au seuil des Mathématiques supérieures et que l'Université ne s'intronise pas là où l'École s'est arrêtée ». C'est pour donner à l'étudiant le moyen de combler lui-même cette lacune que divers Ouvrages ont été publiés depuis quelques années ; parmi eux, M. Vahlen cite celui de Klein intitulé : *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* (Leipzig, 1895), et celui de Enriques intitulé : *Quistioni riguardanti la Geometria elementare* (Bologna, 1900). M. Vahlen lui aussi a voulu venir en aide aux étudiants, en publiant un

Complément à la Géométrie élémentaire et une *Introduction à la Géométrie supérieure.*

Pour ordonner élémentairement son Livre, il a fallu que l'Auteur imaginât des méthodes élémentaires et de nouveaux modes de démonstration. Il a exposé d'une manière nouvelle la transcendance de e et de π. Il a fait sans intégration, même déguisée, la quadrature des secteurs hyperboliques. Il a donné la rectification de courbes quelconques en s'appuyant simplement sur certaines formules de Lambert.

M. Vahlen constate que les méthodes élémentaires, si habilement maniées par les mathématiciens d'autrefois, ne nous sont plus familières et qu'on a laissé de côté des démonstrations anciennes de diverses questions pour appliquer à ces questions de nouvelles méthodes de solution. Lui, au contraire, cherche à perfectionner ces démonstrations, à les rendre plus claires en utilisant pleinement le côté pratique bien suffisant des méthodes antiques.

L'Auteur s'est attaché à donner la théorie des constructions d'une manière systématique et complète. Pour la théorie des approximations, il s'est laissé guider par cette opinion de Klein : qu'il est nécessaire de traiter cette théorie plus amplement qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

Dans les Éléments de Géométrie d'Euclide, conservés presque intacts depuis 2000 ans, il n'y avait pas de place pour certaines méthodes qu'on trouve dans les écrits des Égyptiens, des Grecs et des Indiens, dans ceux de Dürer, de Vieta, d'Huygens, etc. C'est ce qui explique pourquoi ces méthodes furent très peu prises en considération. L'Auteur s'est attaché à les faire revivre. Il expose une approximation des fonctions géométriques qui a été donnée par Bhaskara et une approximation de la racine cubique due à Héron et non interprétée jusqu'ici.

Dans la théorie des erreurs des constructions géométriques, M. Vahlen fait connaître la méthode de Gauss et insiste sur celle de Poncelet-Tchebycheff.

L'analyse élémentaire n'est présentée dans ce Livre que d'une manière générale, l'Auteur ayant cru devoir se laisser guider par ces paroles de notre grand géomètre Hermite (*Œuvres*, t. I, p. XXXVII) : « L'admiration, a-t-on dit, est le principe du

savoir, ...; je m'autoriserai de cette pensée pour exprimer le désir qu'on fasse la part plus large, pour les étudiants, aux choses simples et belles, qu'à l'extrême rigueur aujourd'hui si en honneur, mais bien peu attrayante, souvent même fatiguante et sans grand profit pour le commençant qui n'en peut comprendre l'intérêt. »

On saura gré à M. Vahlen d'avoir apporté le plus grand soin à la partie historique et à la partie bibliographique de son travail.

Pour compléter cet aperçu général de l'important Ouvrage de M. Vahlen, il convient de donner un *extrait* de la Table des Matières.

I. *Constructions linéaires.* — Rapports doubles. Invariants cubiques et quadratiques. Discriminants. Involution. Propositions de Ménélaus, Ceva, Pascal, Brianchon. Polaires. Courbes de troisième ordre. Principe de Desargues.

II. *Constructions quadratiques.* — Extraction de racines carrées. Problèmes de Castillon, de Steiner. Principes de Poncelet, de Steiner, de Mascheroni. Problèmes de Malfatti, d'Apollonius.

III. *Constructions cubiques.* — Rapports de Steiner. Pentagone. Heptagone. Nonéagone. Conchoïdes. Limaçon de Pascal. Trisection de l'angle par ellipses. Extraction de la racine cubique par hyperboles. Problème des normales d'Apollonius. Emploi des courbes cubiques.

IV. *Constructions algébriques supérieures et constructions transcendantes.* — Extraction de racines et partages d'angles par des courbes algébriques. Éléments imaginaires. Détermination des erreurs : méthodes de Gauss, Poncelet-Tchebycheff. Division du cercle et des lemniscates : principe de Gauss, Eisenstein ; polygone régulier de dix-sept côtés; théorèmes de Richmond, de Poncelet. Constructions sur la sphère.

V. *Approximations géométriques et cyclométriques.* — Valeurs égyptiennes, babyloniennes et indiennes de π. Calcul de π par Archimède, de Ptolémée à Vieta et Gregory, par Nicolas de Cusa, W. Snellius, Ph. de Landsberg, Orontius Pinaeus, Jacques Gregory, Huygens, Newton, Lambert. Quadratures et rectifications mécaniques par les formules de Tchebycheff, Simpson, Cotes, Gauss. Sur le meilleur choix des points intermédiaires.

VI. *Approximations analytiques.* — Formules de Taylor et de Lagrange. Racines de nombres complexes : équation de Moivre, formule de Cardan, limite des racines par Laguerre. Formule du binome. Série exponentielle. Fonctions hyperboliques. Série logarithmique. Somme des puissances des racines. Séries trigonométriques. Série hypergéométrique. Fractions continues. Cyclotechnie. Logarithmotechnie.

VII. *Approximations dans les constructions.* — Cas de $\sqrt[3]{2}$, de $\sqrt{a}$ et de $\sqrt[3]{a}$. Interpolation brisée de Héron et de Gauss. Constructions convergentes pour la division d'angles et l'extraction de racines : travaux de

Laguerre. Division approximative du cercle par Héron, Dürer, Bhaskara, Rinaldini, Vieta. Constructions approchées de π. Rectifications et quadratures convergentes.

VIII. *Irrationalité et transcendance de e et de* π. — Irrationalité de π et de π^2; travaux de Lambert, Gauss, Legendre, Hermite. Irrationalité de e et de e^2 : travaux de Fourier, Liouville, Hurwitz. Existence de nombres transcendants : travaux de Liouville, Cantor. Démonstration de la transcendance.

Em. et Er. L.

KEINDORFF (Augnot). — Die Zustandsgleichung der Dampfe, Flussigkeiten und Gase. Leipzig, Teubner ; 1906. Ableitung der Spannkrafts-gleichung gesattigter Dampfe : das Flussigkeitsvolum und das specifische Dampfvolum. Magdeburg, Rathke, 1912.

M. A. Keindorff, de Magdeburg, a réuni, dans ces deux brochures de 60 et 50 pages, les résultats de longs calculs numériques relatifs à l'état fluide. Tous les corps pour lesquels les données expérimentales sont connues avec une précision suffisante dans une vaste étendue de température et de pression ont été utilisées. Les formules numériques représentent toujours *rigoureusement* les valeurs observées (c'est-à-dire à 10^{-4} ou 10^{-5} près); mais c'est en employant des formules différentes soit comme forme, soit comme valeur des constantes d, c, a, f, k dans les différentes régions du plan P, V.

Tension de vapeur saturante.....	$\log(p+d) = c - \dfrac{f}{(a+t)^k}$
Vapeur non saturante.....	$\log(d-p_x) = c - \dfrac{f}{(a-p)^k}$
Liquide.....	$\log\left(d - \dfrac{c_1}{c}\right) = c - f(p-a)^k$
Gaz, états (I), (II).....	$\log(p_x+d) = c - f\dfrac{c^k - p^k}{(a+p)}$
Gaz, état (III).....	$\log(p_x-d) = c - \dfrac{f}{(p-a)^k}$

L'état gazeux se rapporte aux températures supérieures à la température critique; les trois subdivisions sont dues aux changements de sens de la concavité de l'isotherme, en passant des pressions faibles (I) aux pressions voisines de la pression critique (II) et aux pressions très petites (III).

La seconde brochure débute par des comparaisons numériques relatives à quelques autres vapeurs, toujours aussi bonnes. La formule pour la dilatation des liquides

$$\log\left(\frac{t+a}{t_{\text{crit}}+a}\,\frac{v_{\text{crit}}}{v}\right) = f(p_{\text{crit}} - p)^k,$$

où entre cette fois en évidence la température, donne aussi de très bonnes valeurs.

En somme, c'est dans l'étendue des comparaisons numériques et l'excellence de l'accord entre formules et observations, que réside l'intérêt de ce travail.

M. Brillouin.

MÉLANGES.

QUELQUES REMARQUES SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES EN DYNAMIQUE;

Par M. Paul APPELL.

Dans un Article sur le principe de la moindre action, paru dans ce *Bulletin* (2e série, t. XXXVI, première Partie, avril 1912, p. 119-136), M. Darboux a donné une démonstration intuitive, des plus élégantes, de ce fait que toutes les trajectoires paraboliques obtenues en lançant un point pesant, d'une même position initiale, avec la même vitesse, ont la même directrice.

Je me propose de développer, dans le même ordre d'idées, quelques remarques, en me limitant au mouvement plan d'un point matériel, sous l'action d'une force dérivant d'une fonction de forces $U(x, y)$ uniforme par rapport aux coordonnées cartésiennes x et y considérées comme réelles ou comme complexes.

I. Considérons toutes les trajectoires (T) obtenues en lançant le point matériel, d'une même position, avec une même vitesse

donnée en grandeur, mais non en direction. L'équation des forces vives est

$$m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=2\,U(x,y)-h,$$

où h désigne une constante déterminée.

Il est évident que les trajectoires (T) sont toutes dans la région du plan où

$$2\,U(x,y)+h\geqq 0.$$

Mais prenons les points de rencontre, réels ou imaginaires, des trajectoires (T) avec la courbe (D)

$$(D)\qquad 2\,U(x,y)+h=0.$$

En ces points, on aura

$$(1)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=0.$$

Si le point d'intersection considéré est une position *réelle* du mobile, les composantes $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ de la vitesse sont réelles; on aura alors

$$\frac{dx}{dt}=0,\qquad \frac{dy}{dt}=0,$$

et le mobile tendra vers ce point avec une vitesse tendant vers zéro.

Si le point d'intersection considéré est *imaginaire*, les deux quantités $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ peuvent encore être nulles en ce point, mais, quand ces deux quantités ne sont pas nulles à la fois, on a, d'après (1),

$$\frac{dy}{dx}=\pm i.$$

La courbe (D) aura donc, par rapport aux trajectoires, une propriété analogue à celle de la directrice par rapport aux coniques.

II. Prenons en particulier le cas où la fonction des forces dépend uniquement de l'une des coordonnées, de y par exemple :

$$U=f(y).$$

La projection $\frac{dx}{dt}$ de la vitesse sur l'axe Ox est alors égale à une constante k, que nous supposons différente de zéro, en excluant la trajectoire formée d'une parallèle à Oy. Il est alors impossible que $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ s'annulent simultanément, et, en tous les points de rencontre d'une trajectoire (T) avec la ligne

$$(\mathrm{D}) \qquad 2f(y) + h = 0,$$

les tangentes à la trajectoire ont pour coefficients angulaires $\pm i$. Cette ligne (D), qui se compose ici de droites, réelles ou imaginaires, parallèles à Ox, est donc formée de directrices, dans le sens de Plücker.

En particulier, si

$$f(y) = \frac{m\mu}{y^2},$$

cas d'un point attiré ou repoussé par Ox en raison inverse du cube de la distance, on a

$$v^2 = \frac{2\mu}{y^2} + h;$$

les trajectoires sont des coniques ayant pour directrices les droites, réelles ou imaginaires,

$$y^2 = -\frac{2\mu}{h}.$$

De même, si

$$f(y) = m\mu y^2 \qquad (\mu < 0)$$

(attraction par Ox proportionnelle à la distance), le mobile partant de l'origine, on a

$$v^2 = 2\mu y^2 + v_0^2;$$

les trajectoires sont des sinusoïdes ayant pour directrices les droites

$$y^2 = -\frac{v_0^2}{2\mu}.$$

III. Considérons enfin le cas d'une force centrale

$$U = \varphi(r), \qquad r = +\sqrt{x^2 + y^2},$$

où r est pris positivement quand x et y sont réels.

Pour que U soit uniforme par rapport aux coordonnées x et y supposées réelles ou complexes, il faut que U soit une fonction uniforme et paire de r. La courbe (D),

$$(D) \qquad 2U(x, y) - h = 0,$$

se compose alors de cercles concentriques. Comme l'intégrale des aires

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C \qquad (C \neq 0)$$

montre que $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ ne peuvent pas s'annuler simultanément en un point à distance finie, les cercles (D) sont tels qu'en tous leurs points de rencontre avec les trajectoires, les tangentes aux trajectoires ont pour coefficients angulaires $\pm i$. Ces cercles sont donc des directrices au sens de Plücker.

Par exemple, si

$$\varphi(r) = m\mu r^2 \qquad (\mu < 0)$$

(attraction proportionnelle à la distance), on a

$$v^2 = 2\mu r^2 + h, \qquad (h > 0);$$

les trajectoires sont des ellipses de centre O, et le cercle

$$2\mu r^2 + h = 0$$

coupe chacune de ces ellipses aux points où les tangentes sont isotropes ; c'est le cercle orthoptique : on a donc

$$-\frac{h}{2\mu} = a^2 + b^2,$$

a et b étant les demi-axes de l'ellipse.

Si la fonction des forces $U = \varphi(r)$ est une fonction uniforme de r, non paire, cette fonction n'est pas uniforme en x et y quand x et y sont complexes, car r peut prendre deux valeurs $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Dans ce cas, un résultat analogue a lieu ; mais, dans l'équation

$$2\varphi(r) + h = 0,$$

il faut distinguer les points de la courbe qui correspondent à des valeurs positives de r de ceux qui correspondent à des valeurs négatives de r. Par exemple, dans le cas classique d'une attraction

en raison inverse du carré de la distance

$$\varphi(r) = \frac{m\mu}{r} \qquad (\mu < 0),$$

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h,$$

la trajectoire est une conique de foyer O : supposons que ce soit une ellipse ($h < 0$). Alors les points de la trajectoire pour lesquels

$$\frac{2\mu}{r} + h = 0, \qquad r = -\frac{2\mu}{h},$$

sont des points où les coefficients angulaires des tangentes à la conique sont $\pm i$. Ces points étant imaginaires conjugués sont sur une directrice réelle de la conique : cette directrice n'est pas celle qui correspond au foyer O, car pour les points où la directrice relative à O coupe la conique, on a $r = 0$. Le cercle de centre O et de rayon $-2\frac{\mu}{h}$ est donc le cercle directeur relatif au foyer O, et l'on a

$$-\frac{2\mu}{h} = 2a,$$

résultat classique.

Il faut remarquer, à cet égard, que, sur les quatre points d'intersection de la conique avec le cercle

$$r^2 = \frac{4\mu^2}{h^2},$$

les deux points d'intersection situés sur la directrice qui n'est pas relative au foyer O sont tels que

$$r = -\frac{2\mu}{h};$$

pour les deux autres, r est négatif,

$$r = \frac{2\mu}{h}.$$

En effet, en rapportant maintenant l'ellipse à ses axes et en supposant que le centre attractif soit le foyer $x = c$, $y = 0$, on a

$$r = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right).$$

Pour les points situés sur la directrice relative à l'autre foyer $x = -\frac{a^2}{c}$, on a

$$r = 2a;$$

pour les points d'abscisse $x = \frac{3a^2}{c}$, on a

$$r = -2a.$$

Le cercle directeur

$$r^2 = 4a^2$$

coupe la conique en ces quatre points.

Faisons une dernière remarque sommaire pour le cas des forces centrales. Cherchons à déterminer les points x, y de la trajectoire *situés à distance finie*, non au centre des forces O, tels que la tangente en un de ces points passe par O. En appelant x', y', r', les dérivées par rapport à t, on a

$$xy' - yx' = C,$$
$$xx' + yy' = rr';$$

en résolvant par rapport à x' et à y', on a les formules

$$y'r^2 = Cx + rr'y,$$
$$x'r^2 = Cy + rr'x,$$

qui donnent les composantes de la vitesse en fonction des coordonnées, car rr' est une fonction connue de r, que nous indiquons plus loin. Pour que la tangente au point x, y passe par O, il faut et il suffit que $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$, c'est-à-dire

$$\frac{Cx + rr'y}{-Cy + rr'x} = \frac{y}{x},$$

d'où

$$rr' = \infty$$

ou

$$y = \pm ix.$$

L'équation des forces vives

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\varphi(r) + h$$

donne, en remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par $\frac{C}{r^2}$,

$$rr' = \sqrt{2r^2\varphi(r) + hr^2 - C^2}.$$

Les points de contact cherchés seront donc des points à distance finie où $2r^2\varphi(r)$ devient infini, ou des points à distance finie tels que les coefficients angulaires des tangentes soient $\pm i$. Ainsi, pour $\varphi(r) = \frac{m\mu}{r}$, $2r^2\varphi(r)$ ne devient pas infini à distance finie; donc, si de O on peut mener des tangentes dont les points de contact sont à distance finie, ces tangentes sont isotropes et O est un foyer: c'est ce qui a lieu effectivement. Pour $\varphi(r) = m\mu r^2$, les points de contact des tangentes menées de O ne sont pas à distance finie; la remarque ne s'applique pas.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Abhandlungen der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1911. Physikalisch-mathematische Classe. In-8, XXXIV-16-14-54-67-46-23-15 et 49 p. avec 21 planches. Berlin, G. Reimer. Cart., 26 m.

Brockmöller (W.). — *Die geographische Verbreitung der monatlichen Barometerschwankungen.* (*Archiv der deutschen Seewarte*, 34. Jahrg. 1911.) 30,5-24,5, 43 p. avec 3 fig. et 5 planches. Hamburg, L. Friederichsen et Co. 4 m. 50.

Köppen (W.) et Wendt (Joh.). — *Die vertikale Temperaturverteilung zwischen dem Erdboden u. 3000 m üb. Hamburg.* (*Archiv der deutschen Seewarte*, 34. Jahrg. 1911.) 30,5-24,5, 52 p. avec 16 fig. Hamburg, L. Friederichsen et Co. 4 m.

Berichte u. Mitteilungen, veranlasst duch die internationale mathematische Unterrichtskommission. VII. Gr. in-8, 89-127 p. avec 5 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 1 m. 60.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. T. II, vol. V, fasc. I. Équations et opérations fonctionnelles. Interpolation

trigonométrique. Fonctions sphériques. In-8, 25-16, 160 p. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr.

FORSYTH (A.-R.). — *Lehrbuch der Differential-Gleichungen.* Mit den Auflösgn. der Aufgaben v. *Herm. Maser* 2. autoris. Aufl. Nach der 3. des engl. Originals besorgt u. m. e. Anh. v. Zusätzen versehen v. *Walth. Jacobsthal.* Gr. in-8, XXII-921 p. Braunschweig, F. Vieweg et Sohn. 20 m., relié, 21 m. 50.

Jahrbuch der über die Fortschritte der Mathematik, begründet v. *Carl Orthmann.* Hrsg. v. *Emil Lampe.* 40. Bd. Jahrg. 1909. 3. Schluss-Heft. Gr. in-8, LXXVIII et 736-1110 p. Berlin, G. Reimer. 17 m. 60.

ROUCHÉ (Eug.) et COMBEROUSSE (Ch. DE). — *Traité de Géométrie*, 2e Partie. Géométrie dans l'espace, courbes et surfaces nouvelles, 8e édit. rev. In-8, XVIII-664 p. avec 377 fig. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr. 50.

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Stiftung-Heinrich Lanz. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Jahrg. 1911. Bd. II : A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften. Gr. in-8. Heidelberg, Carl Winter. 22 m. 20.

Fortschritte (*Die*) *der Physik im J.* 1911. Dargestellt v. der deutschen physikal. Gesellschaft. 67. Jahrg. 1. Abtlg. Allgemeine Physik, Akustik, physikalische Chemie, red. v. *Karl Scheel.* Gr. in-8, XXXIV-544 p. Braunschweig, F. Vieweg et Sohn. 28 m.

WEBSTER (Arth.-Gordon). — *The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies, being lectures on mathematical physics.* (*B.-G. Teubner's, Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* 11. Bd.) Neue Folge. 2e éd. Gr. in-8, XII-588 p. avec fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 14 m.

GÉRARD (Eric). — *Mesures électriques, étalons et instruments, essais mécaniques, photométriques, magnétiques et électriques, applications aux lignes, générateurs, moteurs et transformateurs. Leçons de l'Institut électrotechnique Montefiore.* 4e édit., rev. In-8, VIII-750 p. avec 324 fig. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

JANET (P.). — *Leçons d'Électrotechnique générale professées à l'École supérieure d'Électricité.* T. III. Moteurs à courants alternatifs couplage et compoundage des alternateurs, transformateurs polymorphiques. 3e édit., rev. et augm. In-8, IV-316 p. avec 129 fig. Paris, Gauthier-Villars. 11 fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

STAHL (Hermann). — Abriss einer Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in neuer Fassung. 1 vol. in-8, iv-103 pages. Leipzig, B. G. Teubner, 1911.

Ce *plan* d'une théorie des fonctions algébriques est une œuvre posthume de Hermann Stahl, qui, dit M. Noether dans une courte Préface, y a travaillé jusqu'à ses derniers instants. Il a été rédigé, d'après les Notes de l'Auteur, partie par M. Noether, dont les travaux personnels sur ce sujet sont célèbres, partie par M. Loffler, qui en a revu les épreuves définitives.

L'étude des fonctions algébriques peut être classée dans presque chaque division des Mathématiques proprement dites. D'une part, c'est une remarquable application de la théorie générale des fonctions analytiques, et l'inversion des intégrales algébriques conduit à la définition des fonctions abéliennes. D'autre part, cette étude peut être faite à un point de vue presque exclusivement algébrique et même arithmétique. Est-il nécessaire d'insister sur ses relations avec la Géométrie? Longtemps même (jusqu'aux travaux de Riemann) elle était cantonnée dans ce domaine, et bien des notions fondamentales de la théorie, genre, points multiples, transformations birationnelles, viennent de là. Cette diversité de parentés et d'origines explique le nombre assez grand de *plans* possibles. Dans une Introduction, l'Auteur en fait un recensement, en les caractérisant autant que possible, peut-être un peu arbitrairement. Je cite d'après lui :

La méthode *transcendante* de Riemann : définition *a priori* de la surface de ramification et existence sur cette surface d'une fonction analytique ayant des pôles donnés. L'expression de cette fonction est obtenue au moyen d'intégrales de première, deuxième et troisième espèce;

La méthode *algébrique et analytique* de Weierstrass, dont le principe essentiel est que chaque fonction algébrique peut être mise sous forme d'un produit de *fonctions transcendantes pre-*

mières $H(x, y)$. Ces fonctions H n'admettent respectivement qu'un pôle et qu'un zéro simple. Dans le cas des fonctions rationnelles $H = \frac{x - x_1}{x - x_1}$, et la propriété est manifeste;

La méthode *algébrique et géométrique* de Brill et Noether, qui repose sur la notion, bien connue en analytique, de *courbes adjointes* à la courbe fondamentale et sur la représentation d'une fonction quelconque par un quotient de deux fonctions adjointes;

La méthode *arithmétique* de Kronecker, reprise par Dedekind et Weber, puis par Hensel et Landsberg. (Un exposé en a été donné dans l'Édition française de l'Encyclopédie, par MM. Hadamard et Kürschák, d'après l'Article allemand de M. Lansdberg.) Dans cette théorie, qui se développe, en quelque sorte, parallèlement à la théorie des corps algébriques, chaque fonction est représentée par une forme linéaire de n fonctions (formant une *base*), les coefficients étant des fonctions rationnelles de x. Le discriminant et ses diviseurs jouent un rôle essentiel;

Enfin, la théorie *algébrique* de Christoffel. C'est celle qui a été plutôt suivie par l'Auteur, et il s'est notamment proposé de montrer comment, par cette méthode, on peut retrouver toutes les précédentes.

Le Chapitre I est consacré au rappel de définitions et de propriétés simples : équation fondamentale, singularités, points multiples et points de ramification. M. Stahl écarte ensuite systématiquement l'existence des points multiples singuliers (à tangentes confondues ou verticales). Dans sa pensée, un dernier Chapitre devait être consacré à l'étude de ces cas; comme il n'eut pas le temps de mettre ce Chapitre complètement au point, les rédacteurs ont préféré ne pas le reproduire, et renvoyer pour ce sujet à l'Ouvrage de M. Fields : *Theory of the algebraic functions* (Berlin, 1906).

On trouve ensuite la définition des fonctions ou courbes adjointes, la définition d'une fonction algébrique et quelques-unes de ses formes immédiates, enfin les deux théorèmes sur la somme des résidus des pôles et l'égalité du nombre de pôles et de zéros. Pour justifier en partie le qualificatif *algébrique* attribué à sa méthode, l'Auteur, en prenant pour base des propriétés simples des développements des fractions rationnelles, démontre directement ces

deux théorèmes qui sont, par ailleurs, des applications immédiates de l'intégrale de Cauchy.

Dans le Chapitre II se trouve d'abord posé ce problème, fondamental d'après Stahl : *Étant donnée une relation* $F(x, y) = 0$, *soit à trouver une fonction de x et y qui a des pôles donnés d'un ordre donné.* L'Auteur en expose ensuite la solution, donnée par Christoffel, qui consiste à mettre la fonction cherchée sous forme d'une somme de fonctions

$$T(x, y, \alpha, \beta) = \frac{F(\alpha, y)}{(x-\alpha)(y-\beta)}$$

et de leurs dérivées partielles par rapport à α et β. Les coefficients numériques de cette somme doivent vérifier un certain nombre d'équations de condition, dont la discussion est la partie essentielle et délicate de la théorie. Cette discussion faite, Stahl montre comment on peut retrouver les résultats importants des diverses méthodes mentionnées : représentation des fonctions algébriques entières et des fonctions conjuguées; intégrales abéliennes; théories de Brill-Noether et de Dedekind-Weber.

Le troisième et dernier Chapitre contient la définition des fonctions premières de Weierstrass et la décomposition d'une fonction en un produit de fonctions premières.

Dans sa Préface, M. Noether fait à l'Auteur une légère critique : c'est d'avoir omis la recherche des fonctions algébriques dans le cas où les équations des points singuliers n'ont pas été résolues préalablement, recherche particulièrement étudiée par M. Noether. Peut-être pourrait-on étendre cette critique et trouver un peu exagérée l'importance attribuée au problème de la représentation des fonctions et pas assez développée l'étude *directe* de ces fonctions? Je me permettrai d'ajouter à cette critique une remarque d'un tout autre ordre : la bibliographie est presque exclusivement allemande. A part la citation d'un Mémoire bien connu de M. Appell, je n'ai pu trouver dans les Notes aucun nom français, pas même celui de Puiseux, pour ne citer que l'un des plus anciens.

A. Châtelet.

FUETER (RUDOLF). — DIE KLASSENKÖRPER DER KOMPLEXEN MULTIPLIKATION UND IHR EINFLUSS AUF DIE ENTWICKLUNG DER ZAHLENTHEORIE. 1 vol. in-8, II-47 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner; 1911.

Il semble que ce soit une coutume, maintenant adoptée en Allemagne, de célébrer les Jubilés ou les Anniversaires des savants par la publication de Mémoires se rapportant plus ou moins à leur œuvre. C'est en l'honneur du centenaire d'Edouard Kummer que, sous les Auspices de la Société mathématique allemande, M. Fueter publie ce Rapport sur la multiplication complexe.

On sait que le grand titre de gloire de Kummer est la découverte, ou plutôt la création des Idéaux dans l'étude arithmétique de certains corps algébriques. Depuis Kummer, la théorie générale des corps algébriques et des idéaux a fait des progrès considérables en Allemagne, et déjà, en l'honneur du Jubilé de Kummer, M. Kronecker publia une partie de ses beaux travaux sur la question. En 1897, M. Hilbert écrivit, dans les *Jahresbericht der Deutschen Math. Ver.*, un Rapport célèbre sur l'état de la théorie à cette époque; en plus de l'exposition des résultats acquis par d'autres chercheurs, ce Rapport contenait d'importantes additions dues à l'Auteur. Le Rapport de M. Fueter complète, pour ainsi dire, celui de M. Hilbert en exposant quelques-uns des progrès de la théorie pendant ces 15 dernières années.

L'Auteur a groupé les résultats énoncés autour d'un problème fondamental posé déjà par M. Hilbert dans les *Göttinger Nachrichten* (1900) : *Étant donné un corps algébrique k, soit à trouver toutes les fonctions de z, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_\gamma(z)$, qui deviennent des racines d'équations abéliennes dans le corps k, lorsque z prend des valeurs convenablement choisies contenues dans k ou dans un sous-corps de k.* Ce problème sera précisé et complété si l'on s'impose de trouver, au moyen des fonctions φ, les racines de *toutes* les équations abéliennes dans k (FUETER, Chap. IV). La solution de cette question est connue pour le corps des nombres rationnels et elle est alors donnée par la fonction $e^{2\pi i z}$, z étant rationnel, et pour les corps quadratiques imaginaires. Il faut, pour ce second cas, utiliser la fonction précédente et en plus $j(z)$, j étant l'invariant absolu des fonctions elliptiques et z un nombre

du corps à terme imaginaire positif. (On conçoit alors les relations avec la multiplication complexe.)

Mais si l'on ne peut donner actuellement la solution générale du problème, on peut énoncer à son sujet des résultats intéressants. L'un des plus curieux est l'isomorphisme du groupe (de Galois) d'un corps abélien relatif par rapport à k et du groupe abélien formé par les classes d'idéaux d'un certain *rayon* de nombres (Fueter, Chap. II). Cette notion de rayon (ensemble invariant pour la multiplication et la division) ainsi que ce résultat précédent sont dus à M. Fueter. MM. Hilbert et Furtwangler donnent un complément essentiel à ce théorème en démontrant l'existence d'un corps abélien relatif, pour lequel le rayon précédent est confondu avec le corps lui-même, *Corps des Classes* (Fueter, Chap. VI).

Ce ne sont pas là les seules propriétés indiquées dans ce petit Livre; on y trouve encore les recherches récentes de MM. Hilbert, Fueter et Furtwangler sur la loi de réciprocité et des applications des deux solutions connues du problème fondamental au calcul du nombre des classes. Mais il est difficile de résumer un exposé déjà résumé et je préfère dire, ainsi que l'Auteur dans son Introduction : « Pour le contenu des autres Chapitres, il est indiqué par leurs titres et par leur début ».

Ainsi que pour le Rapport de M. Hilbert, la rédaction est assez condensée, les démonstrations sont omises ou seulement esquissées, avec des renvois à une abondante bibliographie. Par contre, on trouve de nombreux exemples destinés à illustrer les définitions et les théorèmes. L'Auteur distingue même les *exemples* et les *exemples numériques*, les premiers étant plutôt des cas particuliers.

A. Châtelet.

AUTONNE (Léon). — Sur les groupes commutatifs et pseudo-nuls de quantités hypercomplexes. (*Annales de l'Université de Lyon*, nouvelle série, fascicule 31), 1 vol. gr. in-8, IV-92 pages, Lyon, A. Rey ; Paris, Gauthier-Villars, 1912.

1. L'Auteur considère un groupe (ε) de quantités hypercomplexes d'ordre m, c'est-à-dire possédant m unités ε_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$,

dont la multiplication est définie par la formule

$$\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{m} (\varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}),$$

les m^3 quantités $a_{\alpha\beta\gamma}$ étant des quantités complexes ordinaires. En posant

$$F(u, y, z) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (a_{\alpha\beta\gamma} u_\alpha y_\beta z_\gamma),$$

la matrice du groupe est

$$S_y = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_\alpha \partial z_\gamma}\right),$$

et la matrice parastrophe

$$R_u = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_\beta \partial z_\gamma}\right).$$

On suppose le groupe (ε) *à multiplication commutative;* alors la matrice $R_u S_x$ est symétrique et les matrices S_x, S_y sont échangeables pour x et y quelconques. Si $f_\alpha = \sum_{\beta, \gamma} (a_{\alpha\beta\gamma} x_\beta x_\gamma)$, la connaissance des quadratiques f_α assure celle de la matrice

$$S_x = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_\alpha(x)}{\partial x_\beta}\right].$$

2. Un nombre hypercomplexe est *pseudo nul* si, sans être nul lui-même, il est tel qu'une de ses puissances soit nulle. Le groupe (ε) sera dit *pseudo nul* s'il ne contient que des nombres pseudo nuls. *La construction de tous les groupes commutatifs se ramène à celle des groupes commutatifs pseudo nuls* (Cartan, *Sur les nombres complexes : Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. I, vol. I, fasc. 3). Telle est la raison qui a amené M. Autonne à étudier ces derniers groupes.

3. M. Autonne cherche à classer les groupes (ε) d'abord en établissant pour la matrice S_x une forme réduite fondée sur la considération de son *rang linéaire*, forme réduite dont il étudie ensuite les propriétés. Il cherche, en particulier, les matrices réduites des groupes (ε) de rang maximum. Il applique les résultats trouvés à la construction des groupes (ε) binaires, ternaires et quaternaires ($m = 2, 3, 4$) (2, 4 et 8 groupes).

4. Ensuite, il classe les groupes (ε) d'après leurs *diviseurs successifs* (*Elementarteiler* de WEIERSTRASS) en s'appuyant sur les résultats qu'il a établis dans un autre Mémoire intitulé : *Sur les matrices linéaires échangeables à une matrice donnée* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, 14e cahier). Il applique ces considérations à la construction effective des groupes senaires ($m = 6$), dont les diviseurs successifs sont ρ^3 et ρ^3 (2 groupes).

5. Il les classe enfin d'après leur *signature*, introduisant dans la théorie des variables hypercomplexes des résultats indiqués par M. Jordan dans son Mémoire *Sur les groupes abéliens généraux contenus dans le groupe linéaire à moins de 7 variables* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1907).

Pour un choix convenable de variables, la matrice S_x prend la forme $S_x = [q_{\lambda\mu}(x)]$, $\lambda, \mu = 1, \ldots, k$, k étant le nombre des entiers dont se compose la signature, $q_{\lambda\mu}(x)$ étant un Tableau (m_λ, m_μ)-aire formé d'éléments de S_x avec $q_{\lambda\mu}(x) = 0$, pour $\lambda \leqq \mu$.

6. L'Auteur définit ensuite les groupes (ε) *normaux*. Il démontre ceci : p étant l'exposant le plus élevé des diviseurs successifs, soient p nombres $l_1, \ldots, l_p$ quelconques, mais formant une suite non croissante ; supposons S_x sous la forme $[q_{\lambda\mu}(x)]$; pour que le groupe (ε) soit normal, il faut et il suffit que la matrice S_x^σ ait le rang $m - (l_1 + \ldots + l_\sigma)$.

Tous les groupes de rang maximum $(m - 1)$ sont normaux ; il en est de même des groupes tels que m est plus petit que 5.

Comme application, il construit les groupes quinaires ($m = 5$), où les diviseurs successifs sont ρ^3, ρ, ρ (3 groupes).

7. M. Autonne termine par l'étude des groupes (ε) qu'il appelle *quasi normaux*. Pour tout groupe (ε), il existe un entier minimum ϖ tel que le produit $\varpi + 1$ nombres pris à volonté dans (ε) soit toujours zéro. Les résultats énoncés pour les groupes normaux subsistent pour les groupes quasi normaux, sauf que les nombres l sont au nombre de ϖ et non de p.

Les groupes (ε) m-aires de rang maximum $m - 1$ sont quasi normaux.

R. LE VAVASSEUR.

MEYER (W. Franz). — Ueber die Theorie benachbarter Geraden und einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff, *eine Ergänzung zu den Lehrbüchern über Differentialgeometrie.* Un volume in-8, de XVIII-152 p. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1911.

Comme l'indique son titre, l'Ouvrage de M. F. Meyer a pour but de généraliser la notion de courbure. A chaque point P d'une courbe c, faisons correspondre uniformément une droite g qui varie continuement avec P en engendrant une surface réglée (g). Appelons dv_g l'angle de contingence formé par deux droites g infiniment voisines et ds l'élément d'arc de la courbe ; par définition, le rapport

$$k_g = \frac{1}{r_g} = \frac{dv_g}{ds}$$

(pris en valeur absolue) représente la première courbure, suivant la direction g, de la courbe c au point P. En particulier, si l'on prend pour g la tangente ou la binormale de c, on retrouve dans r_g (au signe près) les valeurs respectives du rayon de courbure r, ou de torsion ρ. Partant de cette notion de courbure généralisée, l'Auteur construit un ensemble de propositions complètement analogues aux propositions classiques sur la courbure et la torsion des courbes gauches. Ainsi, soient α_g, β_g, γ_g les cosinus directeurs de g ; appelons *normale principale relative à g* la droite passant par P, de paramètres directeurs $\frac{d\alpha_g}{ds}$, $\frac{d\beta_g}{ds}$, $\frac{d\gamma_g}{ds}$. Sur cette droite, on pourra choisir un sens tel que la demi-droite h_g, dirigée suivant le sens précédent, ait pour cosinus directeurs

$$l_g = r_g \frac{d\alpha_g}{ds}, \qquad m_g = r_g \frac{d\beta_g}{ds}, \qquad n_g = r_g \frac{d\gamma_g}{ds}.$$

Ce sont les premières formules de Frenet pour la droite g. Soit T le trièdre trirectangle dont les deux premières arêtes sont g et h_g ; la troisième arête b_g est la binormale de c par rapport à g et T est le trièdre *adjoint* (*begleitendes*) à c par rapport à g ; lorsque g coïncide avec la tangente t à c, T est le trièdre *canonique*. A chacune des arêtes de T se rattache une formule qui est l'analogue de la formule classique de Frenet correspondante. Chacune de ces nouvelles formules est susceptible d'une interprétation géométrique simple, à l'aide de la représentation sphérique.

Les propriétés précédentes sont exposées dans le paragraphe 1 ; elles découlent toutes de la notion d'angle de contingence. En partant de la notion de plus courte distance, l'Auteur obtient d'autres séries de formules qu'il expose aux paragraphes 2 à 5. Après avoir établi d'une façon très simple les formules donnant la plus courte distance et la perpendiculaire commune de deux droites (p. 26-27), l'Auteur en fait l'application à deux droites infiniment voisines, calcule leur plus courte distance δ_g, la distance e_g de P au point correspondant de la ligne de striction c_g de (g) et la distance ε_g du point Q de c, infiniment voisin de P, au plan normal en P relatif à g. Suivant les ordres d'infinitude de δ_g, e_g, ε_g par rapport à ds ces formules revêtent différentes formes que l'Auteur étudie en détail; celles qu'il obtient pour e_g (p. 47-58) sont particulièrement élégantes. Toutes ces formules trouvent leur application dans le cas où le trièdre T est canonique (§ 6) ; il est remarquable qu'en général, on peut exprimer les courbures canoniques de c par des formules ne renfermant que des plus courtes distances, δ_t, δ_h, δ_b (p. 69).

M. F. Meyer insiste particulièrement sur les cas où g est perpendiculaire à la tangente t ; il appelle alors T un trièdre *associé* à la courbe ; l'importance de ce cas apparaît nettement lorsqu'on aborde la théorie des surfaces. Soit F une surface passant par c ; la normale p à F en P est une droite g perpendiculaire à t : b_p coïncide avec la tangente à F en P, de direction conjuguée à celle de t. Aussi, l'Auteur commence par étudier les simplifications qu'apporte aux formules antérieures la condition d'orthogonalité imposée à p ; l'introduction de deux angles τ et H rend ces formules particulièrement remarquables : τ est l'angle de p avec la normale principale à c, H est l'angle de t avec sa conjuguée. Suivant les ordres infinitésimaux des δ, e, g on obtient des formules différentes qui trouvent leur application à la théorie des lignes asymptotiques et des lignes de courbure de F ; les formules correspondant à ces courbes, ainsi qu'aux géodésiques et aux courbes quelconques de F sont réunies en Tableaux (p. 98-100).

L'Ouvrage de M. F. Meyer se termine par un supplément divisé en deux Parties. La première contient l'extension aux espaces R_{n+1} à $n+1$ dimensions des formules de Frenet généralisées au paragraphe 1. L'étude de la représentation hypersphé-

rique des courbes de R_n donne lieu à d'élégantes formules qui se prêtent à des applications intéressantes. Je citerai notamment cette proposition : pour qu'une courbe c de R_{n+1} appartienne à un espace R_{k+1} (à $k+1$ dimensions) exactement, il faut et il suffit que sa $(k+1)^{\text{ième}}$ courbure $\frac{1}{\rho_k}$ s'évanouisse identiquement, les k premières $\frac{1}{\rho_0}, \frac{1}{\rho_1}, \ldots, \frac{1}{\rho_{k-1}}$ n'étant pas nulles. La deuxième Partie du supplément exprime la courbure et la torsion d'une courbe c tracée sur une surface F à l'aide des formes quadratiques différentielles $K = |dx\, a\, da|$, $\Psi = \Sigma a\, d^2 x$, $\Gamma = |a\, dx\, d^2 x|$ et $P = \Sigma da\, d^2 x - \Sigma dx\, d^2 a$ (a, b, c, cosinus directeurs de la normale p) ; l'Auteur représente cette forme en fonctions des quantités $\delta_p, e_p, \varepsilon_p$ et, inversement, il donne l'expression des quantités $r, \rho, r_p, \rho_p, \tau, H, \frac{\delta_p}{ds}, e_p, \frac{\varepsilon_p}{ds^2}$ pour une courbe de F en fonction de K, Ψ et P.

Le Livre de M. F. Meyer est d'une lecture aisée ; les formules qu'il renferme sont adroitement obtenues et heureusement présentées. Les étudiants de nos Facultés pourront le consulter avec fruit comme un complément à leurs cours de Géométrie infinitésimale.

René Garnier.

OCAGNE (Maurice d'). — Instruction sur l'usage de la Règle a Calcul. Brochure in-8, 8 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Les explications très claires que contient cette Brochure se rapportent à la Règle ordinaire, de $0^m,26$ de longueur, construite sous le nom de *type Mannheim*, par la Maison Tavernier-Gravet. Mais, à de légères variantes près, ces explications permettent d'employer l'une quelconque des Règles qu'on trouve dans le commerce.

L'Auteur donne six exemples d'opérations usuelles :

$$x = pq; \quad x = \sqrt{pq}; \quad x = \frac{p}{q}; \quad x = \frac{p^2}{q}; \quad x = p \sin \omega; \quad x = p \operatorname{tang} \omega.$$

Er. L.

CIANI (EDGARDO). — LEZIONI DI GEOMETRIA PROIETTIVA ED ANALITICA. 1 vol. in-8 jésus, v-525 pages, avec 70 Planches hors texte. Pisa, Enrico Spoerri, 1912.

M. Ciani a publié ces Leçons dans l'espoir d'être utile surtout à ses élèves de l'École Navale supérieure de Gênes. C'est pourquoi ce Livre ne contient aucune trace des coordonnées homogènes, l'Auteur jugeant que l'emploi de ces coordonnées serait prématuré dans une première année de mathématiques spéciales. Mais, hâtons-nous de le dire, M. Ciani est d'avis qu'en une seconde année, après s'être bien assimilé la méthode cartésienne, l'étudiant peut, avec le plus grand fruit, aborder l'emploi des coordonnées homogènes et apprécier l'élégance de leur application dans la théorie analytique des propriétés projectives. Aussi l'Auteur se propose-t-il de publier un Ouvrage où seront exposées les coordonnées projectives homogènes et leurs plus remarquables applications à l'étude des corps algébriques.

Ces Leçons sont clairement rédigées par M. Ciani lui-même, qui a consulté les Ouvrages existant sur les sujets qu'il traite, notamment ceux de Staudt, Salmon, Reye, Cremona, d'Ovidio Enriques, Bianchi, Severi, Garbieri, Castelnuovo. Afin qu'on puisse se rendre compte de l'importance du Livre de M. Ciani, il suffit d'en faire connaître les titres des 22 Chapitres.

I. Notions fondamentales de Géométrie projective. (31 p.)
II. Éléments de Géométrie analytique sur la droite (et plus généralement sur une forme de première espèce). (27 p.)
III. La projectivité pour les formes de première espèce. (31 p.)
IV. Éléments de Géométrie analytique dans le plan. Résolution par la méthode des coordonnées, des principaux problèmes métriques et problèmes de position relatifs aux points et droites dans le plan. (29 p.)
V. Principales générations et définitions des coniques. (21 p.)
VI. Principales propriétés analytiques de l'équation quadratique complète (à coefficients réels) de deux variables. Interprétations géométriques qui se rapportent à cette équation. (19 p.)
VII. Problème de la construction d'une conique quand sont donnés p points et t tangentes de manière qu'on ait $p + t = 5$. Résolution et discussion. (19 p.)
VIII. La théorie de la polarité par rapport à une conique. (15 p.)

IX. Propriétés principales des coniques inhérentes au centre, aux diamètres et aux axes. (27 p.)

X. Foyers et directrices des coniques. (27 p.)

XI. Points communs à deux coniques. Cercle osculateur à une conique en un de ses points. (12 p.)

XII. Exemples de courbes planes algébriques de degré supérieur au second et de courbes transcendantes. (15 p.)

XIII. La projectivité pour les formes de seconde espèce. (23 p.)

XIV. La Géométrie projective pour les coniques. (18 p.)

XV. Éléments de Géométrie analytique dans l'espace. Résolution, par la méthode des coordonnées, des principaux problèmes métriques et de position inhérents aux points, aux droites et aux plans dans l'espace. (38 p.)

XVI. Premières considérations analytiques et géométriques sur les quadriques. La sphère. Quadriques cylindriques et coniques. (22 p.)

XVII. Théorie de la polarité par rapport à une quadrique. (20 p.)

XVIII. Propriétés diamétrales et équations normales des quadriques. (23 p.)

XIX. Quadriques réglées. (9 p.)

XX. Principales propriétés des quadriques réelles déduites de leurs équations normales. (37 p.)

XXI. Représentation analytique des surfaces et des lignes dans l'espace. (10 p.)

XXII. La projectivité pour les formes de troisième espèce. (29 p.)

Chacun des Chapitres se termine par des *Exercices* très bien choisis dont le nombre total s'élève à 284.

Les 70 Planches in-8 jésus ont été parfaitement gravées et les figures qu'elles contiennent sont grandes et claires.

Le Livre a été rédigé avec soin. L'ordre adopté par M. Ciani pour exposer les sujets qu'il traite lui a souvent permis de présenter des démonstrations très simples.

Er. L.

MAIRE (Albert). — L'Œuvre scientifique de Blaise Pascal. *Bibliographie critique et Analyse de tous les travaux qui s'y rapportent.* Préface par *Pierre Duhem.* 1 vol. in-8, xxxi-184 pages. Paris, A. Herman, 1911.

Dans son *Introduction*, M. Maire s'exprime ainsi : « L'œuvre scientifique de Pascal ne constitue pas un corps de doctrine, mais il s'y trouve, avec l'expression d'une science incomparable, les

germes et les idées premières qui ont conduit ses successeurs à de grandes découvertes, tant en Mathématique qu'en Physique. »

Le travail de M. Maire montre bien l'exactitude de cette citation.

Tous les Écrits de Blaise Pascal, groupés dans l'ordre chronologique, sont accompagnés, non seulement de Notes complémentaires, mais aussi de listes des travaux faits depuis le XVIIe siècle jusqu'à nos jours ; de plus, les critiques et comptes rendus des diverses éditions de ces Écrits occupent une large place.

Cette Bibliographie comprend :

Les *Travaux mathématiques* qui sont : *Essai sur les coniques. La machine arithmétique. Traité du triangle arithmétique. La cycloïde. Les Lettres sur les problèmes mathématiques;*

Les *Travaux de Physique* qui sont : *Expériences nouvelles touchant le vuide. Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs. Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air;*

Les *Travaux divers.*

A la suite des Œuvres de Blaise Pascal, le bibliographe signale les travaux connus d'Étienne Pascal.

La Biographie de Blaise Pascal, au point de vue scientifique n'est pas oubliée et des Addenda nombreux terminent le Volume.

La Préface de l'Ouvrage de M. Maire est due à un historien très érudit des sciences physiques, M. Pierre Duhem, qui a ainsi montré l'importance de cette publication et les difficultés de son exécution :

« Ceux qui désireront à l'avenir, dit-il, suivre les démarches par lesquelles le génie de Pascal est parvenu à ses inventions scientifiques, ceux qui voudront retracer les péripéties par lesquelles ces découvertes ont passé jusqu'au jour où elles furent communément reçues, ceux-là ne connaîtront plus semblable anxiété ; grâce à M. Maire, ils sauront très exactement quels Livres il leur faut lire, ils sauront où ces Livres se peuvent trouver. Un homme qui, souvent et longtemps, a dû errer sans guide, au travers des solitudes inexplorées de l'histoire des Sciences, a voulu leur rappeler quelle dette de reconnaissance ils avaient contractée envers l'auteur de cette bibliographie de Pascal. »

Ed. L.

MÉLANGES.

UNE ÉDITION COMPLÈTE DES ŒUVRES D'EULER;

PAR M. E. DOUBLET,
Astronome à l'Observatoire de Bordeaux.

Léonard Euler est né à Bâle, le 15 avril 1707; il mourut à Pétersbourg, le 7 septembre 1783.

Le second centenaire de sa naissance ne pouvait passer inaperçu. Ses compatriotes l'ont bien compris, et ils ont fêté l'anniversaire de l'illustre géomètre de la manière la plus glorieuse pour lui, la plus honorable pour eux, en décidant la publication d'une édition complète de ses œuvres déjà publiées ou restées inédites.

Ils ont ainsi satisfait le vœu de tous les mathématiciens du monde, depuis un siècle et plus.

M. le Dr L.-G. Du Pasquier, de Neuchâtel, nous apprend, dans un intéressant article publié le 29 juillet 1911 dans la *Neue Zürcher Zeitung* que, le 29 avril 1907, il se tint dans l'église Saint-Martin, à Bâle, une séance solennelle en l'honneur du second centenaire de la naissance de Léonhard Euler, séance qui, en quelque sorte, eut un caractère religieux. L'éclat de la fête était rehaussé par cette circonstance qu'à côté de toutes les grandes écoles de la Suisse, les Académies de Berlin et de Pétersbourg, qui ont eu, l'une et l'autre, Euler comme directeur de leur classe de Mathématiques, s'étaient fait représenter par des délégations personnelles. Voici la conclusion du dernier discours prononcé par M. le professeur Rudio :

« .... Et cependant, il y a un souhait qui n'a pas encore été exaucé, il nous reste à résoudre un grand problème, à acquitter une dette de reconnaissance, et la Suisse ne pourra y réussir à elle seule, quelles que soient l'ardeur et l'insistance avec laquelle, depuis bien des années, on exprime ce vœu : la publication des œuvres complètes d'Euler! Ce ne serait pas seulement un acte de piété, mais

aussi, et en cela nous sommes unanimes, un grand événement scientifique. Que la fête d'aujourd'hui, que la part prise par les deux Académies étrangères à cette fête helvétique soient la base de cette œuvre. Si donc un jour, grâce à l'union des efforts, celle-ci doit être accomplie, ce jour-là un monument sera élevé qui parlera plus haut à l'humanité que le bronze et le marbre, un monument qui portera cette inscription invisible et pourtant resplendissante au loin : « Leonhardo Eulero, Academia Petropolitana, Academia Berolinensis, Confoederatio Helvetica. »

L'Académie des Sciences de Paris a entendu l'éloquent appel adressé par M. le professeur Rudio à la science étrangère. Elle ne pouvait d'ailleurs, bien évidemment, oublier qu'elle a compté Euler au nombre de ses Associés étrangers; en conséquence, elle a souscrit pour 40 exemplaires de l'édition projetée, à condition que les œuvres d'Euler seraient toujours publiées dans leur langue originale.

Ce dernier détail n'est pas sans importance pour nous, Français, car Euler connaissait parfaitement notre langue, et il est permis d'affirmer qu'il s'en servait volontiers, puisque, indépendamment des Mémoires qu'il a soumis au jugement de l'Académie des Sciences quand il cherchait à obtenir les prix qu'elle mettait au concours, pièces pour lesquelles l'emploi du français était peut-être obligatoire, c'est du Français qu'il s'est servi pour écrire ses *Lettres à une princesse d'Allemagne* (1), Ouvrage de vulgarisation dont le succès a été immense, et dont Condorcet, Labey, Cournot, Emile Saisset se sont faits successivement les éditeurs, et qui, on peut presque l'avancer, est encore classique chez nous.

Pour donner une idée de l'importance de l'œuvre d'Euler, il suffit de dire que Condorcet estimait à près de sept cents le nombre des Mémoires dus à la plume de son héros. Il était bien au-dessous de la réalité !

« Dans sa *Lobrede auf Leonhard Euler*, Nicolas Fuss, qui avait épousé la petite-fille du grand géomètre, nous dit : « On sait qu'Euler s'est survécu à lui-même. Les écrits qu'il a laissés après lui ont suffi non seulement à fournir, peu après sa mort, 3 magni-

(1) Mme la Princesse d'Anhalt-Dessau, nièce du roi de Prusse.

fiques volumes in-4, ils ont encore enrichi non pas pendant 20 ans, mais pendant plus de 40, les *Mémoires* de l'Académie de Pétersbourg, et ils ne sont pas encore épuisés. » — « Oui, même aujourd'hui, près de 130 ans après la mort d'Euler, l'héritage scientifique du grand mathématicien, même en faisant abstraction de ses lettres non publiées, ne peut pas être considéré comme ayant été entièrement exploité. Mais, même en se plaçant à un autre point de vue que celui de l'impression, l'œuvre de sa vie ne doit pas, à beaucoup près être regardée comme terminée. La fécondité sans exemple d'Euler, et cette circonstance que ses écrits sont tout à fait dispersés et même fréquemment inabordables, que jusqu'à présent, il était impossible au travailleur isolé de jeter les yeux sur cette masse imposante, mais où l'ordre fait défaut, devait avoir pour résultat que beaucoup de ses travaux n'ont pas contribué au progrès de la Science autant qu'ils auraient dû le faire. Ce n'est donc pas une chose absolument rare que des découvertes puissent être publiées comme nouvelles, alors qu'en réalité Euler les a déjà faites, il y a plus d'un siècle. Il s'est écoulé des dizaines d'années avant que les pensées fondamentales d'Euler aient exercé toute leur action et qu'elles aient pris la place qui leur revient dans la Science ... »

« Le tableau des œuvres d'Euler qu'a dressé M. G. Eneström, de Stockholm, travail que l'on doit considérer à bon droit comme la base essentielle de toute l'édition d'Euler, comprend 865 numéros. Parmi ceux-ci, au commencement de 1783, année qui fut celle de la mort d'Euler, il y en avait déjà 530 d'imprimés. Dans chacune des années 1783, 1785 et 1794, on publia un volume in-4 formé d'œuvres d'Euler. Mais, en outre, on fit paraître à partir de 1783, dans les *Acta*, les *Nova Acta* et les *Mémoires* de l'Académie, les œuvres posthumes d'Euler, et cela dura jusqu'en 1826. A la fin de cette même année, le nombre des travaux d'Euler publiés se montait à 771, et il en restait encore 14 dans les archives de l'Académie; comme celle-ci résolut, en 1826, de commencer, à partir du centenaire de sa fondation, une nouvelle série de ses *Mémoires*, il fut en même temps convenu que tous les manuscrits qui se trouvaient dans les archives et dont la publication avait été décidée du vivant de leurs auteurs seraient réunis dans un volume spécial et publiés comme formant un supplément à la série qui venait de se terminer. Ce volume, le onzième des *Mémoires*, parut en 1830. »

« Il semblait qu'au bout de 47 ans on fût venu à bout de liquider ce gigantesque héritage, et pourtant on était dans l'erreur. En 1844, Paul Heinrich von Fuss (1798-1855), fils de Nicolas Fuss et arrière-petit-fils d'Euler, trouva en partie dans les archives de l'Académie, en partie dans les papiers restés en possession de la famille, toute une suite de manuscrits que l'on croyait avoir déjà été imprimés et auxquels, par conséquent, on n'avait plus donné aucune attention, mais qui, après un examen plus rigoureux, furent reconnus pour être de la propre main d'Euler, n'avoir jamais été publiés et contenir des travaux scrupuleusement élaborés! Il semblait que le moment fût venu de mettre à exécution le projet longuement caressé, d'élever au grand mathématicien le monument que le monde scientifique lui devait. Selon le plan de Fuss, que l'Académie accueillit favorablement, et qu'elle soumit au Ministre le 6 avril 1844, la grande œuvre devait se composer de 25 volumes de 80 feuilles chacun. P.-H. von Fuss fut l'âme de cette grande entreprise. Lui et son frère, Nicolas (1810-1867), s'y mirent tout entiers. Un mathématicien de la valeur de J. Jacobi prit fait et cause avec le plus grand enthousiasme pour le projet d'une édition d'Euler, et, dans un travail prolongé pendant de longues semaines, il s'employa à ce que l'œuvre prît corps et donna ses soins aux moindres détails. Deux volumes parurent. Jacobi mourut. L'Académie de Pétersbourg ne se vit pas en état de mener seule à bonne fin l'œuvre commencée sous de si heureux auspices, et le beau plan de 1844 fut abandonné. »

« De même, en 1859, on commença à Bruxelles une « édition belge » des œuvres d'Euler, et l'on ne réussit pas mieux. Cette édition devait donner un « Euler traduit et corrigé ». Cinq volumes seulement parurent [1] ».

Enfin, le 29 juillet 1907, la *Schweizerische Naturforschende Gesellschaft*, dans sa session annuelle tenue à Fribourg, institua, sur la proposition motivée de MM. Geiser, A. Kleiner, Ch. Moser, et F. Rudio une « Commission Eulérienne » qui fut chargée d'étudier les voies et moyens nécessaires pour arriver à la publication des œuvres complètes d'Euler, et l'on ne tarda pas à recevoir l'assurance que cette grande entreprise pouvait compter sur l'appui

---

[1] Les passages entre guillemets sont littéralement tirés, après traduction, de l'article de M. Du Pasquier.

de la « Deutsche Mathematikervereinigung », de l'Association internationale des Académies, du quatrième Congrès international des mathématiciens et de l'Académie des Sciences de Paris.

La place nous est mesurée, et nous ne pouvons dresser un tableau complet de toutes les discussions qui furent soutenues, de toutes les résolutions qui furent prises. Bornons-nous à dire que, le 6 septembre 1909, la dépense de l'édition, évaluée à 450 000 francs, se vit entièrement couverte par les souscriptions, et l'entreprise put être considérée comme réussie au point de vue financier. Ce beau résultat était dû en grande partie à M. le professeur Rudio, qui consacra une année entière de son temps à la tâche de recueillir les subventions et souscriptions nécessaires, aidé d'ailleurs en cela par de nombreux amis, amis enthousiastes et énergiques de l'édition d'Euler.

Cette somme de 450 000 francs paraîtra peut-être monstrueuse au premier abord. Il n'en est rien : nous avons déjà parlé de l'immensité de l'œuvre d'Euler, mais, pour qu'on s'en fasse une idée juste, il faut qu'on sache qu'une fois cette œuvre condensée, réunie, elle formera une masse de 45 volumes grand in-4.

Or les éditions de Laplace et de Lagrange, aujourd'hui à peu près complètes (il ne reste plus à publier que le dernier volume de Laplace), comprennent chacune 14 volumes du même format. L'édition de Cauchy, en cours de publication, comprendra, quand elle sera arrivée à son terme, 27 volumes grand in-4 (dont il a paru à l'heure actuelle 21).

Il ne faut donc pas s'étonner si la publication des œuvres complètes d'Euler doit coûter une somme considérable.

Voici comment les travaux d'Euler seront répartis dans l'édition qui commence à paraître [1].

Première série. — MATHÉMATIQUE PURE.

A. — *Arithmétique et Algèbre* (5 volumes).

I. Éléments d'Algèbre (1 vol.).
II. Dissertations sur l'Arithmétique (3 vol.).
III. Dissertations sur l'Algèbre.
IV. Calcul des probabilités; Théorie des Assurances (III et IV ensemble, 1 vol.).

---

[1] Nous donnons les titres traduits en français.

B. — *Analyse* (11 volumes).

I. Traités classiques (4 vol.).
II. Séries. — Produits fractionnaires et fractions continues (2 vol.).
III. Intégrales : 1re section (2 vol.); 2e section (Intégrales elliptiques) (1 vol.).
IV. Équations différentielles (1 vol.).
V. Calcul des variations (1 vol.).

C. — *Géométrie* (2 volumes).

I. Géométrie élémentaire. Trigonométrie. Courbes algébriques.
II. Applications du calcul différentiel et intégral à la Géométrie (I et II ensemble, 2 vol.).

Deuxième série. — Mécanique et Astronomie (16 volumes).

A. — *Mécanique* (11 volumes).

I. Traités classiques (2 vol.).
II. Principes de la Mécanique.
III. Mécanique des points matériels (II et III ensemble, 1 vol.).
IV. Mécanique des corps solides (1 vol.).
V. Théorie du choc.
VI. Mécanique des corps flexibles et élastiques (V et VI ensemble, 2 vol.).
VII. Mécanique des corps fluides et gazeux (1 vol.).
VIII. Artillerie.
IX. Art de l'ingénieur (VIII et IX ensemble, 1 vol.).
X. Machines (1 vol.).
XI. Construction navales (2 vol.).

B. — *Astronomie* (5 volumes).

I. Œuvres originales (1 vol.).
II. Travaux sur le problème des trois corps (2 vol.).
III. Déterminations spéciales d'orbites.
IV. Précision et nutation (III et IV ensemble, 1 vol.).
V. Astronomie sphérique.
VI. Physique cosmique (V et VI ensemble, 1 vol.).

Troisième série. — Physique. Travaux sur divers sujets. Correspondance.

A. — *Physique* (6 volumes).

I. Physique générale.
II. Chaleur.
III. Acoustique et Musique (I, II et III ensemble, 1 vol.).
IV. Magnétisme et électricité.

V. Optique théorique (IV et V ensemble, 1 vol.).
VI. Instruments d'optique :
1re section : Dioptrique (2 vol.).
2e section : Mémoires divers (2 vol.).

B. — *Travaux sur divers sujets* (2 volumes).

I. Lettres à une princesse d'Allemagne (1 vol.).
II. Autres publications sur divers sujets (1 vol.).

C. — *Correspondance* (3 volumes).

Correspondance avec d'Alembert, Daniel Bernoulli, Johann Bernoulli, Nicolaus Bernoulli, Goldbach, Lagrange, etc.

On n'a pas perdu de temps, et le 18 septembre 1911, le premier Volume de l'édition des Œuvres complètes d'Euler était présenté à l'Académie des Sciences par M. le Secrétaire perpétuel.

Depuis, un autre Tome a été publié également.

Nous avons sous les yeux ces deux Volumes, qui sont respectivement : le premier de la première série, le troisième de la dernière.

M. le professeur Heinrich Weber, de Strasbourg, est l'éditeur du premier, qui a pour titre : *Vollständige Anleitung zur Algebra mit den Züsätzen von Joseph Louis Lagrange*.

Cet Ouvrage n'est pas inconnu en France, car dès 1774, il en a été publié, sous les auspices de d'Alembert, une traduction française, qui a été rééditée en 1798. L'auteur de cette traduction était d'ailleurs Bernoulli [1].

L'origine de cet Ouvrage est curieuse; voici ce qu'on lit dans la préface que Bernoulli a placée en tête du premier Volume de sa traduction :

« Les vues du célèbre auteur étoient de composer un Livre élémentaire, au moyen duquel on pût apprendre, sans aucun autre secours, l'Algèbre à fond. La perte de sa vue lui avoit suggéré cette idée; l'activité de son génie ne lui permit pas de différer

[1] Jean Bernoulli, neveu de Daniel Bernoulli, naquit à Bâle le 4 novembre 1744, fut directeur de l'Observatoire de Berlin et mourut en 1807. C'est celui des Bernoulli qu'on appelle Jean III, pour le distinguer des autres membres de sa prodigieuse famille qui ont porté le même prénom. Ses *Lettres sur différents sujets écrites pendant le cours d'un voyage par l'Allemagne, la Suisse, la France méridionale et l'Italie*, son *Recueil pour les astronomes*, avec le supplément et d'autres Ouvrages du même genre, se lisent encore avec beaucoup d'intérêt.

longtemps à la mettre en exécution. M. Euler choisit pour cet effet un jeune homme qu'il avoit pris à son service en quittant Berlin, qui possédoit assez bien l'Arithmétique, mais qui n'avoit d'ailleurs aucune teinture des Mathématiques; il avoit appris le métier de tailleur, et ne pouvoit être mis, quant à sa capacité, qu'au rang des esprits ordinaires. Non seulement ce jeune homme a très bien saisi tout ce que son illustre maître lui enseignoit et lui dictoit, mais il s'est même trouvé en peu de temps en état d'achever tout seul les calculs algébriques les plus difficiles, et de résoudre promptement toutes les questions analytiques qu'on lui proposoit. »

« Le fait que nous citons doit donner une idée d'autant plus avantageuse de la méthode qui règne dans cet Ouvrage, que le jeune homme qui l'a écrit, et dont les progrès ont été si marqués, n'a reçu absolument d'autres instructions que de ce maître, supérieur à la vérité, mais privé de la vue (¹). »

Le Volume dont nous nous occupons est un magnifique in-quarto de 746 pages. En tête, on trouve un portrait d'Euler, gravé par le Bâlois Mechel, reproduction d'un original peint par Handamann, et qui se trouve à la Bibliothèque publique de Bâle.

Puis une préface à l'ensemble de l'édition, due à M. le professeur Rudio.

Ensuite vient l'éloge d'Euler par Nicolas Fuss, la *Lobrede* que celui-ci a consacrée à son illustre aïeul par alliance. Cet éloge est publié en allemand, mais on peut remarquer qu'à l'origine il a été composé en français.

Puis vient le texte allemand de l'œuvre même d'Euler, il occupe 498 pages et se compose de deux parties. Les trois sections qui forment la première ont pour titres :

I. *Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen*

(¹) A propos de la cécité d'Euler, M. le professeur Eneström, qui rédige à Stockholm un intéressant recueil consacré à l'histoire des sciences mathématiques, la *Bibliotheca Mathematica* (peut-être trop peu connue chez nous), a discuté dans le numéro de cette Revue qui a paru le 15 novembre 1910 : *Une legende sur l'inlassable activité de Leonhard Euler*. Nous avons donné une analyse de cet article dans les *Procès-Verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (26 octobre 1911).

Grössen, c'est-à-dire : « Des différentes méthodes de calcul pour les grandeurs simples ou incomplexes ».

II. *Von den verschiedenen Rechnungsarten mit den zusammengesetzen Grössen*, c'est-à-dire : « Des différentes méthodes de calcul pour les grandeurs composées ou complexes ».

III. *Von den Verhältnissen und Proportionen*, ou bien : « Des rapports et des proportions ».

La seconde Partie se décompose en deux sections, intitulées comme il suit :

I. *Von den algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung*, ou en français : « Des équations algébriques et de la résolution de ces équations ».

II. *Von den unbestimmten Analytic*, ce qui signifie : « De l'Analyse indéterminée ».

Puis viennent les précieuses *Additions* que Lagrange a faites à l'Ouvrage d'Euler. Elles se rapportent à l'Analyse indéterminée. Ces Additions, qui sont écrites en français, occupent 135 pages.

Quant au second Tome dont nous avons à rendre compte, il a été édité par M. le professeur E. Cherbuliez, de Genève. Ce Tome entièrement écrit en latin est consacré à l'Optique. Son titre est : *Leonhardi Euleri Dioptrica.*

Il se décompose en deux parties; la première, qui est la reproduction d'une édition publiée à Pétersbourg en 1769, est intitulée : *Dioptricæ pars prima, continens librum primum de explicatione Principiorum ex quibus constructio tam telescopiorum quam microscopiorum est petenda. — Auctore Leonhardo Eulero. Acad. scient. Borussiæ directore vicennali et Socio. Acad. Petrop. Parisin. et Lond.*

La seconde Partie a pour titre : *Dioptricæ pars secunda, continens librum secundum de constructione telescopiorum dioptricorum, cum Appendice de constructione telescopiorum catoptricodioptricorum; Auctore*, etc.

Il est à noter que les deux parties formant cet Ouvrage ont été, à l'origine, imprimées aux frais de l'Académie de Pétersbourg.

La place nous fait défaut; il nous semble que les titres des deux parties du Volume consacré à la *Dioptrique* doivent suffire pour

donner une idée de cet Ouvrage, et surtout pour inspirer aux physiciens le désir de l'étudier.

Parmi les parties de l'édition qui restent à paraître, une des moins intéressantes ne sera pas celle qui comprendra la correspondance qu'Euler a échangée avec d'Alembert, Daniel Bernoulli, Johann Bernoulli, Nicolas Bernoulli, Goldbach, Lagrange, Delisle, etc. Ces lettres, rangées par ordre chronologique, occuperont environ 1500 pages d'impression et formeront 3 volumes. Nul doute qu'on n'y trouve bien des détails intéressants sur l'histoire des sciences.

C'est M. le professeur Eneström, de Stockholm, qui est chargé spécialement de ce qui concerne la publication de cette correspondance. Il s'occupe aussi de débrouiller toutes les difficultés qu'on peut trouver dans la biographie d'Euler, et nous pouvons espérer que, grâce à lui, l'histoire du géomètre bâlois sera complètement exempte d'obscurité (1).

Nous terminerons par l'expression d'un vœu : il y aura 200 ans le 17 novembre 1917 que d'Alembert sera venu au monde. Ne pourrait-on, à cette occasion, l'honorer comme vient de l'être son illustre contemporain ?

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Schwere-Messungen, relative, in Bayern in den J. 1902-1907. 2. Reihe 1909 u. 3. Reihe 1907. (*Astronomisch-geodätische Arbeiten*, Veröffentlichung der königl. bayer. Kommission f. die internationale Erdmessg.) 32 × 24,5 cm. München, G. Franz' Verl. VII-59 p. 3 m.

Ball (L. de), *Lehrbuch der sphärischen Astronomie*. In-8°, xv-388 p. avec 112 fig. et 2 cartes. Leipzig, W. Engelmann, 20 m.; relié 21,50 m.

(1) Dans la séance du 16 septembre 1912, M. Darboux, Secrétaire perpétuel, a mis, sous les yeux de ses Collègues de l'Académie des Sciences, les deux premiers Volumes de la série II des Œuvres d'Euler, publiés sous le titre Leonhardi Euleri Mechanica, *sive motus scientia analytice exposita, editit Paul Staeckel*. Jamais une publication de cette importance n'a été menée avec une telle rapidité!

LANNER (Alois). — *Die Mathematik im Physikunterricht der österreichischen Mittelschulen.* (*Berichte üb. den mathematischen Unterricht Oesterreich.* Veranlasst durch die internationale mathemat. Unterrichtskommission.) 11e fasc. grand in-8°, 56 p. Wien. A. Hölder, 1.20 m.

Connaissance des Temps ou des mouvements célestes pour le méridien de Paris à l'usage des astronomes et des navigateurs pour l'an 1914, publ. par le Bureau des Longitudes. In-8°, VIII-844 p. avec 3 cartes. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr.

BONOLA (Roberto). — *Non-Euclidean Geometry.* 300 p., ill. Chicago, Open Court. 2 dollars.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien, sowie unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen. Bd. VI, 2. Astronomie. Red v. *K. Schwarzschild.* 4. Lfg. In-8, 463-566 p. Leipzig, B. G. Teubner. 3 m.

HESSENBERG (Gerh.). — *Transzendenz von e und* π. Ein Beitrag zur höheren Mathematik vom elementaren Standpunkte aus. Gr. in-8, X-106 p. Leipzig, B. G. Teubner. 3 m.

GAUSS (Carl Frdr.). — *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- u. Abstossungs-Kräfte.* (1840) (*Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften.* N° 2.) Hrsg. v. *A. Wangerin.* 3. Aufl. In-8, 61 p. Leipzig, W. Engelmann. Relié, 0 m. 80.

— *Allgemeine Flächentheorie.* (*Disquisitiones generales circa superficies curvas.*) (1827) (*Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften.* N° 5.) Deutsch hrsg. v. *A. Wangerin.* 4. Aufl. In-8, 64 p. Leipzig, W. Engelmann. Relié, 0 m. 80.

ARRHENIUS (Svante). — *Theories of solutions with diagrams.* XX-247 p. New Haven, Ct., Yale Univ. Press. 2 dollars 25.

HUYGENS (Christ). — *Treatise on light :* in which are explained the causes of that which occurs in reflexion, and in refraction etc. Rendered into English by *Silvanus P. Thompson.* In-4 (23-18). 142 p. London, Macmillan. 10 s.

Travaux du Laboratoire central d'Électricité. T. II (1904-1911), 96 fig. dans le texte, 59 fig. hors texte et 3 pl. ; avec une préface de *E. Bouty.* In-8, VIII-486 p. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

JANET (P.). — *Allgemeine Elektrotechnik.* Hochschul-Vorlesungen. Deutsch v. *Fritz Süchting* u. *Ernst Riecke.* 1. Bd. Grundlagen. Gleichströme. Bearb. v. *Fritz Süchting* nach der 3. französ., verb. u. verm. Aufl. Gr. in-8, VI-296 p. avec 180 fig. Leipzig, B. G. Teubner. 6 m.; relié, 7 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOTHEZAT (GEORGES DE). — THÈSE PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ, soutenue le 13 juin 1911 et intitulée : *Étude de la Stabilité de l'Aéroplane*. 1 volume in-8, VII-193 pages. Paris, H. Dunod et E. Pinat, 1911.

Cette Thèse a paru ensuite sous forme de livre, avec une Préface par M. Paul PAINLEVÉ. Paris, Dunod et Pinat.

La Faculté des Sciences de l'Université de Paris est outillée de façon spéciale pour l'étude de la navigation aérienne. Elle possède une chaire d'aviation fondée par M. Basil Zaharoff, confiée à M. Marchis, et un Institut aéronautique à Saint-Cyr, créé par M. Deutsch de la Meurthe, dirigé par M. Maurain avec le concours d'un comité technique et scientifique. De plus, elle a la bonne fortune de compter, parmi ses maîtres, un homme, M. Painlevé, qui s'est intéressé à l'aviation dès ses débuts, et qui a fait une étude rationnelle des appareils d'aviation, dans son cours de Mécanique de l'Aviation à l'École supérieure d'Aéronautique et dans un Volume intitulé *L'Aviation* (en collaboration avec M. Borel, Félix Alcan, 1910). Il n'est pas surprenant, dans ces conditions, que la Faculté ait vu soutenir devant elle une Thèse sur l'aéroplane.

La Thèse de M. de Bothezat a pour objet principal l'étude de la *stabilité* de l'aéroplane en mouvement, à l'aide des équations générales de la Mécanique. On admet souvent que, si les conditions de stabilité de l'aéroplane sont très mal connues, cela tient à ce que les lois de la résistance de l'air ne sont pas encore déterminées avec toute la précision désirable. Mais cette opinion n'est pas entièrement fondée. Même si l'on connaissait les lois de la résistance de l'air, avec toute l'ampleur et la rigueur souhaitables, il resterait toujours à traiter la dynamique de l'aéroplane et à étudier rigoureusement les multiples questions relatives aux facteurs de stabilité. Il se pose ainsi toute une série de problèmes, d'un caractère purement dynamique, dont la solution est loin d'être facile.

La méthode classique pour étudier la stabilité du régime d'un solide, soumis à des forces données, consiste à supposer une

petite perturbation du régime à un instant déterminé et à étudier les écarts du nouveau mouvement par rapport au régime, en considérant les écarts comme du premier ordre et en négligeant les termes d'ordre plus élevé. On est ainsi conduit à un système d'équations différentielles linéaires. Quand ces équations sont à coefficients constants, une racine $a - ib$ de l'équation caractéristique donne une solution de la forme λe^{at+ibt}; pour que le mouvement ainsi défini s'amortisse, il faut que la partie réelle a de la racine soit négative. Le premier auteur qui, à ma connaissance, ait formé rigoureusement ces équations, est M. Painlevé : dans les leçons qu'il a professées en 1909 à l'École supérieure d'Aéronautique, il a indiqué les conditions de stabilité, d'une part pour le planeur sans propulseur, d'autre part pour l'aéroplane propulsé. Il a montré que, lorsqu'on se borne à la stabilité longitudinale, les petits mouvements de l'appareil autour de son régime se composent de quatre perturbations principales : les conditions de stabilité s'obtiennent en exprimant que l'équation du quatrième degré, qui constitue l'équation caractéristique du système des équations différentielles linéaires définissant les petits mouvements, admet quatre racines *dont les parties réelles sont négatives*. Il s'est également occupé de la stabilité transversale.

La Thèse de M. de Bothezat est consacrée à l'étude complète de cette question de stabilité. L'Auteur expose d'abord les résultats de M. Painlevé et les complète en développant certains calculs que M. Painlevé n'avait fait qu'indiquer. En étudiant le couple d'amortissement et le couple de rappel de l'appareil, il montre comment ces deux couples dépendent des différentes positions qu'on peut adopter pour les empennages horizontaux des aéroplanes et des différentes formes des lois de la résistance de l'air. En particulier, M. G. de Bothezat met en évidence ce résultat fort important que le couple de rappel est, pratiquement parlant, indépendant de la forme particulière de la loi du déplacement du centre de pression. Il montre ensuite quel est le mécanisme réel de la constitution de ce couple et de quelle façon ce couple dépend de l'inclinaison de l'empennage horizontal [1]. Il montre finalement

---

[1] *Voir* aussi à ce propos le travail de M. G. de Bothezat : *Le Mécanisme de l'action des empennages horizontaux des aéroplanes* (*Revue de Mécanique*, octobre 1911, p. 365).

qu'on peut faire varier, dans de larges limites, le couple d'amortissement et le couple de rappel de l'aéroplane, sans porter atteinte à aucune des qualités essentielles de l'appareil.

Après ces préliminaires, dont les résultats sont d'une application pratique directe, M. G. de Bothezat aborde l'étude du mouvement général de l'aéroplane autour de l'un de ses régimes.

L'approximation des termes du premier ordre étant admise, M. G. de Bothezat montre que le problème se divise en deux : celui de la stabilité longitudinale et celui de la stabilité latérale et de la giration. C'est par des méthodes rigoureuses qu'il donne une discussion complète et générale des oscillations longitudinales de l'aéroplane ([1]). Il commence par dégager deux facteurs qu'il désigne par A et C : ces deux facteurs caractérisent l'amortissement et le couple de rappel dont est doué l'appareil, et dominent tout le problème de la stabilité de l'aéroplane. Il est ensuite amené à classer les appareils, au point de vue de l'allure de l'amortissement de leurs oscillations, en trois catégories : les appareils apériodiques, semi-périodiques et périodiques. Il montre, d'une manière générale, que le caractère commun des oscillations de toutes les catégories d'appareils est l'extrême lenteur de leur amortissement : ces conclusions résultent d'une discussion approfondie de l'ordre de grandeur des parties réelles des racines de l'équation caractéristique. La méthode graphique qu'il emploie peut rendre service dans bien des cas où se présentent des équations algébriques, que la grandeur des coefficients rend pénibles à discuter.

M. de Bothezat montre encore que l'allure des oscillations des aéroplanes dépend principalement de la valeur des deux paramètres A et C, et très peu des autres caractéristiques de l'aéroplane. Ce dernier résultat paraît être d'une importance capitale. M. de Bothezat donne ensuite une méthode graphique permettant

---

([1]) Depuis la publication de l'étude de M. G. de Bothezat, ont paru les recherches de M. G. H. Bryan (*Stability in Aviation*, Macmillan and Co, Limited, Londres, 1911) et de M. C. Runge [*Ueber die Langsschwingungen der Flugmaschinen* (*Zeitschr. f. Flugt. u. Motorl.*, Heft 15, 1911, p. 193)]. Les méthodes dont font usage ces auteurs sont des méthodes d'approximation. M. G. H. Bryan arrive à cette conclusion paradoxale que la stabilité de l'aéroplane croît avec sa résistance à l'avancement (*Stability in Aviation*, p. 92 et 93).

de calculer les valeurs de A et de C les plus favorables à la stabilité de l'aéroplane.

Considérant, d'un côté, la lenteur de l'amortissement des oscillations de l'aéroplane et, d'un autre côté, l'impossibilité de garantir la présence continuelle du couple de rappel, M. de Bothezat arrive à la conclusion, qui semble pratiquement confirmée, que l'aéroplane ne saurait être entièrement stable, tant qu'il constituera un système *invariable*.

En ce qui concerne la stabilité latérale, M. de Bothezat montre qu'après une perturbation de roulis et de giration l'appareil ne peut revenir à son régime initial.

Il serait trop long d'énumérer ici les autres questions délicates, relatives à la stabilité, traitées dans la Thèse. Je me bornerai à faire remarquer que la rigueur des méthodes employées par M. G. de Bothezat et les liens directs qu'il établit, entre les divers coefficients analytiques et les caractéristiques réelles de l'aéroplane, jettent une vive lumière sur le phénomène de la stabilité.

Pour compléter sa Thèse, M. de Bothezat a, dans un récent travail, indiqué un moyen de mesurer la constante d'amortissement qui figure dans le paramètre A et qui constituait la dernière donnée expérimentale faisant défaut pour l'application de ses méthodes [1].

Nous ne saurions mieux caractériser les résultats obtenus par M. de Bothezat, qu'en citant le passage suivant de la Préface, dans lequel M. Painlevé parle des recherches de M. de Bothezat relatives à l'équilibre longitudinal.

» ... Je voudrais insister sur la partie vraiment originale du Livre de M. de Bothezat et dont il peut revendiquer l'honneur et la responsabilité. J'ai dit que les quatre racines d'une certaine équation du quatrième degré devaient avoir leur partie réelle négative, et l'on sait former les conditions explicitement. Mais il ne suffit pas de savoir que les quatres parties réelles sont bien négatives : il faut encore avoir l'idée de leur grandeur, car, si l'une d'elles

---

[1] *Méthode pour l'étude expérimentale de l'effet d'amortissement des empennages horizontaux et des surfaces sustentatrices* (*Revue de Mécanique*, juillet 1911, p. 19); *Méthode pour l'étude expérimentale de l'amortissement des oscillations de certains systèmes en mouvement dans un fluide* (*Comptes rendus*, 21 août 1911, p. 466).

est voisine de zéro, le petit mouvement correspondant ne s'amortira que très lentement, et l'appareil sera animé d'oscillations petites, qui garderont longtemps leur amplitude ou peu s'en faut; qu'une seconde cause perturbatrice agisse au cours de ces oscillations, l'équilibre de l'appareil risque d'être compromis. La stabilité du régime sera donc d'autant meilleure que la moindre des parties réelles, toutes négatives, sera plus grande (en valeur absolue). Mais comment se rendre compte de la grandeur de ces parties réelles? Les coefficients de l'équation du quatrième degré sont compliqués, certaines de ses racines peuvent être imaginaires. Il y avait là un problème algébrique d'une réelle difficulté. M. de Bothezat est parvenu à le résoudre, avec beaucoup d'élégance et d'habileté, par un jeu de courbes. »

M. Painlevé parle ensuite des recherches de M. de Bothezat sur l'équilibre latéral et il conclut en disant : « Ce Livre est, à ma connaissance, le premier qui renferme une discussion exacte et complète de la stabilité de l'aéroplane. » P. Appell.

GALITZINE (Prince B.). — ЛЕКЦІИ ПО СЕЙСМОМЕТРІИ (Leçons de Sismométrie, en russe). Grand in-8 (30^{cm} × 21^{cm}), III-654 pages avec 147 fig. ou pl. Saint-Pétersbourg. Imprimerie de l'Académie, imp. des Sciences, 1912. Prix : 3 r. 60 (10 fr.).

L'Ouvrage que vient de publier, en langue russe, le Prince Galitzine est, comme l'indique le titre, un *Traité* non de Sismologie générale, mais de Sismométrie; l'Auteur s'y restreint exclusivement à l'étude des questions que soulève la mesure des mouvements du sol.

Dans les trois premiers Chapitres (p. 6-188), il rappelle d'abord les lois générales de l'élasticité et la théorie de la propagation des déformations élastiques (ondes longitudinales et transversales). Il envisage plus particulièrement ensuite la propagation de ces ondes dans la Terre, c'est-à-dire les rayons sismiques, la forme de ces rayons; leur angle d'émergence; les hodographes ou graphiques des temps de propagation des diverses ondes en fonction de la distance à l'épicentre; la détermination de l'épicentre par les obser-

vations de plusieurs stations et enfin la loi suivant laquelle les intensités décroissent avec la distance.

Le Chapitre IV (p. 189-285) est consacré aux généralités sur les problèmes spéciaux de la Sismométrie : nature des phénomènes qui doivent être étudiés et mesurés, et description succincte des principaux types de sismomètres.

Le reste de l'Ouvrage (Chap. V-XII) traite de la théorie des sismomètres et de la discussion numérique des données qu'ils fournissent. Après avoir donné une théorie complète du pendule horizontal, l'Auteur passe à l'etude détaillée des instruments qu'il a imaginés, et qui sont, actuellement, les plus parfaits que l'on connaisse.

Le principe général de ces instruments consiste à remplacer l'enregistrement direct des mouvements du sol par celui de leur vitesse. Le sismographe, quel qu'il soit, horizontal ou vertical, porte une petite bobine mobile entre les deux pôles d'un aimant permanent ; les courants d'induction développés dans cette bobine, quand elle oscille, sont transmis à un galvanomètre et enregistrés photographiquement. L'amortissement indispensable pour que la durée propre des oscillations du pendule n'interfère pas avec celle des mouvements du sol, est obtenue par les courants de Foucault développés dans un barreau de cuivre que porte le pendule et qui oscille entre les pôles d'un second aimant.

Ce genre de sismographes présente les avantages suivants qui le rendent supérieur à tout autre : 1° l'enregistrement optique supprime les frottements inhérents aux enregistrements mécaniques; 2° l'enregistrement galvanométrique des vitesses rend les indications indépendantes des variations du zéro, variations lentes et progressives dont la vitesse est négligeable ; 3° l'amortissement magnétique peut être poussé jusqu'à la limite de l'apériodicité; les courbes obtenues se rapprochent donc beaucoup du phénomène réel et permettent de le calculer exactement.

Après la théorie mathématique complète de ses appareils, le Prince Galitzine développe dans le plus grand détail la manière de les employer : évaluation des constantes, dépouillement des courbes, calcul des résultats définitifs et détermination de la position de l'épicentre. On sait que les sismographes Galitzine permettent ainsi de fixer, au moyen des observations obtenues dans

une seule station, et avec une précision réellement remarquable, la distance et l'azimut de l'épicentre, c'est-à-dire sa situation à la surface du globe. De nombreux exemples numériques montrent comment on doit conduire le relevé des courbes et tous les calculs.

Cette partie de l'Ouvrage, la plus importante, a, du reste, été publiée par l'Auteur, sous une forme un peu différente, dans une série de Mémoires rédigés en allemand, et, par suite, plus facilement accessibles.

Dans les deux derniers Chapitres (p. 570-654) le Prince Galitzine étudie les déformations périodiques, sortes de marées, qui se produisent dans l'enveloppe solide de notre globe sous l'influence de l'attraction d'astres extérieurs, Soleil et Lune. Il termine par la théorie des sismographes à enregistrement mécanique.

Les problèmes théoriques et pratiques que soulève la mesure exacte des mouvements du sol sont traités dans cet Ouvrage capital d'une manière aussi complète que rigoureuse. Tous ceux qui s'intéressent à ces questions désireront vivement qu'une nouvelle édition des *Leçons de Sismométrie* soit donnée quelque jour dans une langue qui en rende l'étude plus facile.

ALFRED ANGOT.

MARKOFF (A. A.). — *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Nach der zweiten Auflage des russischen Werkes übersetzt von Heinrich LIEBMANN. 1 vol. gr. in-8°, VII-318, 7 figures dans le texte. B. G. Teubner, Leipzig et Berlin, 1912.

Dans l'Ouvrage de M. Markoff, qui a eu en Russie deux éditions et que M. H. Liebmann a eu l'heureuse idée de traduire en allemand (ce qui fera connaître dans tous les pays occidentaux un Livre excellent), le Calcul des Probabilités n'est envisagé que comme une discipline mathématique. L'Auteur ne prend aucun souci des applications utilitaires et laisse de côté toutes considérations philosophiques touchant les questions de principes; mais il développe, avec une très grande élégance et une scrupuleuse rigueur, tous les problèmes d'analyse soulevés par la Doctrine des Chances; il apporte même des contributions personnelles notables à quelques-unes d'entre elles.

Le point de vue historique n'est pas dédaigné, et l'on a plaisir à voir attribuer à Pascal, à Laplace, à Poisson leur part légitime. Une bibliographie étendue et bien au courant termine d'ailleurs chaque Chapitre.

Il convient de signaler encore, au point de vue pratique, une Table donnant avec *six décimales* les valeurs de l'intégrale de Bernoulli $\Theta(t)$.

A. Boulanger.

MILNE (Rev. John J.). — An elementary Treatise on cross-ratio Geometry, *with historical Notes*. Un vol. in-8, xxiii-288 pages, Cambridge, University Press, 1911.

L'Ouvrage de M. J. J. Milne a pour objet l'exposition des théorèmes élémentaires de la Géométrie projective à deux dimensions. Il se divise de lui-même en deux Parties distinctes : la première, qui comprend les Chapitres I-X et l'Appendice I, se limite à la théorie du point et de la ligne droite ; la seconde, qui comprend le reste du Volume (Chapitre XI-XIX et Appendice II), renferme la théorie des coniques.

Suivant la parole de l'Auteur, le sujet de son Ouvrage a été complètement traité par les Géomètres de l'Antiquité, sauf en ce qui concerne la théorie des coniques qui a fait de grands progrès dans les temps modernes. Aussi bien, les noms d'Euclide, d'Apollonius et de Pappus se rencontrent fréquemment dans le Traité de M. J. J. Milne, et son lecteur pourra se demander souvent s'il n'y a pas quelque ironie à attribuer le nom de *Géométrie moderne* un ensemble de propositions si anciennes pour la plupart. Il y verra une brillante manifestation du génie spéculatif des Grecs, qui, en Géométrie comme en Philosophie ou en Sciences naturelles, a posé et attaqué des problèmes repris vingt-cinq siècles plus tard. Pourtant, il est permis de se demander si M. J. J. Milne n'a pas fait la part trop belle à l'Antiquité ; l'œuvre de Mœbius, et surtout celle de Chasles et des Géomètres français de son École, ne doivent-elles être considérées que comme une simple extension des résultats obtenus jadis par leurs précurseurs hellènes ? D'après M. J. J. Milne, ce serait l'introduction des notations et du concept d'orientation

qui aurait permis de dépasser les Géomètres de l'Antiquité. En réalité, la cause des progrès accomplis est bien plus lointaine et profonde; il faut la voir surtout dans l'apparition et l'application méthodique des notions de groupe et de transformation de contact, qui sont intervenues d'abord dans la théorie projective des figures pour renouveler ensuite toute la Géométrie.

Dans les Chapitres I-III, l'Auteur étudie les propriétés du rapport anharmonique de quatre points ou de quatre droites, les divisions et les faisceaux en perspective, les triangles homologiques et le rapport harmonique. Les Chapitres IV-V abordent la correspondance homographique entre deux divisions ou deux faisceaux, puis la démonstration et les applications du théorème de Pascal pour une conique dégénérée en deux droites. Les Chapitres VI-VII sont consacrés à l'exposition des propriétés métriques de la correspondance homographique et à la recherche des points doubles de deux divisions tracées sur la même base. Il faut savoir gré à l'Auteur d'avoir établi l'équation explicite de la correspondance entre les abscisses de deux points homologues. Pour avoir voulu se restreindre à une exposition strictement géométrique, beaucoup d'auteurs ont négligé le point de vue de l'enseignement : à cet égard, il est superflu d'insister sur les avantages de la méthode adoptée par M. J. J. Milne.

La recherche des points doubles est effectuée par divers procédés dont l'un, dû à M. A. Lodge, est particulièrement simple. Viennent ensuite, dans les Chapitres VIII-X, des applications de la théorie (faites d'après Chasles) aux « problèmes des trois sections », puis l'étude de l'involution et son application aux quadrilatères. Peut-être pourrait-on reprocher à l'Auteur de n'avoir pas insisté dès le début sur le caractère réciproque de la transformation involutive.

Après l'Appendice I sur les Porismes d'Euclide et leurs rapports avec les théories précédentes, nous abordons l'étude des coniques. Pour démontrer que le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques est une conique, M. J. J. Milne emploie une méthode très élégante, due à B. W. Horne : étant donnés cinq points O, A, B, C, D d'une conique (Γ), soient a, b, c, d les projections de A, B, C, D, faites de O comme centre sur la directrice correspondant au foyer F; on a $O(ABCD) = F(abcd)$, et quand O varie sur (Γ) ce dernier

rapport est évidemment constant; une démonstration analogue s'applique pour le théorème corrélatif. Après les premiers corollaires qui en dérivent, viennent (Chap. XII) les théorèmes de Pascal, Brianchon, Newton, Maclaurin, puis (Chap. XIII) les théorèmes classiques sur les pôles, polaires, points et droites conjugués, le théorème de Desargues, les propositions sur les triangles conjugués, inscrits et circonscrits, et enfin l'étude des coniques *contrapolaires* (les coniques ainsi désignées peuvent être considérées comme les transformées homographiques de deux cercles orthogonaux). Dans le Chapitre XIV, l'Auteur aborde la théorie des faisceaux ponctuels et tangentiels de coniques et des points réciproques; le Chapitre XV traite de l'homologie. La démonstration par laquelle M. J. J. Milne établit que la transformée homologique d'une conique est une conique prête à une objection de la part d'un lecteur qui ignorerait, ou ne voudrait pas admettre, le principe de continuité : elle suppose implicitement que l'axe d'homologie rencontre la conique en deux points réels et distincts g et g'. Il est d'ailleurs aisé de lever l'objection en remplaçant l'homologie par le produit successif d'une homothétie, d'une homologie et d'une nouvelle homothétie; on peut encore, comme il est bien connu, remplacer g et g' par deux points quelconques de la conique. Avec le Chapitre XVI, nous abordons la construction des cordes communes, des ombilics et des triangles conjugués communs à deux coniques; les cas particuliers sont exposés en détail, notamment celui du double contact qui fait l'objet du Chapitre XVII. Enfin, l'Ouvrage se termine par la construction des coniques satisfaisant à des conditions linéaires, par l'étude des propriétés métriques des coniques déduites de la considération des points circulaires à l'infini et par l'Appendice II qui établit le théorème de Pascal, pour les coniques (dégénérées ou non), à l'aide des méthodes d'Euclide et d'Apollonius.

Les démonstrations de M. J. J. Milne sont rédigées d'une façon précise et nette; elles sont illustrées de figures claires et bien tracées; de nombreux exercices, habilement choisis, viennent les appuyer à chaque instant. Tout concourt ainsi à faire de l'Ouvrage un guide précieux pour le lecteur qui veut s'initier aux méthodes de la Géométrie moderne.

René Garnier.

AUERBACH (FELIX) und ROTHE (RUDOLF). — TASCHENBUCH FÜR MATHEMATIKER UND PHYSIKER. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. Mit einem Bildnis von *Hermann Minkowski*. 2. Jahrgang, 1911, 1 volume in-8, IX-567 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1911.

La première édition de cet *Aide-Mémoire* parut en mars 1909 sous la signature de M. Auerbach seul. L'accueil qu'on lui fit en Allemagne ou plus généralement dans les pays de langue allemande fut, paraît-il, très favorable. L'idée directrice était nouvelle et certainement fort séduisante : les aide-mémoires ordinaires ne s'adressent qu'à des catégories particulières de lecteurs, électrotechniciens, constructeurs, mécaniciens, géographes, en un mot à des praticiens. Le *Taschenbuch* est destiné plutôt à des théoriciens, écrit pour des hommes de science, mathématiciens et physiciens, c'est un Ouvrage en partie didactique, où l'on trouve des aperçus sur les progrès les plus récents de la science pure; c'est en quelque sorte le résumé d'un triage de l'Encyclopédie des sciences mathématiques et physiques.

Alors qu'au siècle dernier, il existait une communion d'idées étroite entre mathématiciens et physiciens et que les savants pensaient, à l'exemple de Fourier, que « l'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques », il semble que les tendances actuelles éloignent les mathématiciens du domaine expérimental et les orientent dans une voie métaphysique qui leur ouvre un champ de recherches abstraites, purement spéculatives, et les détournent des problèmes d'intérêt pratique. Les doutes qu'apportent d'autre part sur les principes de la Mécanique classique les théories électroniques, plus généralement le besoin que ressentent les expérimentateurs de développer à l'extrême leur puissance d'investigation au détriment de l'esprit d'analyse, rendent beaucoup de physiciens sceptiques à l'égard des disciplines mathématiques où l'on attribue parfois autant de poids à la démonstration de la possibilité d'un problème qu'à sa résolution complète.

Le *Taschenbuch* de MM. Auerbach et Rothe est propre à lutter contre ces tendances; il peut contribuer à inciter les mathématiciens et les physiciens à reprendre une coopération nouvelle plus

étroite, plus active et plus féconde que celle qui s'est manifestée au cours de ces dernières années. « La physique mathématique et l'analyse pure, a dit Poincaré, ne sont pas seulement des puissances limitrophes entretenant des rapports de bon voisinage; elles se pénètrent mutuellement et leur esprit est le même. » C'est une pensée qui se confirme sans cesse : par exemple, dans un Ouvrage tout récent, *The Electromagnetic Radiation and the Mechanical Reactions arising from it*, M. Schott arrive le plus souvent à des séries de Kapteyn des *Fonctions de Bessel*; l'étude de la convergence et les méthodes de sommation de ces séries offrent de multiples problèmes aux mathématiciens purs; quand ces problèmes seront résolus, la théorie électronique de la matière aura fait un réel progrès. Attirer l'attention commune des deux catégories de lecteurs auxquels le Livre s'adresse a exigé naturellement des Auteurs un sens critique aigu; il était très délicat de faire un choix judicieux dans l'amoncellement des richesses de la pensée scientifique. Un physicien demeurera indifférent aux nouvelles propositions sur la géométrie du triangle, tandis qu'il s'intéressera à une méthode perfectionnée de calcul des orbites s'il s'occupe d'électrons, ou à l'étude des bases de la géométrie non euclidienne à cause des rapports de cette géométrie avec la théorie de la relativité.

L'Ouvrage porte en frontispice un portrait d'Hermann Minkowski; une Notice biographique, due à MM. Hilbert et Weyl, rappelle brièvement la carrière de cet homme de génie, dont les physiciens autant que les mathématiciens déplorent la fin prématurée. Personne n'était mieux qualifié que M. Hilbert, dont il serait superflu de rappeler dans ce *Bulletin* les multiples et profondes découvertes dans les domaines les plus abstraits de la Mathématique, pour dire ce que fut le penseur prodigieux qui toute sa vie eut présent à l'esprit la devise : « Rien n'est beau que le vrai! », cette devise de son travail sur les *Formes quadratiques*, pour lequel, avant l'âge de dix-huit ans, il reçut le Grand Prix des Sciences mathématiques de l'Institut de France. Les dernières recherches de Minkowski demeurent inachevées; il est heureux qu'à côté de lui, il se soit trouvé à Göttingue un savant aussi éminent que M. Hilbert pour recueillir ses derniers travaux et publier d'ici peu ses Œuvres posthumes.

Le *Taschenbuch* est divisé en deux grandes Parties : la pre-

mière a trait à la Mathématique, la seconde à la Physique. Un exposé très élégant de M. H. Greinacher sur la Mécanique (statique, cinématique, dynamique, théorie du potentiel), où l'Auteur a eu l'idée, particulièrement heureuse, de se servir des ressources de l'analyse vectorielle pour condenser le sujet et mettre en évidence le point de vue physique; Notes de Chimie générale, où la condensation a été poussée à la dernière limite par M. Friedrich Auerbach, viennent s'y ajouter. Si bien traité que puisse être le Chapitre sur l'Électrotechnique, dont la rédaction a été confiée à M. Konrad Simons, on peut le considérer comme un hors-d'œuvre dans un Ouvrage de ce genre; il eût été plus judicieux, à mon avis, de consacrer les trente-quatre pages de ce Chapitre à des développements qui eussent été les bienvenus sur la Physique mathématique.

Le Livre ne pouvait manquer d'une certaine hétérogénéité, non pas tant à cause de la collaboration de plusieurs auteurs qu'en raison de la multiplicité des questions à traiter dans chacune de ses grandes divisions. M. Rothe est parvenu cependant, dans les sujets si divers qu'il a exposés, arithmétique et algèbre, analyse, géométrie, mathématiques appliquées, à atténuer dans une large mesure l'impression désagréable qu'on peut éprouver en présence de tant d'idées différentes. La partie mathématique, envisagée par l'Auteur à un point de vue très élevé et tout à fait actuel, donne l'impression d'un tout; c'est, je crois, le plus bel éloge qu'on puisse en faire; les idées dominantes des diverses disciplines y sont exposées avec ordre, dans un langage clair, précis et d'une extrême concision.

Grassmann définissait la Mathématique comme « la Science des grandeurs et des lois qui les relient, en entendant sous le nom de *grandeur* toute chose qu'on peut poser égale (ou inégale) à une autre ». M. Rothe remarque que cette définition ne s'applique pas à certains domaines des mathématiques mis en valeur à une époque plus récente, tels que la théorie des groupes, le calcul logique, la topologie. Quant aux définitions formelles de Papperitz et de Voss, elles ne donnent aucune indication sur la construction *déductive* caractéristique de la discipline propre à la science mathématique, ainsi que M. Hilbert l'a prouvé le premier dans ses *Grundlagen der Geometrie*.

M. Rothe s'appuie toujours sur les conceptions de M. Hilbert : « L'arithmétique des nombres (réels) est basée d'une part sur la conception d'axiomes particuliers et d'autre part sur l'extension successive du concept des nombres naturels 1, 2, 3,. . . et des opérations qui les concernent ». La méthode de l'arithmétique est donc à la fois *axiomatique* et *géométrique* .

« . . . La soustraction et la division agrandissent le domaine des nombres naturels par l'acception des nombres négatifs et fractionnaires . . . L'élévation aux puissances n'agrandit pas le domaine des nombres rationnels ; celui-ci n'est accru que par l'extraction des racines et par l'opération logarithmique. Les nombres irrationnels se définissent dans leur forme la plus générale (Weierstrass, G. Cantor, Ch. Méray) par le concept de la *série fondamentale*, c'est-à-dire par une suite convergente des nombres rationnels $a_1, a_2, \ldots$, tels que, pour un indice ν choisi suffisamment grand et pour tout nombre entier positif p, la grandeur $|a_{\nu+p} - a_\nu|$ devient aussi petite qu'on veut. Chaque suite numérique convergente n'a qu'un seul nombre pour limite. »

Ces quelques lignes traduites littéralement donnent une idée de la manière de voir de l'Auteur et de la précision de son langage. Toute la partie mathématique est traitée dans le même esprit ; on y reconnaît l'importance que M. Rothe attache aux postulats de la géométrie d'Hilbert. « Les objets dont la Géométrie s'occupe, sans les définir en eux-mêmes, sont les points, les droites, les surfaces, et les rapports entre ces objets s'appellent les *axiomes* de la Géométrie.... La Géométrie d'Hilbert comprend cinq groupes d'axiomes non contradictoires, complets par eux-mêmes et indépendants au point de vue logique ». On sait le beau parti que M. Halsted a tiré récemment de ces axiomes, où il a réussi en particulier à démontrer que la Géométrie métrique ne repose pas, comme on le croyait jusqu'ici, sur la notion de nombres fractionnaires et de nombres irrationnels ; c'est le *simple prolongement de notre premier Livre*.

La théorie des ensembles fait l'objet d'une étude très intéressante de M. G. Hassenberg. Viennent ensuite les combinaisons, déterminants, formes linéaire et quadratique, la théorie des invariants, les équations, corps et nombres algébriques, la théorie des groupes, les séries finies, les séries et produits infinis, la théorie

des nombres, les nombres purement algébriques, la dernière loi de Fermat, les nombres transcendants.

Un mot sur la *Dernière loi de Fermat*. Il s'agit de prouver qu'il est impossible de trouver des nombres entiers quelconques x, y, z, satisfaisant à l'équation indéterminée $x^p + y^p + z^p = 0$ pour des exposants $p > 2$.

Cette loi fait partie, comme la loi de Goldbach dans la théorie des nombres, comme le problème du continu de Cantor dans la théorie des ensembles, comme la question de la transcendance d'un nombre donné à l'avance, de cette série de propositions pour lesquelles on n'a jamais pu donner jusqu'ici de démonstration directe ni de démonstration du contraire, ni prouver non plus leur non-démontrabilité. En partant des congruences de Kummer, M. Wieferich a réussi à démontrer (1908) que, si l'équation de Fermat doit être satisfaite par des nombres x, y, z premiers avec p, la congruence $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ doit aussi avoir lieu. C'est un point important qui peut guider dans les recherches ultérieures. La question a suscité depuis quatre ans d'innombrables travaux, par suite du legs de 100000 marks que M. Wolfskehl a laissé à l'Académie des Sciences de Göttingue pour récompenser celui qui trouvera le premier la démonstration du célèbre problème. Le délai fixé par le légataire pour l'attribution du prix n'arrivant à échéance que le 13 septembre 2007, bien des chercheurs s'efforceront sans doute encore de résoudre la question dont les difficultés ont été mises en évidence par M. Benno Lind dans un Mémoire paru en 1910 sous le titre *Ueber das Letze Fermat'sche Theorem*. Quand on songe qu'en 1877 un Hermite a su découvrir un critérium assez subtil pour discerner la transcendance du nombre e, malgré la chaîne si dense que forment les nombres algébriques, on peut espérer que la *Dernière loi de Fermat* n'acquerra pas la célébrité du problème de la quadrature du cercle.

M. Rothe a traité l'analyse, la géométrie et les mathématiques appliquées (calcul des probabilités, interpolation, calcul des erreurs, quadrature mécanique, analyse vectorielle) dans le même esprit que le Chapitre relatif à l'arithmétique et algèbre.

La conception moderne de l'idée de fonction comme *variation simultanée*, due aux travaux de Fourier, Dirichlet, Cauchy, Riemann, conduit, comme on sait, à attribuer une importance

considérable à la série de Fourier. « Il existe des fonctions continues, dit l'Auteur, dont la série de Fourier correspondante n'est pas convergente en chaque point. Il existe des séries trigonométriques convergentes qui ne sont pas des séries de Fourier. Mais quand une fonction constamment finie $f(x)$ est développable en une série trigonométrique convergente, cette série est alors la série de Fourier appartenant à $f(x)$. L'importance des séries de Fourier tient surtout à ce que, par elles, on peut représenter analytiquement des fonctions données d'une manière arbitraire, même celles qui, dans différentes portions d'un intervalle, obéissent à des lois analytiques différentes ». L'Auteur donne ensuite les formules qu'on rencontre le plus souvent dans les questions de physique mathématique, dans l'étude de l'électricité (par exemple, dans le problème de la propagation des ondes électriques le long d'un conducteur) et de la chaleur.

L'intuition géométrique n'apprenant rien *a priori* sur le continu fonctionnel, les difficultés du Calcul des variations sont extrêmes. On ne trouve donc, à juste titre, dans le *Taschenbuch*, que les éléments du problème le plus simple, et le lecteur qui désire de plus amples renseignements sur ce calcul, qui joue à l'égard des opérations fonctionnelles le rôle du calcul différentiel à l'égard des fonctions, devra consulter des Ouvrages spéciaux, tels que ceux de Kneser, de Bolza, etc.

On sait que les leçons de M. Darboux sur la théorie des surfaces ont eu la plus heureuse influence sur le développement des applications à la géométrie de la théorie des équations différentielles. M. Rothe, dont les travaux ont beaucoup contribué à l'essor de cette partie des sciences mathématiques, si importante depuis le *theorema egregium* de Gauss, devait exposer naturellement d'une manière remarquable les principes de la théorie générale des surfaces. C'est un des paragraphes les mieux traités de la partie mathématique du Livre. Une simple remarque : dans les éditions ultérieures, on supprimera les mots « zerfallende Parabel » (p. 213, ligne 14) à propos de l'indicatrice de Dupin, car si cette section conique est une ellipse, ou une hyperbole, ou deux droites parallèles, on ne peut dire d'une manière aussi générale que ce soit *une parabole se réduisant à deux droites parallèles* (cas du cylindre).

Un analyste géomètre disciple de Sophus Lie, M. H. Liebmann, bien connu pour ses travaux sur la théorie des transformations de contact et pour sa démonstration de l'impossibilité de la déformation de toutes les surfaces convexes fermées, a rédigé une Note sur la Géométrie non euclidienne. Cette géométrie, sur laquelle il a publié de nombreuses recherches personnelles [1], il la considère au même point de vue que Gauss, Bolyai, Lobatschefsky. Son intention, m'écrivait-il récemment, est en quelque sorte de se servir de l'*intuition non euclidienne* et non pas des représentations conformes ou géodésiques dans l'espace euclidien. M. Liebmann fait observer que, dans la représentation de la géométrie hyperbolique, on emploie une section conique réelle, dans laquelle aux points réels, infiniment éloignés, idéaux, correspondent les points à l'intérieur de cette surface conique, sur la surface ou à l'extérieur, tandis que dans la représentation de la géométrie elliptique, on doit employer une section conique sans points réels, dont l'équation n'ait cependant que des coefficients réels, telles que $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Il s'ensuit qu'on doit reconnaître à la géométrie hyperbolique un caractère d'incontestabilité logique, dès lors qu'on reconnaît ce même caractère à la géométrie d'Euclide. La plupart des astronomes actuels sont favorables à la conception de l'espace sphérique ou elliptique, parce qu'un tel espace, étant fini, ne peut contenir que des masses finies. Néanmoins, si l'on pose $\frac{1}{r}$ à la place du potentiel newtonien, les lois de Kepler ne subissent presque pas de changement

$$V = \frac{c}{K} \coth\left(\frac{r}{K}\right) \qquad \text{(espace hyperbolique)},$$

$$V = \frac{c}{K} \cot\left(\frac{r}{K}\right) \qquad \text{(espace sphérique-elliptique)}.$$

Un paragraphe, dû à M. Tœplitz, est consacré à l'équation intégrale linéaire de deuxième espèce. On pourrait à première vue considérer cette question comme d'un intérêt spécial. Mais, en réalité, la théorie de l'équation

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt$$

---

[1] H. Liebmann, *Das Pentagramma mirificum und die nichteuklidischen Parallelen.*

(qu'on rencontre notamment dans la théorie du potentiel) conduit à une discipline générale dans le domaine de l'analyse où la pensée systématisante semblait faire complètement défaut, comme dans le développement en série selon des fonctions trigonométriques sphériques ou autres. Neumann avait résolu cette équation dans un cas particulier où K (s, t) est spécialement la fonction de Green. Fredholm, qui en donna la solution générale, se laissa guider par une analogie avec la théorie des systèmes d'équations linéaires en Algèbre.

La partie mathématique contient encore une étude importante de M. Ziegel sur les Calculs d'assurances sur la vie. Elle se termine par une Note de M. Lietzmann sur le programme et l'esprit de l'enseignement des Mathématiques dans les écoles supérieures allemandes; cette Note intéressera tous ceux qui s'occupent de pédagogie; elle mériterait d'être traduite *in extenso* dans une de nos revues d'enseignement.

Arrivons maintenant à la partie physique du *Taschenbuch*, rédigée presque entièrement par M. Auerbach.

Elle est encadrée par deux Notices excellentes, l'une sur la théorie de la Relativité, l'autre sur les phénomènes radioactifs, questions qui toutes deux préoccupent au plus haut point les physiciens. La rédaction de ces Notices a été confiée respectivement à M. Willy Wien et à M. H. Greinacher; le choix ne pouvait être meilleur : les noms de ces deux savants sont bien connus en France, et ceux qui s'occupent de radioactivité apprécient tout particulièrement les recherches de l'éminent professeur de Zurich.

La physique d'Auerbach se présente sous un aspect moins satisfaisant que la mathématique de Rothe; elle n'est pas *up to date* et se rapproche beaucoup plus d'un formulaire courant. L'unité de conception y est peu manifeste; c'est, en maints endroits, de la Physique assez élémentaire, d'une forme vieillie, parfois défectueuse, où l'accumulation des formules nuit à la mise en valeur des idées essentielles. C'était sans doute une tâche des plus ingrates que de vouloir condenser en 200 pages les principaux Chapitres de la Physique (physique de la matière, acoustique, chaleur, électricité et magnétisme, optique) et de fournir au lecteur le renseignement dont il a précisément besoin; mais la préoccupation

d'entasser les formules a nui à la rigueur de quelques exposés, et un peu plus de précision dans le langage n'aurait pas été inutile. Je me bornerai à signaler sous ce rapport la définition des thermomètres *instruments qui caractérisent l'état calorifique au moyen d'un volume ou d'une pression* (p. 317), celle du zéro absolu (p. 317) où d'une manière... inattendue la pression du gaz refroidi n'intervient pas (!) et celle de l'intensité lumineuse *énergie cinétique du mouvement d'éther par unité de temps...*; la bougie est l'unité d'intensité lumineuse, non pas le lumen que le Congrès des Électriciens de Genève (1896) a adopté comme unité pratique de flux lumineux. L'Auteur prend comme point de départ de l'électromagnétisme la loi élémentaire de Laplace, qui a le grand inconvénient d'être arbitraire, et il l'écrit sous une forme sur laquelle on pourrait faire de nombreuses réserves. En électrodynamique, il part de la loi élémentaire d'Ampère qui n'a plus qu'un intérêt historique. Il regarde la chute de tension inductive comme une grandeur électrique alors que c'est le flux du vecteur tourbillon électrique à travers une surface tracée dans le champ, qui donne naissance aux phénomènes d'induction [1], etc.

La théorie des champs de force des phénomènes électriques et magnétiques est complètement sacrifiée dans le *Taschenbuch;* on devrait s'attendre cependant à ce qu'un Livre, écrit pour des physiciens, donne quelques aperçus sur une théorie aussi capitale pour la Science, quand il donne, par ailleurs, des détails nombreux sur la méthode astronomique d'Olbers et la transformation de cette méthode par Gauss. Neuf lignes seulement sont consacrées à la théorie électronique; M. Auerbach voit dans la théorie de Lorentz, où l'éther est regardé comme en repos absolu, des mouvements relatifs de la matière par rapport à l'éther, quand au contraire Lorentz a donné aux équations de Maxwell-Hertz une forme sous laquelle on a reconnu (avant le résultat négatif des expériences de Michelson) qu'il est impossible de déceler un mouvement relatif de la matière par rapport à l'éther. Bien d'autres remarques particulières pourraient être faites sur tel ou tel paragraphe de la partie physique du Livre, qui, pour tout dire, gagnerait à être remaniée.

---

[1] R. de Bailleharche, *Sur la loi de l'induction* (*Bulletin de la Société internationale des Électriciens*, 2e série, t. X, nos 92 et 94).

pour ses éditions ultérieures, dans l'esprit de la première Partie. Quelques notions fondamentales font, en outre, complètement défaut; c'est ainsi que la mesure des longueurs, des masses, des temps, des principales constantes physiques, la définition exacte des unités métriques, de la force, du travail, de la puissance, de la pression, les dimensions des grandeurs, les systèmes d'unités, les bases de la théorie du frottement, de l'élasticité, etc., toutes notions sur lesquelles il n'est jamais inutile de réfléchir, on n'a pas cru nécessaire de les reproduire dans la deuxième édition du *Taschenbuch;* on laisse aux lecteurs le soin de se reporter à la première; je crois que c'est un inconvénient.

La composition typographique est soignée et d'un aspect agréable. La première Partie comprend deux sortes de caractères typographiques; le texte en petits caractères n'est pas indispensable à la première lecture, mais comme il ne s'agit pas toujours d'*addenda*, mais parfois d'exposés généraux, il est bon de le lire avec soin de prime abord. Les fautes d'impression sont rares et faciles à corriger; ce sont ordinairement des fautes de signe ([1]); p. 243 il faut lire $\ldots + \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}\right]$ au lieu de $\left[\mathbf{B}\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right]$ dans le développement vectoriel de $\frac{d}{dt}[\mathbf{AB}]$.

Les Tables de la partie physique sont claires et bien disposées; mais leurs nombres diffèrent parfois assez sensiblement de ceux qu'on trouve dans d'autres recueils; le *Taschenbuch* donne 15 comme point de fusion du paraxylol, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* (1912) donne 9,8. Les Tables de la partie mathématique sont nombreuses et utiles; on y trouve notamment les logarithmes des fonctions trigonométriques, des sinus et cosinus hyperboliques, les valeurs des fonctions de Bessel $J_0(x)$ et $J_1(x)$, des fonctions sphériques de Legendre $P_1(x)$ à $P_5(x)$, de la fonction exponentielle ([2]) e^x ou e^{-x}, de la fonction $\Gamma(x)$, etc.

On aurait pu ajouter à ces Tables celle des intégrales de Fresnel G et F, dont l'importance est si grande en Physique, et celle des valeurs des fonctions e^{-x^2} et e^{x^2}, à cause de l'emploi fréquent de

---

([1]) Page 327, *lire* + 138 pour le xylol; page 328, *lire* — 364 pour la température critique de l'eau.

([2]) Pour $x = 6$, $e^x = 403,43$ (et non 403,00).

la *courbe en cloche* dans la théorie des probabilités; cette dernière Table aurait eu sa place toute indiquée en regard de celle qui donne les valeurs de la fonction $\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ du calcul des erreurs. J'ai l'impression qu'il aurait peut-être été plus utile de donner une plus grande extension à quelques-unes de ces Tables que de donner une liste des noms et adresses de tous les *Hochschullehrer* en fonction ou en retraite. Encore une remarque de détail : je crois que chaque Nation doit revendiquer comme faisant partie de son patrimoine la gloire des savants qui ont laissé un grand nom dans la Science; les Français peuvent s'étonner alors de ne pas trouver, à propos des gaz, le nom de Mariotte; dans la Table des matières, ils devront chercher celui de Gay-Lussac à la lettre B : *Boyle-Gaylussac' sches Gesetz*, 306-342. Il faut reconnaître, par contre, que le *Taschenbuch* donne une liste à peu près impartiale des savants que la mort a fauchés en 1909 et 1910.

Je dirai volontiers que l'Ouvrage d'Auerbach et Rothe comble une lacune et qu'il rendra de grands services en raison surtout de la manière pleine de vie, de pensée, dont la partie mathématique et mécanique est traitée.

Les physiciens et les mathématiciens, qui ont en général tant de répugnance à se servir d'un aide-mémoire à cause de la sécheresse ordinaire de ces sortes de Livres, trouveront certainement de l'intérêt à étudier le *Taschenbuch* et à le consulter souvent.

Comte de Baillehache.

MÉLANGES.

LA COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE DE 1908 A 1912.

Compte rendu sommaire suivi de la liste des publications du Comité central et des Sous-Commissions nationales.

Rapport présenté au Congrès de Cambridge à la séance du vendredi 23 août 1912.

PAR M. H. FEHR,
Secrétaire général de la Commission.

PREMIÈRE PARTIE.

La Commission internationale de l'Enseignement mathématique, de 1908 à 1912.

COMPTE RENDU SOMMAIRE.

A. — Introduction.

La Commission internationale de l'Enseignement mathématique a été instituée par le 4e Congrès international des Mathématiciens tenu à Rome du 6 au 11 avril 1908. Dans sa séance du 11 avril le Congrès adopta la résolution (1) suivante :

« *Le Congrès ayant reconnu l'importance d'un examen comparé des méthodes et des plans d'études de l'enseignement*

(1) Cette résolution fut proposée par la section *Philosophie, Histoire et Enseignement*, à la suite d'une série de Rapports sur l'enseignement mathématique dans les principaux pays. Sur l'initiative de M. le professeur Dav.-Eug. Smith, auteur du Rapport concernant les États-Unis, elle décida de soumettre au Congrès une résolution tendant à créer une Commission internationale chargée de faire une étude d'ensemble des progrès de l'enseignement mathématique dans les différentes nations. Cette proposition avait déjà été formulée par le savant professeur de New-York, en 1905, dans sa réponse à une enquête sur les *réformes à accomplir*, entreprise par M. Fehr, dans la Revue internationale *L'Enseignement mathématique*.

mathématique dans les écoles secondaires des différentes nations, confie à MM. Klein, Greenhill *et* Fehr, *le mandat de constituer une Commission internationale qui étudiera ces questions et présentera un Rapport d'ensemble au prochain Congrès.* »

Le comité de trois membres désigné par le Congrès a pris le nom de *Comité central;* il s'est constitué de la manière suivante :

Président : M. le professeur F. Klein, G. R. R., Göttingue.
Vice Président : Sir George Greenhill, F. R. S., Londres.
Secrétaire général : M. le professeur H. Fehr, Genève

Dans une réunion tenue à Cologne, en septembre 1908, le Comité central établit le *Rapport préliminaire* destiné à renseigner les délégués sur l'organisation de la Commission et à leur fournir des indications générales concernant le plan des travaux.

Il convient de rappeler ici les principaux points qui ont servi de base à l'organisation de la Commission et à l'élaboration des nombreux travaux rédigés dans les principaux pays.

B. — Organisation de la Commission.

I. — *Les Délégations.*

a. La Commission est formée par des délégués représentant les pays qui ont pris part au moins à deux des Congrès internationaux des Mathématiciens avec une moyenne d'au moins deux membres. Chacun de ces pays a droit à un délégué. Les pays qui ont eu une moyenne d'au moins dix représentants peuvent avoir deux ou trois délégués. Dans les votations et les discussions de la Commission, chaque pays n'a cependant qu'une voix.

Les pays, dits *pays participants*, appelés à prendre part aux travaux de la Commission, sont les suivants :

Allemagne (3 délégués). — Autriche (3). — Belgique (1). — Danemark (1). — Espagne (1). — États-Unis d'Amérique (3). — France (3). — Grèce (1). — Hollande (1). — Hongrie (3). — Iles Britanniques (3). — Italie (3). — Japon (1). — Norvège (1). — Portugal (1). — Roumanie (1). — Russie (3). — Suède (1). — Suisse (3).

Les pays qui ne répondent pas aux conditions ci-dessus, mais qui par leurs institutions peuvent contribuer aux progrès de la Science, ont été invités à se faire représenter par un délégué qui suivrait les travaux de la Commission, sans toutefois prendre part aux votations.

Ces pays sont dits *pays associés;* le Comité central s'est adressé aux pays suivants :

Argentine (Rép.). — Australie. — Brésil. — Bulgarie. — Canada. — Chili. — Chine. — Colonie du Cap. — Égypte. — Indes anglaises. — Mexique. — Pérou. — Serbie. — Turquie.

et il a pu obtenir des représentants pour l'Australie, le Canada, la Colonie du Cap, le Mexique et la Serbie. Des pourparlers se poursuivent pour quelques États, et nous espérons qu'à l'occasion du Congrès de Cambridge il sera possible de les faire aboutir définitivement (1).

Voici la liste des membres de la Commission qui ont fonctionné pendant la période de quatre ans qui s'est écoulée entre les deux Congrès.

Délégués des pays participants :

Allemagne : MM. F. Klein (Gœttingue), P. Staeckel (Carlsruhe), P. Treutlein (Carlsruhe).

Autriche : MM. E. Czuber, W. Wirtinger, R. Suppantschitsch.

Belgique : M. J. Neuberg (Liége).

Danemark : M. P. Heegaard (Copenhague).

Espagne : M. Z.-G. de Galdeano (Saragosse).

États-Unis : MM. Dav.-Eug. Smith (New-York), W. Osgood (Cambridge, Mass.), J.-W.-A. Young (Chicago).

France : MM. A. de Saint-Germain, C.-A. Laisant et C. Bourlet.

Grèce : M. C. Stéphanos (Athènes).

Hollande : M. J. Cardinaal (Delft).

Hongrie : MM. M. Beke, C. Radoz, Ratz (Budapest).

---

(1) Pendant le Congrès, le Comité central a enregistré l'adhésion du Brésil, représenté par M. E.-R. Gabaglia (Rio-de-Janeiro), et de la Bulgarie, représentée par M. A.-V. Sourek (Sofia).

Iles Britanniques : Sir George Greenhill, professeur E.-W. Hobson, M. C. Godfrey.

Italie : MM. G. Castelnuovo (Rome), Fr. Enriques (Bologne), G. Scorza (Palerme).

Japon : M. R. Fujisawa (Tokio).

Norvège : M. Alfsen (Christiania).

Portugal : M. Gomes Teixeira (Porto).

Roumanie : M. G. Tzitzeica (Bucarest).

Russie : MM. N. v. Sonin, Kojalovic, K.-W. Vogt (Saint-Pétersbourg).

Suède : M. H. v. Koch (Stockholm).

Suisse : MM. H. Fehr (Genève), C.-F. Geiser (Zurich), J.-H. Graf (Berne).

Délégués des pays associés :

Australie : M. Carslaw (Sidney); suppléant en Europe : professeur Bragg (Leeds).

Canada : M. Bovey (Londres).

Colonie du Cap : M. Hough (Capetown).

Mexique : M. Valentin Gama (Tacubaya).

Serbie : M. Michel Petrovitch (Belgrade).

Décès. — La Commission a eu le regret d'enregistrer les décès de trois de ses membres. Ce fut d'abord M. G. Vailati, l'un des délégués italiens, qui a été remplacé par M. Scorza (Palerme). Puis au cours de la présente année elle a été privée du concours de M. Bovey, recteur du Collège Impérial technique de South-kensington, à Londres, qui s'était spécialement chargé de nous renseigner sur l'enseignement mathématique au Canada, et de M. P. Treutlein, G. H. R., membre de la délégation allemande; celle-ci perd en lui un collaborateur très actif et fort apprécié pour ses Ouvrages didactiques. M. Treutlein est décédé subitement le 26 juillet dernier à l'âge de 67 ans.

Démission. — M. le professeur Z.-G. de Galdeano (Saragosse) a désiré se retirer de la Commission à la fin de cette première période. Le Comité central lui a exprimé ses vifs remerciements pour tout l'intérêt qu'il n'a cessé de témoigner à la Commission. M. C.-J. Rueda (Madrid) a été désigné comme délégué espagnol.

II. — *Sous-Commissions nationales.*

Les différentes délégations ont été invitées à s'adjoindre des sous-commissions nationales, comprenant des représentants des divers degrés de l'enseignement mathématique dans les établissements d'instruction générale ou dans les écoles techniques ou professionnelles. Ces sous-commissions ont apporté un concours très précieux aux délégués pour la préparation des rapports. C'est à leurs membres que l'on doit en grande partie les nombreuses publications qui ont été entreprises sur l'initiative de la Commission.

III. — *Dispositions financières.*

Le 4e Congrès international n'ayant fourni aucun subside les gouvernements des *pays participants* ont été invités à mettre à la disposition de leur délégation une somme permettant de couvrir entièrement les frais de la délégation et de la sous-commission nationale et de contribuer aux frais généraux de la Commission.

Pour subvenir aux frais généraux de la Commission (comprenant notamment les frais du secrétariat-général et du Comité central), il a été constitué un fonds formé par des contributions annuelles de cent francs par *pays participant*.

IV. — *Organe officiel de la Commission. Publications des Rapports des Sous-Commissions.*

La Revue internationale *L'Enseignement mathématique*, dirigée par MM. Laisant et Fehr, sert d'organe à la Commission. Elle publie les Rapports du Comité central et rend régulièrement compte des travaux de la Commission et des sous-commissions.

Les sous-commissions publieront leurs Rapports suivant leur propre convenance. Le Comité central a toutefois exprimé le désir que ces rapports soient imprimés suivant le format de *L'Enseignement mathématique* et que les délégations des divers pays en adressent 75 exemplaires au secrétariat général qui les fait distribuer aux membres de la Commission.

V. — *Langues officielles.*

La correspondance et les rapports doivent être rédigés dans l'une des quatre langues admises aux Congrès internationaux des Mathématiciens, au gré des auteurs. Ces langues sont : l'allemand, l'anglais, le français et l'italien.

C. — Objet des travaux de la Commission.

Dans le texte même de la résolution du Congrès de Rome, il n'est question que de l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires. Mais étant donné que le but de ces écoles et la durée de leurs études sont très variables d'un État à un autre, le Comité central a jugé utile de faire porter son travail sur l'ensemble du champ d'instruction mathématique depuis la première initiation jusqu'à l'enseignement supérieur. En outre, il ne s'est pas borné aux établissements d'instruction générale conduisant à l'Université, mais il a également fait étudier l'enseignement mathématique dans les écoles techniques ou professionnelles. Ces établissements ont, en effet, une importance croissante; il y avait donc lieu d'accorder une attention toute spéciale à l'enseignement mathématique qui s'y donne.

Le Comité central a donc entrepris une étude d'ensemble de l'enseignement mathématique dans les différents types d'écoles et à ses divers degrés. Il s'agit d'une *étude objective destinée à présenter l'état actuel et les tendances modernes de cet enseignement*. Comme on l'a dit dans les réunions de Bruxelles et de Milan, la Commission ne cherche nullement à uniformiser l'enseignement mathématique, mais avant tout à mettre en lumière les tendances modernes. La Commission ne peut et ne veut rien imposer, mais ses travaux permettront aux professeurs de savoir ce qui se fait dans les nations voisines et ils les renseigneront aussi sur l'organisation de son propre pays. La comparaison des documents et l'étude des expériences faites ailleurs contribueront à réaliser de nouveaux progrès dans tous les domaines de l'enseignement mathématique.

Le *plan général des travaux* élaboré par le Comité central était destiné à servir de guide aux délégués et aux membres des

sous-commissions nationales, afin de leur donner des indications sur les principaux points à prendre en considération. Toutefois, en raison de la diversité même de l'organisation dans les différents pays, il n'était pas possible d'imposer un plan unique, s'adaptant à la fois aux conditions des divers pays. La plus grande liberté a donc été laissée aux rapporteurs.

Voici les titres des principaux objets signalés dans le « Rapport préliminaire » :

Première partie : *État actuel de l'organisation et des méthodes de l'instruction mathématique.* — I. Les divers types d'écoles. — II. But de l'instruction mathématique et branches d'enseignement. — III. Les examens. — IV. Les méthodes d'enseignement. — V. Préparation des candidats à l'enseignement.

Deuxième partie : *Les tendances modernes de l'enseignement mathématique.* — I. Les idées modernes concernant l'organisation scolaire. — II. Les tendances modernes concernant le but de l'enseignement et les branches d'études. — III. Les examens. — IV. Les méthodes d'enseignement. — V. La préparation des candidats à l'enseignement. — Remarque générale.

Les Rapports sommaires que présenteront les délégués à la Séance du 23 août indiqueront les points caractéristiques des travaux des sous-commissions nationales.

D. — Séances du Conseil central et de la Commission.

Le *Comité central* s'est réuni pour la première fois à Cologne, en septembre 1908; puis à Carlsruhe, au commencement d'avril 1909; à Bâle, fin décembre 1909; à Bruxelles en août 1910; à Milan en septembre 1911 et enfin dans les premiers jours de juillet 1912 à Hahnenklee, dans le Harz, auprès de son président, que des raisons de santé empêchent malheureusement d'assister au Congrès de Cambridge. Son absence sera vivement regrettée non seulement par les membres de la Commission, mais par tous les Congressistes.

En outre, de nombreux pourparlers ont eu lieu entre le Secrétaire général et les membres de la Commission.

Réunion de Bruxelles (9-10 août 1910). — Le Comité central a saisi l'occasion de l'Exposition universelle de Bruxelles pour organiser une réunion partielle de la Commission, à laquelle elle avait tout particulièrement invité les délégués des pays voisins. Son appel a rencontré le meilleur accueil auprès de la plupart des délégations. Onze pays se trouvaient représentés par plus de trente membres des sous-commissions nationales. Nous nous bornons à rappeler ici la brillante conférence de M. C. Bourlet (Paris) sur la pénétration réciproque des Mathématiques pures et des Mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire. Elle a été reproduite *in extenso* dans le Compte rendu détaillé ([1]), qui a été publié par le Secrétaire-général et qui comprend, en outre, un résumé des conférences organisées à l'exposition du 11 au 16 août 1910.

Réunion de Milan (18-21 septembre 1911). — La Commission a tenu sa première réunion plénière ([2]) à Milan, en septembre 1911, sous la présidence de M. le professeur Klein. En dehors des séances du Comité central et des Commissions spéciales, la réunion qui, en réalité, avait pris l'ampleur d'un véritable Congrès international de l'enseignement mathématique, comprenait quatre séances, dont la première était consacrée à la présentation des Rapports des sous-commissions nationales. Pour les deux séances suivantes, le Comité central a estimé qu'il était utile de concentrer le débat sur deux questions importantes concernant l'une l'enseignement moyen, l'autre l'enseignement supérieur. Les questions mises à l'ordre du jour à Milan étaient les suivantes :

A. I. Les Mathématiques dans l'enseignement moyen : *Dans quelle mesure peut-on tenir compte, dans les écoles moyennes* (lycées, collèges, gymnases, écoles réales, etc.), *de l'exposé systématique des Mathématiques?* II. *La question de la fusion des différentes branches mathématiques dans l'enseignement moyen.* — Rapport de la sous-commission A, par MM. Castelnuovo et Bioche. — Discussion.

([1]) Voir l'*Enseignement mathématique* du 15 septembre 1910.

([2]) Le compte rendu détaillé fait l'objet de la *Circulaire n°* 5 (75 pages), *Enseignement mathématique* du 15 nov. 1911.

B. *L'enseignement mathématique théorique et pratique destiné aux étudiants en Sciences physiques et naturelles.* — Rapport de la sous-commission B, par M. Timerding. — Discussion.

Mentionnons également la séance générale publique avec les belles conférences de M. le sénateur Colombo et de M. le professeur F. Enriques.

A la suite de l'extension considérable qu'ont pris ses travaux, la Commission ne voit pas la possibilité de donner à Cambridge une étude comparée des différents Rapports nationaux. Pour plusieurs pays les rapports ne sont du reste pas encore terminés. Dans sa réunion de Milan la Commission a donc estimé nécessaire de soumettre au 5e Congrès une proposition tendant à renouveler son mandat jusqu'au Congrès suivant.

Réunion de Cambridge (août 1912) et réunions ultérieures. — Les séances de la Commission ont été organisées sur le même plan que celles de Milan. Comme suite à la *question* A, l'ordre du jour comprend une discussion sur *l'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes* (rapporteur : M. D.-E. Smith). Tandis que pour la *question* B il convenait, après la discussion générale de Milan, de se limiter plus particulièrement, à *la préparation mathématique des physiciens* (rapporteur : M. C. Runge).

Au cas où le mandat de la Commission serait prolongé, le Comité central aborderait ensuite l'étude d'autres questions d'une importance fondamentale; elles seraient discutées dans des réunions à placer entre le 5e et le 6e Congrès international. Il apportera notamment une attention toute spéciale à la préparation théorique et pratique des professeurs de Mathématiques.

E. — Publication concernant la Commission.

Grâce au concours dévoué des membres des sous-commissions nationales, la Commission se trouve en possession d'un ensemble de documents fort précieux. Si nous nous bornons aux Rapports proprement dits sur l'enseignement mathématique dans les différents pays, leur nombre dépasse 280, répartis sur plus de 150 fas-

cicules ou volumes et représentant actuellement un ensemble de plus de 9000 pages in-8°.

Nous donnons ci-après la liste complète des publications parues jusqu'à ce jour ou actuellement en préparation.

Les Rapports sont terminés dans les pays suivants : Suède, Hollande, France, Suisse, Autriche, Japon, États-Unis, Iles Britanniques, Danemark (9 pays).

Sont en cours de publication les Rapports concernant l'Allemagne, la Belgique, l'Espagne, la Hongrie, l'Italie, la Norvège, la Roumanie et la Russie (8 pays).

Dans d'autres États, il se prépare également des Rapports. Nous pouvons déjà mentionner l'Australie, où notre délégué M. H. C. Carslaw, a entrepris une étude sur les Mathématiques dans les écoles moyennes et dans l'enseignement supérieur.

Cette vaste enquête sur l'état actuel et les tendances modernes de l'enseignement mathématique une fois terminée, il s'agira d'en tirer parti en la faisant connaître au corps enseignant et aux autorités intéressées. Dans une étude comparée de différents Rapports qui les concernent, les conférences ou sociétés de professeurs examineront les vœux et conclusions à transmettre aux autorités respectives, dans le but de faire progresser l'enseignement des Mathématiques.

Annexe : Résolution.

Dans sa séance générale du 27 août 1912, le 5e Congrès international des Mathématiciens a adopté à l'unanimité la résolution suivante, tendant à prolonger de quatre ans le mandat de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique, instituée par le précédent Congrès (Rome 1908) :

« *Le 5e Congrès international des Mathématiciens adresse ses remercîments aux gouvernements, aux institutions et aux personnes qui ont accordé leur aide à la Commission internationale de l'Enseignement mathématique;*

» *Décide de prolonger les pouvoirs du Comité central composé de MM.* F. Klein (*Gœttingue*), Sir G. Greenhill (*Londres*) *et* H. Fehr (*Genève*), *et, suivant la requête qui lui est adressée, d'adjoindre à ce Comité M.* David-Eugène Smith (*New-York*);

» *Prie les délégués de bien vouloir continuer leurs offices en s'assurant la coopération de leurs Gouvernements respectifs et en poursuivant leurs travaux;*

» *Et invite la Commission à présenter un rapport ultérieur au 6e Congrès international et à organiser dans l'intervalle telles réunions que les circonstances lui dicteront.* »

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ARRHENIUS (Svante). — *Die Verteilung der Himmelskörper.* In-8, 23 p. avec 2 fig. et 1 planche. Berlin, R. Friedländer et Sohn. 1 m. 20.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne, avec la collaboration de nombreux savants. Édition française. Rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de *Jules Molk:*

Tome II (vol. 1). Fonctions de variables réelles. Rédigée dans l'édition allemande sous la direction de *H. Burkhardt* et *W. Wirtinger.* Fasc. II, gr. in-8, 113-336 p. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr. 80.

— Tome IV (vol. 2). Mécanique générale. Rédigée pour ce qui concerne la Mécanique sous la direction scientifique de *Paul Appell.* Rédigée dans l'édition allemande sous la direction de *F. Klein* et *C. H. Müller.* Fasc. I, in-8, 224 p. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr. 80.

— Tome II (vol. 3). Développements en séries. Rédigée dans l'édition allemande sous la direction de *H. Burkhardt* et *W. Wirtinger.* 1 fasc. in-8, 160 p. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr.

FRICKE (Rob.) et KLEIN (Fel.). — *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen.* II. Bd. : Die funktionnentheoret. Ausführgn. u. die Anwendungen. 3 (Schluss-) Lfg. Direkte Beweismethoden der Fundamentaltheoreme u. Anh. Gr. in-8, XIV et 439-668 p. avec 14 fig. Leipzig, B. G. Teubner. 11 m.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LAUE (M.). — Das Relativitäts Prinzip. (*Die wissenschaft. Sammlung : naturwissenschaftlicher and mathematischer Monographien.* Heft 38.) Un vol. in-8, x-208 pages. Braunschweig, Fried. Wieweg und Sohn, 1911.

1. Peut-on, par des expériences faites *entièrement* à la surface de la Terre, déceler son mouvement de translation le long de son orbite? C'est une question d'une importance évidemment capitale pour la Philosophie naturelle. Une réponse affirmative prouverait l'existence, près de la surface de la Terre, d'une substance non entraînée par elle, et jouant un rôle dans les expériences; s'il s'agit d'expériences d'optique ou d'électricité, ce serait l'éther électromagnétique, déjà nécessaire comme support de l'énergie pendant ses voyages interstellaires, dont les mouvements d'ensemble par rapport à la Terre pourraient être étudiés. Une réponse négative, au contraire, exigera un effort d'adaptation des propriétés de l'éther à cette absence d'influence : les esprits qui ne redoutent pas le paradoxe pourront même aller jusqu'à nier l'existence d'un éther interstellaire, et se contenter d'écrire des équations compatibles avec les phénomènes observés, sans regarder ces équations comme représentant les propriétés d'une substance interstellaire. C'est là que nous en sommes aujourd'hui, et ce point de vue, nouveau qui excite un enthousiasme extraordinaire chez quelques-uns des plus pénétrants parmi les jeunes physiciens, provoque un certain effarement parmi les moins jeunes.

Retraçons rapidement les étapes de ce mouvement intellectuel, qui s'annonce comme une révolution profonde, non pas seulement ou même principalement dans notre Science, mais dans quelques-unes des idées fondamentales de l'humanité pensante, celles de temps et d'espace.

Pendant le cours du XIXe siècle, toutes les expériences d'optique et d'électricité qui paraissaient susceptibles d'être influencées par

le mouvement de translation de la Terre ont été effectuées avec une précision suffisante pour établir qu'aucune expérience, entièrement faite à la surface de la Terre, ne révèle d'influence du premier ordre, c'est-à-dire de $\frac{1}{10000}$, rapport de la vitesse de translation de la Terre sur son orbite à la vitesse de la lumière. Si singulier que fût ce résultat, il n'entraînait aucun remaniement de nos idées fondamentales. Deux explications en ont été proposées : l'une, la plus simple à première vue, serait que la Terre entraîne l'éther, et qu'à petite distance de sa surface, il n'y a pas de mouvement relatif; il faut alors se faire une idée des mouvements de l'éther un peu plus loin, pour comprendre l'aberration astronomique; suggérée par Stokes, cette hypothèse a paru exiger pour l'éther des propriétés peu vraisemblables, et n'a pas été prise au sérieux ([1]). La seconde explication, celle de Lorentz, s'est adaptée sans difficultés analytiques à tous les phénomènes du premier ordre grâce à l'emploi du *temps local;* c'est celle qui suppose l'éther rigoureusement immobile. A la vérité, il faut bien y ajouter des propriétés beaucoup plus invraisemblables que celles qui ont fait rejeter la première explication, par exemple, la perméabilité parfaite de cet éther immobile à la matière ordinaire, et aux électrons; mais ce sont des difficultés qu'on oublie volontiers, parce qu'elles simplifient toute la mise en équations, et que d'ailleurs elles ressemblent à d'autres conventions auxquelles on est habitué depuis longtemps. Donc, pour les phénomènes *du premier ordre*, théorie et observations étaient mises entièrement d'accord.

2. Entre temps, Michelson avait imaginé et réalisé une expérience d'interférences du *deuxième ordre* (sensibilité 10^{-9}), dont le résultat négatif stupéfia tous les physiciens. L'expérience ayant été reprise avec plus de sensibilité encore par Michelson et Morley, l'absence d'influence fut confirmée; une autre expérience optique, exécutée par Lord Rayleigh, puis par Brace avec plus de sensibilité, une expérience d'électrostatique réalisée par Trouton et Noble, ne laissèrent aucun doute : *La translation de la Terre n'exerce aucun effet du second ordre* (10^{-9} à 10^{-10}) *sur les phénomènes électro-optiques qui se passent entièrement à sa surface.*

([1]) *Voir* LORENTZ, *The theory of electrons*, Chap. V, 1909, p. 146-149.

Avec la théorie simple de Lorentz, la contradiction était formelle. Que faire?

La première hypothèse, celle de l'entraînement de l'éther par la Terre, restait la plus simple; c'est à ce moment que Planck avait communiqué à Lorentz des remarques qui rendent l'hypothèse de Stokes cohérente; il faut supposer l'éther *gazeux très compressible, et pesant*, de manière qu'il ait au voisinage de la Terre une densité *cent mille* fois plus grande qu'au loin, par exemple; en même temps, s'il ne cède pas aux attractions moléculaires à petite distance, il n'est pas entraîné d'une manière appréciable par les corps de petite dimension, conformément à l'expérience de Fizeau. Alors l'hypothèse de Stokes-Planck coordonne tout; « du moins, j'ai été incapable d'y découvrir une contradiction », déclare Lorentz dans le Mémoire qu'il a consacré à l'examen de cette théorie, bien qu'il préfère la théorie de l'éther immobile, comme Planck aussi d'ailleurs. Notons donc qu'il s'agit d'une préférence de sentiment.

Si l'on renonçait à l'hypothèse de Stokes, il fallait compléter et remanier l'hypothèse de Lorentz. Fitz Gerald, à Dublin, et Lorentz, à Leyde, remarquèrent, presque en même temps, que toutes les expériences s'expliqueront, si l'on admet que la translation à travers l'éther provoque *dans tous les corps* une contraction longitudinale égale à $\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$, sans changement transversal, u étant la vitesse de translation et c la vitesse de la lumière. Cette hypothèse un peu singulière par son caractère géométrique, et non dynamique, permet de ramener toute la théorie à un simple changement de variables, et à un changement de fonctions corrélatif. Indiquons seulement le changement de variables; x', y', z', t' correspondent au système entraîné avec la vitesse u suivant l'axe des x'; x, y, z, t correspondent à un système identique immobile par rapport aux axes

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = \mathrm{K}(x - ut); \qquad y' = y; \qquad z' = z; \\ t' = \mathrm{K}\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \qquad \mathrm{K}^2 = \dfrac{c^2}{c^2 - u^2}. \end{cases}$$

C'est l'introduction du facteur K dans x' et dans t' qui distingue ce changement de variables de celui qui suffisait pour les phénomènes du premier ordre, et résultait des notions courantes en cinématique classique.

On peut alors trouver des fonctions du champ électrique,

du champ magnétique et de $\frac{u}{c}$, qui satisfont en x', y', z', t' aux mêmes équations différentielles que le champ électrique et le champ magnétique en x, y, z, t. Dans toute expérience électro-optique, ces fonctions joueront le même rôle que le champ électrique et le champ magnétique, et rien ne permettra de reconnaître le mouvement des axes de référence. Mais il faut supposer qu'une propriété universelle des corps ordinaires, ou de leurs relations avec l'éther immobile, exige l'introduction du facteur K; hypothèse bien plus extraordinaire que celle d'un éther compressible et pesant! car la transformation devient imaginaire et perd toute signification physique si la vitesse de translation u est supposée supérieure à la vitesse de la lumière c. C'est au moment où les expériences nous montrent des électrons lancés avec des vitesses supérieures à $0,9\,c$, qu'on nous propose une théorie qui donne à la vitesse de la lumière le caractère d'une limite maximum infranchissable! Bien entendu, cette étrangeté n'implique aucune contradiction; la théorie se développe avec rigueur à partir de ses hypothèses initiales.

Ainsi nous avons le choix entre deux hypothèses, qui, on peut le dire, heurtent toutes deux le sens commun tel que la tradition physique l'a développé chez la plupart d'entre nous; mais qui, toutes deux, permettent la construction d'un symbolisme mathématique sans contradictions internes.

Si l'on adopte la première hypothèse, éther entraîné, l'aberration astronomique et l'expérience de Fizeau imposent à l'éther certaines propriétés singulières.

Si l'on adopte la seconde, éther immobile, l'absence d'influence du deuxième ordre de la translation de la Terre impose d'autres propriétés non moins singulières de l'éther et de la matière.

C'est là, à mon avis, tout ce qu'on a le droit d'affirmer. Il y a dans chaque cas une hypothèse au début de la théorie.

Rien ne prouve qu'on n'en puisse pas proposer d'autres, par exemple une immobilité de l'éther au premier ordre, avec entraînement proportionnel au carré de la vitesse, ou d'autres encore. Mais ce n'est qu'un desideratum non satisfait encore [1].

---

[1] *Voir*, pour une discussion plus détaillée, M. Brillouin : *Propos sceptiques sur le principe de relativité électro-optique* (*Rivista di Scienza*).

3. On en était là, en 1905, et l'élégance du développement mathématique de la théorie n'en dissimulait pas l'étrangeté foncière, lorsque soudain tout changea. Les physiciens se sentaient incapables d'imaginer de nouvelles expériences, purement terrestres, à la fois assez différentes en principe de celles déjà essayées pour n'être pas vouées d'avance à l'insuccès, et assez délicates pour être sensibles au cent-millionième (10^{-8}); l'opinion s'établissait que *les expériences purement terrestres ne peuvent pas révéler le mouvement de translation de la Terre sur son orbite;* mais c'était un sentiment d'impuissance technique et de découragement provisoire, ne préjugeant rien pour un avenir éloigné.

Avec la tranquille audace de la jeunesse, Einstein proposa, en 1905, d'admettre cet énoncé dans toute sa généralité, comme un principe fondamental de Philosophie naturelle : *Il est impossible par quelque moyen que ce soit de mettre en évidence d'autres mouvements de translation rectiligne et uniforme que les mouvements* RELATIFS *de deux systèmes* MATÉRIELS; ou encore : aucune expérience exécutée sur un système limité ne peut faire reconnaître si ce système est en repos ou animé d'une translation rectiligne et uniforme quelconque.

Les expériences n'établissent pas un principe d'une telle généralité; elles ne peuvent que le suggérer. C'est d'ailleurs par de semblables coups d'audace qu'ont été introduits, dans la Science, les principes qui nous semblent les plus solides, et qui ont reçu plus tard les confirmations les plus éclatantes et les plus nombreuses. Mais il nous semble, à distance, qu'on pouvait dès le début concevoir des expériences nombreuses et diverses, réalisables avec une précision suffisante pour donner rapidement des réponses confirmatives du principe proposé, ou en opposition avec lui. Tel n'est pas le cas pour le nouveau principe, du moins jusqu'à présent. En dehors des expériences électro-optiques du deuxième ordre, du type de celles de Michelson, Rayleigh et Trouton, aucun phénomène ne paraît capable de révéler l'exactitude ou la fausseté des modifications que le nouveau principe apporte à leur théorie, car ces modifications restent bien inférieures (1000 à 100000 fois) aux plus extrêmes limites de sensibilité des expériences. Dire, comme les fervents adeptes de la nouvelle théorie, d'abord qu'aucun phénomène connu ne la contredit; ensuite, que tous la confirment,

c'est user plus en avocat qu'en homme de science du fameux adage « qui ne dit mot consent », et oublier, en particulier, la gravitation universelle qui continue à défier les efforts tentés pour la faire entrer dans une doctrine plus générale.

4. La première conséquence du principe de relativité, c'est que *la vitesse de la lumière par rapport à un système matériel* est indépendante de la vitesse de translation rectiligne et uniforme dont il est animé.

Deux systèmes A et B étant en mouvement de translation rectiligne et uniforme u l'un par rapport à l'autre, mouvements relatifs accessibles à l'expérience, si l'on mesure la vitesse de la lumière c_A par une expérience entièrement entraînée avec le système A, et la vitesse c_B par une expérience entièrement entraînée avec le système B, les deux mesures donnent le même nombre. C'est bien ce que les expériences nous apprennent jusqu'aux termes de l'ordre de $\frac{u^2}{c^2}$; mais on l'admet désormais d'une manière absolue. Et cela conduit immédiatement à la transformation de Lorentz (1), pour établir la correspondance entre les deux systèmes A et B.

L'interprétation, toutefois, en est un peu différente; x' et t' sont désormais la *vraie* longueur et le *vrai* temps dans le système auquel ils se rapportent. L'observateur de A compte le temps autrement que l'observateur de B, mais, cependant, ils n'ont aucun moyen de s'en apercevoir; s'ils essayent de régler leurs chronomètres l'un sur l'autre, à l'aide de signaux optiques ou électriques, ils adopteront comme synchrones ces deux allures différentes; dans l'ancien langage de Lorentz Fitz-Gerald, ils auront l'illusion du synchronisme; dans le langage de la théorie de la relativité, ils seront réellement d'accord, et aucun échange de signaux, de quelque nature qu'ils soient, ne pourra révéler un désaccord; leurs chronomètres, s'ils sont de construction identique, prendront spontanément l'un dans le système A, l'autre dans le système B, en mouvement relatif, ces deux marches que nous appelons différentes, mais que tous les phénomènes leur montreront équivalentes; de même, toute règle matérielle prend naturellement la longueur qu'indique le changement de variables. C'est une profonde modification de nos notions géométriques et cinématiques accoutumées;

M. Langevin l'a exposée avec une remarquable clarté dans une Communication au Congrès de Bologne, parue dans la *Rivista di Scienza* de 1911 sous le titre l'*Évolution du temps et de l'espace*.

5. Pour passer d'un système A à un autre B, en mouvement relatif de translation rectiligne et uniforme, le changement de variables porte à la fois sur les quatre variables x, y, z, t; bien que t y joue encore un rôle distinct, il y a avantage à raisonner sur la multiplicité à quatre dimensions x, y, z, t, plutôt que sur l'espace x, y, z et le temps, dès que la translation relative a une orientation arbitraire.

C'est ce que le regretté Minkowski, de Göttingen, a mis en évidence dans un beau travail mathématique qui a été le point de départ d'études nombreuses et importantes, pleines d'aperçus imprévus des physiciens et des rapprochements curieux. A cette multiplicité, qui embrasse d'un seul coup d'œil le passé, le présent, et l'avenir d'un système physique, Minkowski a donné le nom d'*Univers;* il y faut distinguer des vecteurs à quatre coordonnées, analogues à nos vecteurs spatiaux, et d'autres à six coordonnées analogues à nos axes de rotation. Les trois composantes du champ magnétique sont, dans cet univers, les six composantes d'un même *vecteur d'univers sextuple*. Les trois composantes de la force ordinaire et la quantité de mouvement sont les quatre composantes du *vecteur d'univers quadruple* de la dynamique du point.

Ces quelques indications suffisent pour montrer que le langage des relativistes est profondément différent de notre langage habituel; s'il ne modifie pas les faits, bien entendu, il modifie la manière de les grouper et de les interpréter. A la vérité, une partie de ces modifications est purement verbale et entièrement dénuée d'intérêt pour un expérimentateur; mais quelques notions, qui deviennent intuitives pour le relativiste habitué au nouveau langage, ne s'expriment que péniblement dans notre langage habituel; certaines analogies, qui s'imposent quand on raisonne sur l'*Univers* de M. Minkowski, paraissent tout à fait artificielles dans l'espace ordinaire.

C'est tout ce langage nouveau qu'on trouvera clairement exposé dans le Livre de M. Laue, avec les applications qu'on en peut faire

à l'Électromagnétisme du vide et des corps pondérables, à la Dynamique et à la Thermodynamique.

Un premier Chapitre de 18 pages, qui définit la position du problème, est suivi d'un autre très bref (8 pages) relatif aux anciennes théories de l'Électrodynamique des corps en mouvement. Ayant ainsi rappelé, très sommairement, les difficultés auxquelles les anciennes théories étaient acculées, M. Laue entre dans le vif du sujet, au troisième Chapitre : Théorie de la relativité, partie cinématique. — Transformation de Lorentz. — Cinématique d'Einstein. — Interprétation géométrique de la transformation de Lorentz, par Minkowski. — La transformation de Lorentz considérée comme une rotation imaginaire dans la multiplicité x, y, z, t.

Les particularités géométriques de cette multiplicité sont étudiées au Chapitre IV : Weltvectoren und Welttensoren. — Vecteurs quadruples; vecteurs sextuples; opérations algébriques sur ces vecteurs; opérations différentielles; tenseurs d'*univers*.

Nous sommes arrivés aux $\frac{2}{3}$ du Livre; les principes sont clairement exposés; le langage est fixé : il ne reste plus qu'à s'en servir. Dans le cinquième Chapitre se trouve toute l'Électrodynamique du vide, avec une étude approfondie de la Dynamique de l'électron : dans le sixième, l'Électrodynamique des corps pondérables; dans le septième, la Dynamique et la Thermodynamique.

Tout se présente sous une forme claire et dans une belle ordonnance; les conséquences du nouveau point de vue s'offrent d'elles-mêmes : inertie de l'énergie; proportionnalité du volume, de l'énergie, de la quantité de chaleur, de la température absolue, au facteur $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$; etc.

6. Grâce à ce procédé d'exposition, le Livre de M. Laue est à la fois très plein, très clair et très court. A vrai dire, cette clarté et cette brièveté, qui rendent très facile d'*apprendre* la théorie de la relativité dans le Livre de M. Laue, ont bien un inconvénient pour ceux qui ne sont pas de vieux routiers de la Physique. Tout ce qui vient dans le Livre après les premiers Chapitres paraît être sous la domination du nouveau principe de relativité, à l'exclusion de celui plus simple de la Mécanique classique : tous les phénomènes qui dépendent au premier ordre seulement de la vitesse de translation, aussi bien que ceux du second ordre; toutes les interpré-

tations étranges et nouvelles qui sont entrées dans le langage courant des initiés sans être susceptibles d'aucune consécration expérimentale, aussi bien que celles sur lesquelles l'expérience a prise sans avoir atteint encore une suffisante précision. Cela produit un effet de *trompe-l'œil* dont il faut se méfier. Il m'est impossible de m'associer à des phrases telles que celles-ci : « Il faut combattre une erreur dont l'origine provient du développement historique de cette théorie : à savoir que la théorie de la relativité serait plus étroitement rattachée à l'Électrodynamique qu'à la Mécanique. Que la transformation de Lorentz ait été déduite de la considération des phénomènes électromagnétiques, cela provient uniquement de la circonstance que nous ne connaissons pas les lois naturelles de la Mécanique avec une précision suffisante : sans quoi nous aurions pu tout aussi bien employer une telle loi comme point de départ. » Certes, si la Mécanique permettait des mesures assez précises *et si ces mesures concordaient avec les affirmations tirées du principe de relativité!* Mais cela, *nous n'en savons rien*, précisément faute de précision, et c'est un simple postulat, qui reste encore à démontrer. Et une vraie démonstration expérimentale ne paraît pas facile sans faire appel à d'autres postulats.

On est étonné quand on voit avec quelle facilité des habitudes de langage se transforment en croyances : il est de langage courant actuellement que la masse de l'électron est entièrement électromagnétique ; en fait, nous n'en savons rien du tout ; d'abord, ne voyant pas l'électron, nous ne savons pas si sa charge doit être regardée comme distribuée en surface, ou en volume, uniformément ou non ; l'électron de Lorentz, celui de Max Abraham, celui de Langevin et celui de la théorie de la relativité subissent des modifications théoriques de formes différentes en raison de leur translation ; à chacun d'eux correspond une loi différente de variation de l'inertie électromagnétique longitudinale et transversale en fonction de la vitesse ; il faudrait bien savoir de quelle inertie électromagnétique on parle, pour oser affirmer qu'aucune inertie mécanique ne s'y ajoute ! Tout ce qu'on sait, parce que l'expérience l'a montré, c'est que l'inertie de l'électron croît très rapidement avec la vitesse, et que son inertie transverse est moindre que son inertie longitudinale aux vitesses modérées ($< 0,9c$), ce en quoi toutes les théories concordent ; mais suivant quelle loi ?

N'écrivant pas ici pour des physiciens, qui savent, ou doivent savoir, les limites d'exactitude de leurs affirmations trop concises, il m'a paru nécessaire de mettre en garde les mathématiciens contre l'illusion que certaines d'entre elles pourraient faire naître, et distinguer ce que l'expérience a établi ou confirmé, de ce sur quoi elle n'a encore rien pu dire. Mais, pour revenir au Livre de M. Laue, ces critiques ne s'appliquent qu'à quelques phrases de sa Conclusion. Tout le Livre est du plus haut intérêt et de la plus parfaite clarté.

En attendant que M. Langevin publie les leçons qu'il a faites sur ce sujet, et qui donneraient en français l'exposé complet de la question au point de vue expérimental aussi bien qu'au point de vue théorique, tout savant curieux de s'instruire de ce difficile sujet n'a rien de mieux à faire que d'étudier l'excellent Livre de M. Laue.

MARCEL BRILLOUIN.

CARVALLO (E). — LE CALCUL DES PROBABILITÉS ET SES APPLICATIONS. Un vol. gr. in-8. IX-169 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

En 1843, dans la Préface de son *Exposition de la théorie des Chances et des Probabilités*, Augustin Cournot s'exprimait ainsi : « Je me suis proposé deux buts dans cet Ouvrage : d'abord de mettre à la portée des personnes qui n'ont pas cultivé les hautes parties des Mathématiques, les règles du calcul des probabilités, sans lesquelles on ne peut se rendre un compte exact, ni de la précision des mesures obtenues dans les sciences d'observation, ni de la valeur des nombres fournis par la statistique, ni des conditions de succès de beaucoup d'entreprises commerciales; en second lieu, j'ai voulu rectifier des erreurs, lever des équivoques, dissiper des obscurités dont il m'a paru que les Ouvrages des plus habiles géomètres, sur ce sujet délicat, n'étaient point exempts. Comme les erreurs ou les obscurités portent sur les principes du calcul bien plus que sur les déductions purement mathématiques, j'ai pensé que ces deux buts pouvaient se concilier, et que, sans faire un Livre exclusivement à l'usage des géomètres, je ne man-

querais pas d'occasions de placer des remarques utiles à ceux d'entre eux pour qui cette théorie a de l'attrait, ne fût-ce que comme spéculation purement philosophique. »

M. Carvallo eût pu transcrire, en tête de son propre Livre, ces paroles qui caractérisent aussi les buts qu'il poursuit et qu'il veut atteindre autrement que Cournot. L'expérience pédagogique lui a montré que la belle *Exposition* reste incompréhensible pour les personnes qui ne manient pas avec facilité l'instrument mathématique; aussi entend-il changer de méthode : il se propose de faire *comprendre* les idées et les applications du Calcul des Probabilités et non d'en *prouver* les règles. Commence-t-on d'ailleurs par mettre entre les mains d'un enfant un *Traité* d'Arithmétique, aux démonstrations abstraites? Certes non, on ne le fait qu'après que l'élève a été familiarisé avec le sujet, pendant bien des années, par des *Leçons* primaires où l'on s'est limité à l'enseignement intuitif, expérimental, par l'exemple. Ainsi procède M. Carvallo qui, en Angleterre, eût intitulé son Ouvrage *A Primer in Calculus of Probabilities*.

Le Livre séduit d'abord par sa brièveté, car, si l'on défalque une portion de Chapitre qui n'est pas indispensable aux personnes n'ayant en vue que les applications à la Statistique, le nombre des pages n'atteint pas 150.

Il est divisé en quatre Sections.

Dans la première Section, après avoir exposé les notions fondamentales, l'Auteur, n'envisageant que le cas des épreuves nombreuses, explique le parti qu'on peut tirer alors de la formule de Stirling, et montre le sens, la portée et l'usage du théorème de Jacques Bernoulli. En termes abstraits, voici le résultat fondamental : Si l'on considère un événement A qu'on puisse réitérer indéfiniment dans les mêmes conditions, la probabilité p de son arrivée et la probabilité $q = 1 - p$ de sa non-arrivée restant toujours les mêmes, on peut être assuré que, si le nombre N des épreuves est très grand, l'événement A se produira un nombre n de fois, tel qu'il y ait peu de différence entre p et $\frac{n}{N}$; si t est une valeur quelconque, il y a une probabilité égale à

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

que, sur les N épreuves, A se produise un nombre n de fois tel que

$$p - t\sqrt{\frac{2pq}{N}} < \frac{n}{N} < p + t\sqrt{\frac{2pq}{N}}.$$

Mais, à cette sèche formule dogmatique, M. Carvallo substitue une exposition vivante où il introduit graduellement la notion d'écart d'une série d'épreuves, la loi des probabilités des écarts, traduite en Table numérique, puis en *graphique* (courbe t, Θ); et l'usage de cette loi jointe à la notion d'écart étalon $\left(e = \sqrt{\frac{2pq}{N}}\right)$.

La Section s'achève par l'examen des limites du domaine de validité d'application de la loi de Bernoulli.

La deuxième Section, qui est la plus étendue, est consacrée à la méthode statistique. Une question posée par M. Mach au concours des Statisticiens du Ministère du Travail en 1907, et concernant les écarts de la statistique sur les naissances des deux sexes, fournit un exemple de la méthode à suivre pour étudier les écarts d'une série statistique et juger la série: l'Auteur entre dans les plus petits détails en ce qui concerne la distribution des écarts, la comparaison graphique de la distribution observée à la distribution théorique de Bernoulli et les conclusions qu'on peut tirer de cette comparaison. La même question est l'occasion d'une étude personnelle approfondie sur la masculinité dans les naissances humaines, où l'on trouve des observations nouvelles et concluantes, communiquées l'an dernier par l'Auteur à la Société mathématique de France. La statistique de la mortalité est précieuse à examiner de près en vue de l'établissement des Tables de mortalité qui servent de base aux assurances sur la vie : elle est l'objet d'un exposé complet, tout à fait au courant. Enfin, les écarts dans les mesures expérimentales donnent lieu à une fine analyse à propos de deux exemples : une série d'observations astronomiques (déclinaison d'une étoile) et une série de mesures de la taille des conscrits en France. « Le second exemple fournit deux enseignements nouveaux. D'une part, l'insuffisance des données donne l'occasion d'utiliser la fécondité des ressources offertes par la loi de Bernoulli pour modifier, suivant les besoins, les détails d'application de la méthode statis-

tique exposée plus haut. D'autre part, les résultats montrent comment une fraude est révélée et même mesurée par la méthode. »

La troisième Section s'occupe de l'ajustement des écarts observés avec les écarts théoriques réglés par la loi de Bernoulli : la question de la taille des conscrits en a d'ailleurs déjà fourni un échantillon. Cet ajustement (qui équivaut à substituer une courbe régulière, sans jarrets, à la ligne ondulée qui passerait par des points définis par l'observation) ne se fait pas arbitrairement. Deux règles empiriques ont été données, l'une par Cauchy, l'autre par Legendre; une troisième règle, due à Gauss, est basée sur le calcul des probabilités. Toutes trois sont soigneusement présentées. Ici, par exception, l'Auteur donne les démonstrations mathématiques, « parce qu'elles sont faciles et peu répandues dans les traités classiques. » A signaler, en particulier, un exposé de l'application de la méthode des différences pour les calculs d'ajustement, due à Cauchy; il y a bien longtemps que M. Carvallo a simplifié ce procédé qu'il a eu plus tard à utiliser pratiquement.

La quatrième et dernière Section est intitulée : « Les limites du calcul des probabilités et les abus qu'on en a faits. » Pour brève qu'elle soit, elle contient de précieuses notions qui épargneront aux lecteurs de se laisser surprendre par les paradoxes offerts par les problèmes mal posés, comme ceux de probabilité géométrique et surtout ceux de probabilité des décisions judiciaires. L'Opuscule se termine par la recherche des causes : le problème de Bayes relatif à la probalilité des causes est accompagné d'exemples de l'application incorrecte de sa solution, qui rendront prudent dans son emploi.

Voilà pour la substance du Livre, et cela suffit à marquer son originalité. Quant à la forme, elle est alerte et entraînante. Aussi peut-on prédire de l'Ouvrage de M. Carvallo que les futurs statisticiens le liront sans effort et les philosophes sans ennui, les uns et les autres avec fruit.

A. Boulanger.

ANNUAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES POUR L'ANNÉE 1913. 1 vol. in-16. VI-707 + A.1-A.28 — B.1-B.52 + C.1-C.16 + D.1-D.25 pages. Paris. Gauthier-Villars.

Cet excellent Recueil renferme cette année d'abord des documents astronomiques, puis des Tableaux relatifs à la Métrologie, aux Monnaies, à la Géographie et à la Statistique.

Signalons les principales modifications apportées à la *Partie astronomique*. Comme en 1912, les matières ont été présentées dans un ordre plus rationnel. M. H. Andoyer a refondu entièrement la rédaction des notions fondamentales de l'Astronomie et a revisé les Tableaux numériques correspondants. M. Rocques Desvallées a rédigé les notions indispensables sur les calendriers en usage chez les divers peuples civilisés. On a inséré, pour le calcul des hauteurs par les observations barométriques, les Tables publiées par M. Angot dans les *Annales du Bureau central météorologique* et adoptées par la Commission internationale d'aérostation scientifique. M. P. Puiseux était tout indiqué pour rédiger l'Article sur la constitution physique de la Lune. M. Schulhof a donné une Notice très détaillée sur les comètes apparues en 1911. M. G. Bigourdan a revu et étendu le Tableau des parallaxes stellaires, de façon à présenter l'ensemble des résultats les plus récents.

Il importe de faire remarquer que le temps est compté de 0^h à 24^h, conformément à la loi du 9 mars 1911.

A la fin du Volume, on lira avec intérêt :

D'abord, deux Notices scientifiques, l'une, due à M. G. Bigourdan, *sur l'Éclipse de Soleil du 17 avril* 1912; l'autre, rédigée par le Commandant Ferrié, *sur l'Application de la Télégraphie sans fil à l'envoi de l'heure;*

Ensuite les beaux Discours prononcés aux Funérailles de M. R. Radau et de M. Henri Poincaré.

Ce Livre, qui contient les constantes usuelles, convient à toutes les personnes qui s'occupent d'Astronomie et de Physique.

ER. L.

LEHMANN (P.). — BEITRÄGE ZUR THEORIE DER DARSTELLUNG DER STETIGEN FUNKTIONEN DURCH REIHEN VON GANZEN RATIONALEN FUNKTIONEN. (*Inauguraldissertation der hohen philosophischen Fakultät der vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg zur Erlangung der Doktorwürde*). 1 brochure in-8°, 66 pages. Dresden, B. G. Teubner, 1910.

La méthode de M. Borel pour la représentation des fonctions continues dans un intervalle $(0, a)$ consiste à déterminer des fonctions $\varphi_{pq}(x)$, telles que, si l'on pose

$$\Phi_q = \frac{1}{a}\sum_{p=0}^{q} f\left(\frac{pa}{q}\right)\varphi_{pq},$$

la série $\Sigma(\Phi_q - \Phi_{q-1})$ représente $f(x)$ dans l'intervalle considéré.

Si l'on peut déterminer dans cet intervalle des polynomes $P_{pq}(x)$, tels que $|\varphi_{pq} - P_{pq}| < \frac{1}{q^2}$, la série $\Sigma(\Pi_q - \Pi_{q-1})$ représentera $f(x)$, en posant

$$\Pi_q(x) = \frac{1}{a}\sum_{p=0}^{q} f\left(\frac{pa}{q}\right) P_{pq}(x).$$

L'Auteur donne différentes représentations des fonctions P_{pq} au moyen des fonctions sphériques adjointes, des fonctions sphériques généralisées, des polynomes de Jacobi. Puis il développe les φ_{pq} en série de polynomes d'Hermite (le terme général tendant vers zéro comme $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$) et en séries de fonctions T de Sonine; enfin il donne une représentation trigonométrique des φ_{pq}.

Le Mémoire se termine par une généralisation de la méthode de M. Borel, les points de division de l'intervalle étant alors arbitraires, et par des rapprochements entre cette méthode et celles qu'ont employées d'autres auteurs.

M. GEVREY.

ERRATUM.

Dans l'analyse de l'Ouvrage de MM. Heywood et Fréchet, n° d'Août 1912, page 242, ligne 15, le lecteur est prié, à la suite de : $V = \text{const.}$ pour, *de lire* 3° *au lieu de* 4°.

MÉLANGES.

LA COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE DE 1908 A 1912 (1).

PAR M. H. FEHR,
Secrétaire général de la Commission.

DEUXIÈME PARTIE (2).

Liste des principales publications du Comité central et des Sous-commissions nationales.

PUBLICATIONS DU COMITÉ CENTRAL.

Première série : 1908 à 1911, rédigées par H. FEHR, Secrétaire-général de de la Commission. — 1 vol. de 200 pages; 5fr; Georg et Cie, Genève.

1. *Rapport préliminaire* sur l'organisation de la Commission et le plan général de ses travaux (*Ens. math.*, numéro de novembre 1908). [16 pages].
2. *Circulaire n° 1* : Constitution de la Commission. — Sous-commissions nationales (*E. M.*, numéro de mai 1909. [12 pages].
3. *Circulaire n° 2* : Nouveaux membres. — Sous-commissions nationales. État des travaux au commencement de 1910 (*E. M.*, mars 1910). [16 pages].
4. *Circulaire n° 3* : Réunion de Bruxelles. Compte rendu des séances de la Commission et des conférences sur l'enseignement scientifique et sur l'enseignement technique moyens faites à Bruxelles du 10 au 16 août. Conférence de M. C. BOURLET sur la pénétration réciproque des Mathématiques pures et des Mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire (*E. M.*, numéro de septembre 1910). [63 pages].

---

(1) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1re Partie, n° de novembre 1912, p. 34[illegible].

(2) La Librairie GEORG et Cie, Genève et Bâle, se charge de fournir toutes les publications concernant la *Commission internationale de l'enseignement mathématique*.

5. *Circulaire n° 4* : État des travaux au 1er mars 1911 (*E. M.*, mars 1911). [16 pages].

6. *Circulaire n° 5* : Compte rendu du Congrès tenu à Milan du 18 au 21 septembre 1911 (*E. M.*, numéro de novembre 1911). [75 pages] :

Rapport de la sous-commission A : 1. la question de la rigueur dans l'enseignement moyen ; 2. la fusion des différentes branches mathématiques. Rapporteurs : MM. Castelnuovo et Bioche. — Annexe : Note de M. Young (Chicago).

Rapport de la sous-commission B : l'enseignement mathématique destiné aux étudiants en Sciences physiques, en Sciences naturelles, etc. Rapporteur : M. Timerding.

Sull'insegnamento matematico nelle scuole per gli ingegneri. Par le Prof. Colombo.

Mathématiques et Théorie de la connaissance. Par le professeur F. Enriques.

SOUS-COMMISSIONS NATIONALES.

Allemagne.

A. — Berichte und Mitteilungen

veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. Herausgegeben von W. Lietzmann. In zwanglosen Heften. gr. 8. Steif geh. (B. G. Teubner, Leipzig).

I. Fehr, H., Vorbericht über Organisation und Arbeitsplan der Kommission. Deutsche Uebersetzung von W. Lietzmann. [S. 1-10.] 1909. M. —.30.

II. Noodt, G., Ueber die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preussen. [S. 11-32.] 1909. M. —.80.

III. Klein, F., und H. Fehr, Erstes Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. [S. 33-38.] 1909. M. —.20.

IV. Klein, F., und H. Fehr, Zweites Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann sowie P. Zühlke, Mathematiker und Zeichenlehrer im Linearzeichenunterricht der preussischen Realanstalten. [S. 39-54.] 1910. M. —.50.

V. Lietzmann, W., Die Versammlung in Brüssel. Nach dem von H. Fehr verfassten dritten Rundschreiben des Hauptausschusses. [S. 55-74.] 1911. M. —.60.

VI. Fehr, H., Viertes Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. [S. 75-88.] 1911. M. —.50.

VII. Lietzmann, W., der Kongress in Mailand vom 18. bis 20 Sept. 1911, sowie Schimmack, R., Ueber die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts. [S. 89-126.] 1912. M. 1.60.

B. — Abhandlungen

über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. Herausgegeben von

F. Klein. — 5 Bände, in einzeln käuflichen Heften. gr. 8. Steif geh. (B. G. Teubner, Leipzig).

Erster Band. — *Die höheren Schulen in Norddeutschland.* Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Heft : Lietzmann, W., Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. [XII u. 102 S.] 1909. M. 2.

2. Heft : Lietzmann, W., Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preussen. Mit 18 Figuren. [VIII u. 204 S.] 1910. M. 5.

3. Heft : Lorey, W., Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preussen und einigen norddeutschen Staaten. [V u. 118 S.] 1911. M. 3.20.

4. Heft : Thaer, A., N. Geuther und A. Böttger, Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte, Mecklenburgs und Oldenburgs. [VI u. 93 S.] 1911. M. 2.

5. Heft : Schröder, J., Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts und den höheren Mädchenschulen, insbes. in Norddeutschland. (Unter der Presse.)

Zweiter Band. — *Die höheren Schulen in Süd- und Mitteldeutschland.* Mit einem Einführungswort von P. Treutlein.

1. Heft : Wieleitner, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten sowie die Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte im Königreich Bayern. Mit einem Einführungswort von P. Treutlein. [XII u. 85 S.] 1910. M. 2.40.

2. Heft : Witting, A., Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen. [XII u. 78 S.] 1910. M. 2.20.

3. Heft : Geck, E., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Württemberg. [IV u. 104 S.] 1910. M. 2.60.

4. Heft : Cramer, H., Der mathematische Unterricht an den höh. Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Baden. [IV u. 48 S.] 1910. M. 1.60.

5. Heft : Schnell, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Hessen. [VI u. 51 S.] 1910. M. 1.60.

6. Heft : Hossfeld, Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten Thüringens nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren. [IV u. 18 S.] 1912. M. 0.80.

7. Heft : Wirz, J., Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen sowie die Ausbildung der Lehramtskandidaten in Elsass-Lothringen. [VI u. 58 S.] 1911. M. 1.80.

Dritter Band. — *Einzelfragen des höheren mathematischen Unterrichts.* Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Heft : Schimmack, R., Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland. Mit einem Einführungswort von F. Klein. [VI u. 146 S.] 1911. M. 3.60.

2. Heft : Timerding, H. E., Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern. Mit 22 Figuren. [VI u. 112 S.] 1910. M. 2.80.

3. Heft : Zühlke, P., Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten. Mit 14 Figuren. [IV u. 92 S.] 1911. M. 2.60.

4. Heft : Hoffmann, B., Mathematische Himmelskunde und niedere Geodäsie an den höheren Schulen. Mit 9 Figuren. [VI u. 68 S.] 1912. M. 2.

5. Heft : Timerding, H. E., Die kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. Mit 5 Figuren im Text. [IV u. 45 S.] 1911. M. 1.60.

6. Heft : Gebhardt, M., Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterrichte der höheren Schulen Deutschlands, dargestellt vor allem auf Grund alter und neuer Lehrbücher und der Programmabhandlungen höherer Schulen. [VII u. 157 S.] 1912. M. 4.80.

7. Heft : Wernicke, A., Mathematik und Philosophische Propädeutik. [VII u. 138 S.] 1912. M. 4.

8. Heft : Katz, D., Psychologie und mathematischer Unterricht. (In Vorbereitung.)

9. Heft : Lorey, W., Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit 1870. (In Vorbereitung.)

Vierter Band. — *Die Mathematik an den technischen Schulen.* Mit einem Einführungswort von P. Stäckel.

1. Heft : Grünbaum, H., Der mathematische Unterricht an den mittleren technischen Fachschulen der Maschinenindustrie. Mit einem Einführungswort von P. Stäckel. [XII u. 99 S.] 1910. M. 2.60.

2. Heft : Ott, Karl, Die angewandte Mathematik an den technischen Mittelschulen der Maschinenindustrie. (Unter der Presse.)

3. Heft : Girndt, M., Der mathematische Unterricht an den Baugewerkschulen. (In Vorbereitung.)

4. Heft : Schilling, C., und Meldau, H., Der mathematische Unterricht an den deutschen Navigationsschulen. [VI. u. 82 S.] 1912. M. 2.

5. Heft : Trost, Die mathematischen Fächer an den gewerblichen Fortbildungsschulen. (In Vorbereitung.)

6. Heft : Penndorf, B., Rechnen und Mathematik im Unterricht der kaufmännischen Lehranstalten. [VI u. 100 S.] 1912. M. 3.

7. Heft : Jahnke, E., Die Mathematik an Hochschulen für besondere Fachgebiete. [VI. u. 55 S.] 1911. M. 1.80.

8. Heft : FURTWÄNGLER, Ph., Die mathematische Ausbildung der Landmesser. (In Vorbereitung.)

9. Heft : STÄCKEL, P., Die mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker und Ingenieure an den deutschen Hochschulen. (In Vorbereitung.)

FÜNFTER BAND. — *Der mathematische Elementarunterricht und die Mathematik an den Lehrerbildungsanstalten.* Mit einem Einführungswort von F. KLEIN.

1. Heft : LIETZMANN, W., Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht. Mit 20 Figuren im Text. Mit einem Einführungswort von F. KLEIN. [VII u. 125 S.] 1912. M. 3.

2. Heft : LIETZMANN, W., Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht. Mit 38 Figuren im Text. [VIII u. 88 S.] 1912. M. 2.80.

3. Heft : Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten Süddeutschlands mit einem Einführungswort von P. TREUTLEIN und mit den Einzelabhandlungen von H. HENSING über die Verhältnisse in Hessen, von E. GECK über Württemberg, von H. CRAMER über Baden, von KERSCHENSTEINER und BOCK über Bayern. [XIV u. 163 S.] 1912. M. 5.

4. Heft : DRESSLER, H., Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Sachsen und Thüringen. (In Vorbereitung.)

5. Heft : UMLAUF, K., Der mathematische Unterricht an den Seminaren und Volksschulen der Hansestädte. (In Vorbereitung.)

6. Heft : LIETZMANN, W., Die Organisation der Volksschulen, gehobenen Volksschulen, Präparandenanstalten, Seminare usw. in Preussen (In Vorbereitung.)

Autriche.

Berichte über den mathematischen Unterricht in Oesterreich. Veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. Herausgegeben von E. CZUBER, W. WIRTINGER, R. SUPPANTSCHITSCH, E. DINTZL. (Alfred Hölder, Wien). 1912.

Heft 1. — Begleitwort, von E. CZUBER.

Realschulen von F. BERGMANN.

Volks- und Bürgerschulen von K. KRAUS. — (V u. 81 S. : 1 M. 80.)

Heft 2. — Bildungsanstalten für Lehrer und Lehrerinnen von Th. KONRATH.

Höhere Handelsschulen von M. DOLINSKI.

Höhere Forstlehranstalt Reichstadt von M. ADAMICKA. — (59 p. : 1 M. 20.)

Heft 3. — Gymnasien von E. DINTZL. — (VIII-78 p. : 1 M. 80.)

Heft 4. — Mädchenlyzeen von Th. KONRATH.

Die praktische Vorbildung für das höhere Lehramt in Oesterreich von J. LOOS.

Gewerbliche Lehranstalten von W. RULF. — (64 p. : 1 M. 60.)

Heft 5. — Technische Hochschulen von E. CZUBER. — (V-39 p. : 1 M. 20.)

Heft 6. — Die mathematischen Schulbücher an den Mittelschulen und verwandten Lehranstalten von Ph. Freud. — (53 p. : 1 M. 20)

Heft 7. — Universitäten von R. v. Sterneck. — (50 p. : 1 M. 20.)

Heft 8. — Bericht über die speziellen Verhältnisse des öffentlichen mathematischen Unterrichtes and den Volks- und Mittelschulen Galiziens von St. Zaremba. — (V-25 p. ; 1 M. 20.)

Heft 9. — Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den Realschulen und Realgymnasien von A. Adler.

Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den Technischen Hochschulen von Müller. — (24 p. : 2 M. 40.)

Heft 10. — Hochschule für Bodenkultur von O. Simony.

Montanistische Hochschulen von E. Kobald.

Militär-Erziehungs- und Bildungsanstalten von A. Mikuta.

Technologisches Gewerbemuseum von K. Reich. — (39 p.; 1 M. 20.)

Heft 11. — Die Mathematik im Physikunterricht der österreichischen Mittelschulen von A. Lanner. — (56 p.; 1 M. 20.).

Heft 12. — Die neuesten Einrichtungen in Oesterreich für die Vorbildung der Mittelschullehrer in Mathematik, Philosophie und Pädagogik von A. Höfler. — (103 p.; 2 M.)

Belgique.

Premier Volume. — Rapports sur l'enseignement des Mathématiques, du dessin et du travail manuel dans les écoles primaires, les écoles normales primaires, les écoles moyennes, les athénées, les collèges belges. — 1 vol. de 348 p.; prix 5 fr.; J. Gœmære, Bruxelles. Ce Volume comprend :

Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles primaires et dans les écoles normales primaires, par M. Dock (33 p.).

Rapport sur l'enseignement du dessin et du travail manuel dans les écoles primaires, les écoles moyennes, les athénées et les collèges, par M. L. Montfort (154 p.).

Rapport sur l'enseignement des Mathématiques dans les écoles moyennes, les athénées et les collèges, par M. H. Ploumen (87 p.).

Les tendances actuelles de l'enseignement mathématique en Belgique et leur influence sur les méthodes et les programmes, par H. Ploumen (67 p.).

En préparation; pour paraître en 1913, Deuxième Volume :

Les Mathématiques dans les écoles industrielles et professionnelles, par M. Rombaut, inspecteur honoraire.

L'enseignement des Mathématiques dans les Universités et les Écoles supérieures, par M. J. Neuberg.

Danemark.

Bericht über den Mathematikunterricht in Danemark, par Paul Heegaard. — 1 vol. de 104 p.; 3fr,80; Gyldenalske, Copenhague ; Georg et Cie, Genève.

1. — Die Schultypen.
2. — Elementarschulen.
3. — Die höheren allgemeinen Schulen.
4. — Die Volkshochschule.
5. — Elementarschulen für Technik, Handel und Seefahrt.
6. — Militärschulen.
7. — Schulen für Land-, Fortwirtschaft u. s. w.
8. — Die Kunstakademie.
9. — Die Universität und die technische Hochschule.
10. — Die Lehrerausbildung.

Espagne.

L'enseignement mathématique en Espagne, Rapports de la sous-commission espagnole, par le délégué Z.-G. de GALDEANO (Saragosse). Travaux préparatoires. 2 fasc., 8 et 18 p. : 1910 et 1911.

Mémoires, Tome I, 139 pages, 1912. Sommaire de ce premier Volume :

M. Torroja et l'évolution de la Géométrie en Espagne, par Miguel VECAS.

Enseignement de la Géométrie métrique à la Faculté des Sciences, par Cécilio-Jiménez RUEDA.

Les cours d'Analyse mathématique aux Facultés des Sciences espagnoles, par Luis-Octavio de TOLEDO.

L'enseignement du Calcul infinitésimal aux Facultés des Sciences espagnoles, par Patricio PENALVER.

Les Mathématiques à l'École d'Ingénieurs des Eaux et Forêts, par Jorge TORNER.

L'enseignement des Mathématiques à l'École centrale des Ingénieurs industriels, par Carlos MATAIX et Alphonso TORAN.

L'enseignement des Mathématiques à l'École supérieure de Guerre, par Miguel CORREA.

Enseignement des Mathématiques aux Écoles normales, par Leopoldo FERRERAS.

États-Unis.

Report of the United States of North America (11 fasc.).

COMITÉ I et II : Mathematics in the Elementary Schools of the United States (186 p.), 1911.

COMITÉ III et IV : Mathematics in the Public and Private Secondary Schools of the United States (188 p.), 1911.

COMITÉ V : Training of Teachers of Elementary and Secondary Mathematics (24 p.), 1911.

COMITÉ VI : Mathematics in the Technical Secondary Schools in the United States (36 p.), 1912.

COMITÉ VII : Examinations in Mathematics other than those set by the Teacher for his own classes (72 p.), 1911.

Comité VIII : Influences tending to Improve the Condition of Teachers of Mathematics (47 p.), 1912.

Comité IX : Mathematics in the Technological Schools of Collegiate Grade in the United States (44 p.), 1911.

Comité X : Undergraduate Work in Mathematics in Colleges of Liberal Arts and Universities (30 p.), 1911.

Comité XI : Mathematics at West point and Annapolis (26 p.), 1912.

Comité XII : Graduate Work in Mathematics in Universities and in other Institutions of like Grade in the United States (64 p.), 1911.

General Report of the American Commissioners, with *Index* of all the American Reports (84 p.), 1912.

Ces onze fascicules sont publiés et édités par les soins du Bureau of Education à Washington.

France.

Rapports de la sous-commission française, 5 volumes. (Librairie Hachette, Paris).

Tome I. — Enseignement primaire, publié sous la direction de M. Bioche, professeur de Mathématiques au Lycée Louis-le-Grand. 85 pages (3fr 50) :

Avant-propos.

a. Rapport sur l'ensemble des établissements dans lesquels se donne, en France, un enseignement mathématique, par M. Ch. Bioche.

b. Rapport sur l'enseignement mathématique dans les écoles primaires élémentaires, par M. J. Lefebvre.

c. Rapport sur l'enseignement mathématique dans les écoles primaires supérieures, par M. G. Tallent.

d. Rapport sur l'enseignement mathématique dans les écoles normales primaires d'instituteurs, en France, par M. A. Vareil.

e. Rapport sur l'École normale supérieure d'enseignement primaire de Saint-Cloud, par M. Goursat.

Appendice.

Tome II. — Enseignement secondaire, publié sous la direction de M. Bioche, professeur de Mathématiques au Lycée Louis-le-Grand. — 159 pages (5fr) :

Avant-propos.

a. Rapport sur la place et l'importance des Mathématiques dans l'enseignement secondaire en France, par M. Ch. Bioche.

b. Rapport sur les classes de Mathématiques spéciales et de Centrale, par M. E. Blutel.

Pièces annexes.

c. Rapport sur l'Arithmétique, par M. A. Lévy.

d. Rapport sur l'Algèbre, par M. Guitton.

e. Rapport sur la Géométrie, par M. Th. Rousseau.

f. Rapport sur l'enseignement de la Mécanique, par M. H. Beghin.

g. Rapport sur l'enseignement de la Cosmographie, par M. A. Muxart.

h. Rapport sur l'enseignement des Mathématiques dans les écoles nouvelles, par M. Frank Lombard.

Appendice.

Tome III. — Enseignement supérieur, publié sous la direction de M. Albert de Saint-Germain, Doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Caen, président de la sous-commission française. — 123 pages (4fr) :

Aperçu général sur l'enseignement supérieur des Mathématiques.

a. Rapport sur l'enseignement du calcul différentiel et intégral, de la Mécanique rationnelle, de l'Astronomie et des Mathématiques générales dans les Facultés des Sciences en France, par M. E. Vessiot.

b. Rapport sur les enseignements mathématiques d'ordre élevé dans les Facultés des Sciences d'Universités françaises, par M. Émile Borel.

Annexe. — Faculté des Sciences de Paris : programmes des certificats d'études supérieures pour l'année 1911.

c. Rapport sur les diplômes d'études supérieures de Sciences mathématiques, par M. A. de Saint-Germain.

d. Rapport sur l'enseignement mathématique dans les instituts techniques des Facultés des Sciences, par M. H. Vogt.

e. Rapport sur l'enseignement des Mathématiques à l'École normale supérieure et sur l'agrégation des Sciences mathématiques, par M. Jules Tannery.

f. Note sur l'enseignement mathématique au Collège de France par M. A. de Saint-Germain.

g. Rapport sur l'enseignement mathématique à l'École Polytechnique, par M. G. Humbert.

h. Rapport sur l'enseignement mathématique à l'École nationale des Ponts et Chaussées, par M. Maurice d'Ocagne.

i. Rapport sur l'enseignement des Mathématiques à l'École nationale supérieure des Mines, par M. René Garnier.

j. Rapport sur l'enseignement mathématique à l'École nationale des Mines de Saint-Étienne, par M. Friedel.

k. Note sur l'Ecole d'application du Génie maritime, par M. A. Janet.

Tome IV. — Enseignement technique, publié sous la direction de M. P. Rollet, Directeur de l'École municipale professionnelle Diderot à Paris. — 212 pages (5fr) :

Introduction.

Écoles pratiques de commerce et d'industrie. Programmes officiels (28 août 1909). Extraits concernant l'enseignement mathématique.

a. Rapport de M. Harang.

b. Rapport de M. Ch. Lagneaux.

c. Rapport de M. Ch. Lagneaux.

Écoles nationales professionnelles. — Programme de l'enseignement technique théorique.

d. Rapport sur l'enseignement des Mathématiques dans les écoles nationales professionnelles (E. N. P.), par M. Larivière.

e. Rapport sur l'enseignement des Mathématiques dans les écoles nationales professionnelles, par M. E. Tripard.

Écoles d'arts et métiers. Programmes officiels du 9 mai 1910.

f. Rapport sur l'enseignement des Mathématiques dans les écoles d'arts et métiers (1re année), par M. J. Roumajon.

g. Rapport sur l'enseignement des Mathématiques dans les écoles d'arts et métiers (2e année), par M. Bezine.

h. Rapport sur l'enseignement de la Mécanique dans les écoles d'arts et métiers (3e année), par M. Bazard.

Écoles de commerce. — *i*. Rapport sur l'enseignement mathématique dans les établissements de la Chambre de Commerce de Paris, par M. P. Mineur.

Conservatoire national d'arts et métiers. — *j*. Rapport sur l'enseignement des Mathématiques au Conservatoire national des arts et métiers, par M. Carlo Bourlet.

École centrale des arts et manufactures. — *k*. Rapport sur l'enseignement mathématique à l'École centrale des arts et manufactures, par M. P. Appell.

Appendice.

Tome V. — Enseignement des jeunes filles, publié sus la direction de Mlle Amieux, professeur au Lycée Victor-Hugo à Paris. — 95 pages (3fr50) :

Aperçu général.

Enseignement secondaire. — Introduction.

a. Rapport sur la place des Mathématiques dans les plans d'études, l'organisation générale et l'enseignement obligatoire, par Mlle A. Amieux.

b. Rapport sur l'enseignement des Mathématiques dans la 2e période et sur la préparation au baccalauréat et aux examens de l'enseignement secondaire féminin, par Mme Baudeuf.

c. Rapport sur l'enseignement des Mathématiques à l'École normale de Sèvres, par M. P. Appell.

Enseignement professionnel. — Rapport sur les Mathématiques dans l'enseignement professionnel des jeunes filles, par Mme Pivot et Mlle Fredon.

Enseignement primaire. — Introduction.

a. Note sur l'enseignement mathématique dans les écoles primaires élémentaires.

b. Rapport sur l'enseignement mathématique dans les écoles primaires supérieures de jeunes filles, par M. Tallent.

c. Sur l'enseignement mathématique dans les écoles normales d'institutrices primaires.

d. Rapports sur l'enseignement mathématique à l'École normale supérieure d'institutrices de Fontenay-aux-Roses, par MM. G. Fontené et G. Koenigs.

Hollande.

Rapport sur l'enseignement mathématique dans les Pays-Bas, publié par la sous-commission nationale, sous la direction de M. J. Cardinaal. — 1 vol. de 151 pages; 3f; J. Waltman, Delft :

1. L'enseignement mathématique à l'école primaire.
2. L'enseignement mathématique aux « Burgeravondscholen » (écoles dites bourgeoises), écoles professionnelles, écoles de dessin, écoles professionnelles pour filles et écoles techniques.
3. Écoles de marine.
4. L'enseignement mathématique aux écoles moyennes (Hoogere Bugerrscholen). Écoles moyennes à 3 années d'études.
5. Écoles moyennes à 5 années d'études.
6. Écoles moyennes pour jeunes filles.
7. L'enseignement mathématique aux gymnases.
8. Les universités.
9. Académie technique.
10. L'enseignement mathématique aux instituts militaires de l'armée de terre dans les Pays-Bas.
11. École de machinistes pour la marine à Hellevœtsluis.
12. Institut royal de marine à Willemsoord.
13. Rapport complémentaire sur les propositions de la Commission d'État pour la réorganisation de l'enseignement, établie par arrêté royal du 21 mars 1903, n° 49.

Hongrie.

1. *Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn.* — Im Auftrage der Mathematischen Reform Kommission des Landesvereins der Mittelschulprofessoren nach dem ungarischen Original deutsch herausgegeben von E. Beke und S. Mikola (1911). — 160 p. 4 M. — B. G. Teubner, Leipzig.

Cette étude d'ensemble se trouve complétée par les dix Rapports spéciaux ci-après (0fr50 le fascicule, Librairie Georg, Genève) :

2. Die Ausbildung der Mittelschulprofessoren, von J. Kürschak (1911). — 20 p.
3. Der heutige Stand des mathematischen Unterrichts am Königlich ungarischen Josefs-Polytechnikum (Technische Hochschule in Budapest), von G. Rados (1911). — 14 p.
4. Der Unterricht der Mathematik am Uebungsgymnasium, von P. v. Szabo (1912). — 17 p.
5. Der mathematische Unterricht an den Lehrerbildungsanstalten, von K. Goldziher (1912). — 13 p.
6. Der mathematische Unterricht an den höheren Gewerbeschulen und gewerblichen Fachschulen, von D. Arany (1912). — 15 p.

7. Der mathematische Unterricht an den Handelsschulen, von M. Havas und S. Bogyo (1912) 13 p.

8. Der mathematische Unterricht an den Bürgerschulen, von J. Volenszky (1912). — 18 p.

9. Der mathematische Unterricht an den Mittelschulen (Gymnasien u. Realschulen), von E. Beke (1912). — 24 p.

In Vorbereitung :

10. Der mathematische Unterricht an den Volksschulen, von M. Bittenbinder.

11. Der mathematische Unterricht an den höheren Mädchenschulen, von A. Visnya.

Iles Britanniques.

The following papers on the *Teaching of Mathematics in the United King* dom have been published by the Board of Education (Éditeurs : Wyman and Sons, London) :

N° 1. Higher Mathematics for the Classical Sixth Form. By Mr. W. Newbold. — 14 p. Price 1 d.

N° 2. The Relations of Mathematics and Physics. By Dr. L. N. G. Filon. — 9. Price 1 d.

N° 3. The Teaching of Mathematics in London Public Elementary Schools. By Mr. P. B. Ballard. — 28 p. Price 2 d.

N° 4. The Teaching of Elementary Mathematics in English Public Elementary Schools. By Mr. H. J. Spencer. — 32 p. Price 2 $\frac{1}{2}$ d.

N° 5. The Algebra Syllabus in the Secondary School. By Mr. C. Godfrey. — 34 p. Price 2 $\frac{1}{2}$ d.

N° 6. The Correlation of Elementary Practical Geometry and Geography. By Miss Helen Bartram. — 8 p. Price 1 d.

N° 7. The Teaching of Elementary Mechanics. By Mr. W. D. Eggar. — 13 p. Price 1 d.

N° 8. Geometry for Engineers. By Professor D. A. Low. — 15 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 9. The Organisation of the Teaching of Mathematics in Public Secondary Schools for Girls. By Miss Louisa Story. — 17 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 10. Examinations from the School Point of View. By Mr. Cecil Hawkins. — 104 p. Price 9 d.

N° 11. The Teaching of Mathematics to Young Children. By Miss Irene Stephens. — 19 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 12. Mathematics with relation to Engineering Work in Schools. By Mr. T. S. Usherwood. — 26 p. Price 2 d.

N° 13. The Teaching of Arithmetic in Secondary Schools. By Mr. G. W. Halmer. — 33 p. Price 2 $\frac{1}{2}$ d.

N° 14. Examinations for Mathematical Scholarships. By Dr. F. S. Macaulay and Mr. W. J. Greenstreet. — 53 p. Price 3 d.

N° 15. The Educational Value of Geometry. By Mr. G. St. L. Carson. — 17 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 16. A School Course in Advanced Geometry. By Mr. C. V. Durell. — 14 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 17. Mathematics at Osborne and Darmouth. By Mr. J. W. Mercer and Mr. C. E. Ashford. — 41 p. Price 2 $\frac{1}{2}$ d.

N° 18. Mathematics in the Education of Girls and Women. By Miss E. R. Gwatkin, Miss Sara A. Burstall, and Mrs. Henry Sidgwick. — 32 p. Price 2 $\frac{1}{2}$ d.

N° 19. Mathematics in Scotch Schools. By Professor G. A. Gibson. — 49 p. Price 3 d.

N° 20. The Calculus as a School Subject. By Mr. C. S. Jackson. — 18 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 21. The Relation of Mathematics to Engineering at Cambridge. By Professor B. Hopkinson. — 13 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 22. The Teaching of Algebra in Schools. By Mr. S. Barnard. — 26 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 23. Research and Advanced Study as a Training for Mathematical Teachers. By Professor G. H. Bryan. — 21 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 24. The Teaching of Mathematics in Evening Technical Institutions. By Dr. W. E. Sumpner. — 9 p. Price 1 d.

N° 25. The Undergraduate Course in Pass Mathematics generally, and in relation to Economics and Statistics. By Professor A. D. Bowley. — 14 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 26. The Preliminary Mathematical Training of Technical Students. By Mr. P. Abbott. — 17 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 27. The Training of Teachers of Mathematics. By Dr. T.-P. Nunn. — 17 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 28. Recent Changes in the Mathematical Tripos at Cambridge. By Mr. Arthur Berry. — 15 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 29. Mathematics in the Preparatory School. By Mr. E. Kitchener. — 15 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 30. Course in Mathematics for Municipal Secondary Schools. By Mr. L.-M. Jones. — 15 p. Price 1 $\frac{1}{2}$ d.

N° 31. Examinations for Mathematical Scholarships at Oxford. By Mr. A.-E. Jolliffe. — Examinations for Mathematical Scholarships at Cambridge. By G.-H. Hardy. — 22 p. Price 2 d.

N° 32. Parallel Straight Lines and the Method of Direction. By Mr. T.-James Garstang. — 8 p. Price 1 d.

N° 33. Practical Mathematics at Public Schools : Introduction. By Dr. H.-H. Turner. — Practical Mathematics at Clifton College. By Mr. R.-C. Fawdry. — Practical Mathematics at Harrow School. By Mr. A. W. Siddons. — Practical Mathematics at Oundle School. By Mr. F. W. Sanderson. — Practical Mathematics at Winchester College. By Mr. G.-M. Bell. — 36 p. Price 1 d.

N° 34. Mathematical Examinations at Oxford. By Mr. A.-L. Dixon. — 117 p. Price 16 d.

Ces Rapports ont été réunis en *deux Volumes* sous le titre : *The Teaching of Mathematics in the United Kingdom*. Part I et Part II. (*Special Reports on Educational subjects*, Volumes 26 et 27.) Prix : Tome I. 3 ch.; Tome II. 1 sh, q.

Italie.

Atti della Sottocommissione italiana. (Les fascicules ne seront mis en vente qu'une fois réunis en volume) :

1. Scuolo infantili ed elementari, prof. Conti (Roma). — 39 p.
2. Scuole normali, prof. Conti (Roma). — 71 p.
3. Scuole classiche :

a. I successivi programmi dal 1867 al 1910, prof. Scarpis (Bologna). — 11 p.

b. Critiche e proposte, prof. Fazzari (Palermo). — 16 p.

4. Scuole ed istituti tecnici, prof. Scorza (Cagliari). — 34 p.
5. Scuole industriali, professionali et commerciali, prof. Lazzeri (Livorno). — 19 p.
6. R. Accademia Navale di Livorno e R. Accademia Militare di Torino, prof. Lazzeri (Livorno) 14 p.
7. Intorno all' ordinamento degli studi matematici nel primo biennio universitario in Italia, prof. Somigliana (Torino). — 11 p.
8. Sugli studi per la laurea in Matematica e sulla sezione di Matematica delle Scuolle di Magistero, prof. Pincherle (Bologna). — 16 p.
9. Observazioni e proteste circa l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, medie e di magistero, prof. Padoa (Genova). — 22 p.

En préparation :

10. Sui libredi testo di geometica par le scuole secondari superiori, prof. Scorza (Cagliari). — 15 p.
11. Sulla evoluzione degli insegnamenti geometrici nelle Università. prof. Severi (Padova).

Japon.

Tome I. — *Report on the teaching of Mathematics in Japan*, prepared by the japanese Subcommission. — 1 vol de 550 p.

The teaching of Mathematics :

I. Elementary Schools. — 61 p.

II. Middle Schools. — 69 p.

III. Higher Middle Schools. — 48 p.

IV. Faculty of Science of Imperial Universities. — Pour la traduction anglaise, voir chap. VIII. of the Summary Report.

V. Faculty of Technology of the Tokio Imperial University. — 7 p.

VI. Normal Schools. — 34 p.

VII. Training of (male) Teachers for Intermediate Schools. — 38 p.

VIII. Girl's High Schools. — 32 p.

IX. Normal Schools for Women. — 45 p.

X. Higher Normal Schools for Women. — 44 p.
XI. Commercial Schools and Colleges. — 25 p.
XII. Technical Schools and Colleges. — 42 p.
XIII. Schools under the Army Department. — 48 p.
XIV. Schools under The Navy Department. — 13 p.
XV. Schools under the Department of Communications. — 30 p.

Tome II. — *Summary Report on the Teaching of Mathematics in Japan*, by R. Fujisawa. — 238 p.

Norvège.

Les plans d'études des écoles technique moyennes norvégiennes étant en révision, M. Alfsen, délégué, a dû retarder la publication de son Rapport. Celui-ci portera le titre *Bericht über den mathematischen Unterricht in Norwegen* et comprendra les objets suivants :

I. Einleitung : Uebersicht über die Organisation des norwegischen Schulswesens.

II. Die Mathematik an den niederen und höheren Volkschulen.

III. Die Mathematik an den höheren Schulen (« Mittelschule » und « Gymnasium »).

IV. Die Mathematik an den Hochschulen (Universität in Christiania und technische Hochschule in Drontheim).

V. Die Mathematik an den Spezialschulen.

VI. Die Seminare für Volksschullehrer.

VII. Die pädagogische Ausbildung der Lehrer der höheren Schulen.

Roumanie.

L'Enseignement mathématique en Roumanie. Enseignement secondaire, par G. Tzitzeica (Bucarest). — 16 p.

Russie.

1. *L'Enseignement mathématique dans les universités, les écoles techniques supérieures et quelques-unes des écoles militaires*, par C. Possé. — 100 p. (3 fr.)

2. *L'enseignement mathématique dans les écoles de Finlande*, rédigé par une Commission instituée par le Sénat impérial de Finlande. — 52 p.

3. *Bericht über den mathematischen Unterricht an den russischen Realschulen*, von K. W. Vogt. — 16 p. ($0^{fr},60$).

4. *L'enseignement mathématique dans les écoles primaires et les écoles normales*, par M. S.

L'enseignement mathématique dans les gymnases de garçons du Ministère de l'Instruction publique et dans les *instituts de jeunes filles* du ressort des établissements de l'Impératrice Marie, par M. Kondratiev. — 29 p. (1^{fr}).

5. *L'enseignement mathématique dans les Corps des cadets*, par M. Poprugenko.

Notice sur les cours pour la préparation des maîtres des Corps de cadets, par M. Makchéev. — 20 p.

6. *a*. Sur l'organisation de l'enseignement mathématique dans les *gymnases de jeunes filles* du ressort du Ministère de l'Instruction publique et à l'*Institut pédagogique de jeunes filles*. Par M. Michelson, professeur à cet Institut.

b. Sur l'enseignement mathématique dans les *écoles industrielles* du ressort du Ministère de l'Instruction publique. Par MM. Kotournitzky et Hatzouk, professeurs à l'Institut technologique de Saint-Pétersbourg.

c. Sur l'enseignement des Mathématiques dans les *gymnases de jeunes filles* dans l'arrondissement scolaire de Varsovie. Par M. Goriatckev, prof. à l'Université de Varsovie. — 37 p.

Rapports déjà rédigés en langue russe (en traduction) :

a. Les Mathématiques dans l'*Institut technologique de Saint-Pétersbourg*. Par Boris Coïalovitsch, prof. à cet Institut.

b. Les Mathématiques dans les *cours supérieurs de femmes* (*université de femmes*) à Saint-Pétersbourg. Par le même.

c. Les Mathématiques dans les *cours supérieurs de femmes à Moscou*. Par M. Mlodzievski, ancien prof. à l'Université de Moscou.

d. Les Mathématiques dans l'*Institut polytechnique de Varsovie*. Par M. Mordoukhaï-Boltowskaï, prof. à l'Université de Varsovie.

e. *Sur la préparation des maîtres pour les écoles moyennes secondaires*. Par M. Kagan, prof.-adjoint à l'Université d'Odessa.

f. Les Mathématiques dans les *écoles de l'administration générale de l'agriculture*. Par M. N. N.

g. Les Mathématiques à l'*Institut de Géodésie* de Moscou, par feu B. Struve.

Suède.

Der mathematische Unterricht in Schweden, herausgegeben von Dr. H. von Koch und Dr. E. Göransson. — Éditeur : C. E. Fritze, Stockholm 229 p., 4fr.

Écoles primaires et écoles normales, par H. Dahlgren : Die Mathematik an den Volksschulen und Volksschullehrerseminaren Schwedens, 52 p.

Écoles réales, par E. Göransson et E. Hallgren : Die Mathematik an den schwedischen Realschulen, 28 p.

Gymnases, par E. Göransson : Die Mathematik an den schwedischen Gymnasien, 51 p.

Établissements de jeunes filles, par O. Josephson et Anna Rönström : Die Mathematik an den höheren Mädchenschulen in Schweden, 23 p.

Écoles professionnelles élémentaires, par K.-L. Hagström, G. Erikson

et C. Heuman : Die Mathematik an elementartechnischen Gewerbeschulen, 22 p.

Écoles techniques moyennes, par O. Gallander : Der mathematische Unterricht an den technischen Mittelschulen, 8 p.

Écoles techniques supérieures, par H. von Koch : Die Mathematik an der technischen Hochschule in Stockholm, 13 p.

Universités, par A. Wiman : Die Mathematik an den schwedischen Universitäten, 18 p.

Suisse.

L'Enseignement mathématique en Suisse. Rapports de la sous-commission suisse publiés sous la direction de H. Fehr. — 1 vol., XVI et 756 p., 18fr, en 8 fascicules en vente séparément, Georg et Cie, Genève et Bâle.

Fascicule 1. — Les travaux préparatoires : Rapport préliminaire sur l'organisation de la Commission et le plan général de ses travaux, publié au nom du Comité central par H. Fehr, secrétaire-général de la Commission (en français et en allemand).

Organisation des travaux en Suisse. — 43 p., 1fr,50.

Fasc. 2. — Aperçu général, par H. Fehr.

Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Primarschulen, von Just. Stöcklin.

Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Sekundarschulen, von Badertscher, Bern. — 106 p., 2fr,25.

Fasc. 3. — Der mathematische Unterricht an den höheren Mädchenschulen der Schweiz, von E. Gubler, Zürich.

Der mathematische Unterricht an den Lehrer- und Lehrerinnenseminarien der Schweiz, von F. R. Scherrer, Küsnacht.

Organisation und Methodik des mathematischen Unterrichts in den Landerziehungsheimen, von K. Matter, Frauenfeld. — 109 p., 2fr,25.

Fasc. 4. — Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Gymnasien und Realschulen, von K. Brandenberger, Zürich. — 167 p., 3fr,50.

Fasc. 5. — Les Mathématiques dans l'enseignement technique moyen en Suisse, par L. Crelier, Bienne. — 112 p., 2fr,25.

Fasc. 6. — Les Mathématiques dans l'enseignement commercial suisse, par L. Morf, Lausanne. — 70 p., 2fr.

Fasc. 7. — Der mathematische Unterricht an der Eidgenössischen technischen Hochschule, von M. Grossmann, Zürich. — 59 p., 2fr.

Fasc. 8. — L'Enseignement mathématique à l'École d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne, par M. Lacombe, Lausanne.

Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Universitäten, von J. H. Graf, Bern. — 72 p., 2fr,25.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXVI.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXVI; 1912. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

ADHÉMAR (R. D'). — Leçons sur les principes de l'Analyse..... 209-210
ANNUAIRE pour l'an 1912, publié par le Bureau des Longitudes..... 94
ANNUAIRE pour l'an 1913, publié par le Bureau des Longitudes..... 366
APPELL (P.). — Cours de Mécanique de la classe de Mathématiques spéciales..... 249-256
AUERBACH (F.) und ROTHE (R.). — Taschenbuch für Mathematiker und Physiker..... 331-341
AUTONNE (L.). — Sur les groupes commutatifs et pseudo-nuls de quantités complexes..... 301-303
BOTHEZAT (G. DE). — Étude de la stabilité de l'aéroplane (*Thèse*, Paris)..... 394-395
BROGGI (H.). — Versicherungs Mathematik..... 216
CARVALLO (E.). — Le calcul des probabilités et ses applications..... 362-365
CATALOG mathematischer Modelle..... 33
CIANI (E.). — Lezioni di Geometria projettiva ed analitica..... 307-308
DARBOUX (G.). — Éloges académiques et discours..... 265
DELAMBRE (J.-B.-J.). — Grandeur et figure de la Terre..... 117-118
DINI (U.). — Sulli Sviluppi in serie per la Representazione analitica delle funzioni di una variable reale arbitrariamente in certo intervallo..... 333-338
FESTSCHRIFT (Heinrich Weber)..... 187
FRÉCHET (M.). — *Voir* HEYWOOD.
FLOTOW (Dr A. VON). — Einleitung in die Astronomie..... 115-117

Pages.

FUETER (R.). — Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluss auf die Entwicklung der Zahlentheorie..... 300-301

GALBRUN (H.). — Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable. 185-186

GALITZINE (Prince B.). — Leçons de Sismométrie, *en russe*..... 325-327

GARNIER (R.). — Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre inférieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes (*Thèse*, Paris)..... 112-115

HAUCK (G.). — Vorlesungen ueber darstellende Geometrie..... 204-208

HELBRONNER (P.). — Résumé des opérations exécutées jusqu'à la fin de 1911 pour la description géométrique des Alpes françaises (*Thèse*, Paris)..... 150-153

HERMITE (Ch.). — Œuvres, publiées par Émile Picard..... 262-263

HEYWOOD (H.-B.) et FRÉCHET (M.). — L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique..... 238-244

KEINDORFF (A.). — Die Zustandgleichung der Dampfe, Flussigkeiten und Gase..... 288-289

KIEPERT (L.). — Grundriss der Differential und Integral Rechnung... 94

LALESCO (T.). — Introduction à la théorie des équations intégrales... 244-248

LANE (M.). — Das Relativitäts Prinzip..... 353-362

LEBON (E.). — Savants du jour : Gabriel Lippmann..... 153-154

LEBON (E.). — Savants du jour : Henri Poincaré..... 266-270

LECTURES delivered at the celebration of the twentieth anniversary of the fundation of Clark University..... 256-262

LEHMANN (P.). — Beiträge zur Theorie der Darstellung der stetigen Funktionen durch reihen von ganzen rationalen Funktionen..... 367

LORIA (G.). — Poliedri, Curvei Superficie secondo i metodi della Geometria descrittiva..... 90-92

MAIRE (A.). — L'œuvre scientifique de Blaise Pascal..... 308-309

MARKOFF (A. A.). — Wahrscheinlichkeitsrechnung..... 327-328

MAYOR (B.). — Statique graphique des systèmes de l'espace..... 213-216

MEYER (W. F.). — Ueber die Theorie benachtbarter Geraden und einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff..... 304-306

MILNE (R. J.). — An elementary Treatise on cross-ratio Geometry.... 328-330

MINKOWSKI (H.). — Gesammelte Abhandlungen, unter Mitwirkung von A. SPEIZER und H. WEYL, herausgegeben von D. HILBERT,..... 73-90

MONTEL (P.). — Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe..... 198-203

NIELSEN (N.). — Elemente der Funktionentheorie..... 193-197

OCAGNE (M. D'). — Instruction sur l'usage de la règle à calcul. 306

OPERE mathematische del marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano. 212

PARFENTIEFF (N. N.). — Études sur la théorie de la croissance des fonctions..... 7-9

POINCARE (H.). — Calcul des probabilités..... 169-184

RAYLEIGH (baron J.). — Scientific Papers..... 270-279

REID (L. W.). — The Elements of the Theory of Algebraic Numbers . 279-285

SALMON (G.). — A. treatise on the analytic Geometry of three dimensions, revised by Reginald A. P. ROGERS..... 188-189

Pages.

SCHOY (C.). — Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärischastronomischer Aufgaben 213
SCHWAHN (P.). — Mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse 212-213
SOMMERVILLE (D. M. Y.). — Bibliography of non euclidian Geometry. 9-10
STAHL (H.). — Abriss einer Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in neuer Fassung 297-299
STOFFAËS (l'abbé E.). — Cours de Mathématiques supérieures 154-155
THOMSON (Sir William) (Lord Kelvin). — Mathematical and Physical Papers 105-112
TIKHOMANDRITZKY (H.). — Éléments de la théorie des intégrales abéliennes 5-7
VAHLEN (T.). — Konstruktionen nnd Approximationen in systematischer Darstellung eine Ergänzung der niederen eine Vorstufe zur höheren Geometrie 285-288
VERGNE (H.). — Contribution à la théorie des ondes liquides (*Thèse*, Paris) 147-149
VOIGT (A.). — Theorie der Zahlenreihen und der Reihengleichungen.. 189
VOIGT (W.). — Lehrbuch der Kristallphysik 137-147
WHITFORD (E. E.). — The Pell equation 210-211
WIDDER (W.). — Untersuchungen über die allgemeinste lineare Substitution mit vorgegebener p^{ter} Potenz 93

Bulletin bibliographique. — 31-32, 72, 164-168, 190-192, 232, 263-264, 319-320, 352

MÉLANGES.

APPELL (P.). — Quelques remarques sur l'emploi des imaginaires en Dynamique 289-295
DARBOUX (G.). — Sur le mouvement des corps pesants et le principe de la moindre action 119-130
DARBOUX (G.). — Sur différentes propriétés des trajectoires orthogonales d'une congruence de courbes 217-232
DOUBLET (E.). — Une édition complète des Œuvres d'Euler 310-319
FEHR (H.). — La Commission internationale de l'Enseignement mathématique de 1908 à 1912 ..... 349-355, 368-384
GUICHARD (C.). — Étude des propriétés métriques des courbes dans un espace d'ordre quelconque 14-36, 34-72
HAAG (J.). — Sur les équations aux variables mêlées; application à la recherche de certaines familles de Lamé 10-24
MOLLERUP (J.). — Sur l'identité du déterminant de Fredholm et d'un déterminant infini de von Kock 130-136
NIELSEN (N.). — Sur un cas particulier des séries neumanniennes de fonctions ultrasphériques 94-104
TZITZÉICA. — Sur les réseaux conjugués à invariants égaux d'une quadrique 155-164

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

D'ANALYSES.

ANGOT (Alfred). 327.
APPELL (P.). 115, 149, 186, 325.
BAILLEHACHE (de). 341.
BOULANGER (A.). 184, 270, 328, 365.
BRILLOUIN (M.). 289, 362.
CAHEN (E.). 189.
CHÂTELET (A.). 299, 301.
C. R. 208.
DUHEM (Pierre). 112, 279.
GARNIER (René). 216, 285, 306, 330.
G. D. 33, 187, 212, 263.
GEVREY (M.). 244, 367.
G. J. 94.
HADAMARD (J.). 203.
HILBERT (D.). 90.
J. G. 189.
J. H. 9, 74, 93.
J. J. 7, 10.
LACOUR (E.). 197, 238, 262.
L. (Em. et Er.). 117, 213, 288.
L. (Er.). 92, 94, 118, 153, 154, 155, 211, 265, 306, 308, 309, 366.
LE VAVASSEUR (R.). 303.
LÉVY (Paul). 248.
MAUGUIN (Ch.). 147.
VERGNE (H.). 210, 216, 256.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXVI.

5551 Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Mazarine, 3, à Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. E. CARTAN, J. DRACH, P. DUHEM, C. GUICHARD,
J. HADAMARD, É. LACOUR, ER. LEBON, S. RINDI, P. H. SCHOUTE,
H. G. ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY
ET DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXVI. — ANNÉE 1912.

(XLVIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1912

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADEMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI;

Serie 5, Rendiconti, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Tome IV, 1895; 2e semestre.

Beltrami (*E.*) [T 3 *b*]. — Sur l'expression donnée par Kirchhoff au principe de Huygens (p. 29-31).

La formule de Kirchhoff a été déduite par M. Gutzmer (*Journ. de Crelle*, t. 114) du théorème de Green, en éliminant ainsi toute considération de fonctions auxiliaires. M. Beltrami montre comment on peut perfectionner encore cette méthode, en partant de la formule de Gauss

$$\int \frac{dV}{dr}\,\frac{dS}{r^2} = \int V\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma - (\sigma)_0 V_0.$$

Voir aussi la Note suivante.

Beltrami (*E.*) [T 3 *b*]. — Sur le théorème de Kirchhoff (p. 51-52).

Ici l'auteur prouve que la formule de Kirchhoff est fondée sur l'identité analytique

$$\frac{1}{r^4}\,\frac{d}{dr}\left(U - r\,\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \sum \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \Delta_2 U\right) = 0,$$

satisfaite par toute fonction $U(x, y, z, r)$.

Calò (*B.*) [B 12 *h*]. — Sur les opérations fonctionnelles distributives (p. 52-59).

Extension, en deux sens différents, de la formule

$$A(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A^{(\nu)}(1)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}$$

donnée par M. Pincherle (*voir* la Note dans ce même Tome, 1er semestre, p. 142).

Une première extension est obtenue en considérant les opérations fonctionnelles A sur n fonctions arbitraires, et distributives par rapport à chacune de ces fonctions. On a la formule

$$A(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \sum_{m_1, \ldots, m_n} \left(\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}}{\partial\varphi_1^{m_1} \ldots \partial\varphi_n^{m_n}} \right)_{\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 1} \frac{\varphi_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{\varphi_n^{m_n}}{m_n!},$$

les dérivées partielles fonctionnelles premières étant définies par

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi_i} = A(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, t_i\varphi_i, \ldots, \varphi_n) - x_i A(\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_n),$$

et par conséquent les dérivées partielles quelconques par

$$\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_n}}{\partial\varphi_1^{m_1} \partial\varphi_2^{m_2} \ldots \partial\varphi_n^{m_n}} = \sum_0^{m_1}{}_{r_1} \cdots \sum_0^{m_n}{}_{r_n} (-1)^{r_1+\cdots+r_n} \binom{m_1}{r_1} \cdots \binom{m_n}{r_n}$$
$$\times A(t_1^{m_1-r_1}\varphi_1, \ldots, t_n^{m_n-r_n}\varphi_n) x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n},$$

les x étant les variables qui prennent la place des t à la suite de l'opération.

L'autre extension est relative au cas d'une seule fonction de plusieurs variables.

Volterra (*V.*) [R 8 *e*]. — Sur la rotation d'un corps où il y a des systèmes cycliques (p. 93-97).

On distingue en deux catégories les coordonnées indépendantes du système, en appelant *cycliques* celles qui n'entrent pas explicitement dans l'expression de la force vive, mais dont il y a les dérivées par rapport au temps (*intensités cycliques*), et *paramètres* les autres. Un système est cyclique lorsque la force vive ne dépend que des intensités cycliques, et monocyclique, bicyclique, ..., suivant qu'il y a une, deux, ... coordonnées cycliques. Dans un système absolument cyclique les paramètres sont constants.

Soit un système dont les liens n'empêchent pas la rotation autour d'un point, et qui ait un certain nombre de coordonnées cycliques, sa configuration étant déterminée par les variables qui déterminent la position d'un système d'axes mobile autour d'un point fixe, par les coordonnées cycliques et les paramètres; le mouvement relatif par rapport aux axes, déterminé par les coor-

données cycliques et les paramètres est le *mouvement intérieur* du système. En supposant les axes fixes et les paramètres constants, si le système est abandonné à son inertie, les intensités cycliques sont constantes, et le mouvement est *adiabatique* et *isocyclique*. Si l'on suppose que les axes puissent tourner autour de l'origine, que les paramètres et les intensités cycliques des mouvements intérieurs soient constants, et qu'il n'y ait aucun couple de rotation, on peut calculer l'influence des mouvements intérieurs sur la rotation du système, suivant les principes établis par l'auteur dans des travaux précédents (*Atti d. R. Acc. di Torino*, 1894-95; *Astronomische Nachrichten*, t. CXXXVIII; *Annali di Matematica*, t. XXIII), et en conclure que les composantes de la rotation sont des fonctions elliptiques du temps, et les cosinus des angles des axes d'inertie avec les axes fixes sont des fonctions uniformes du temps. Réciproquement, la rotation du système exerce une influence sur les mouvements intérieurs, qui ne se conservent pas cycliques, au moins lorsque les moments d'inertie ne sont pas égaux entre eux.

La question générale de déterminer l'influence mutuelle de la rotation et des mouvements intérieurs, en supposant que ces derniers soient des mouvements cycliques quelconques, est résolue par les formules

$$p = \frac{M_1^{(1)}\sigma_1 + M_1^{(2)}\sigma_2 + M_1^{(3)}\sigma_3 + M_1^{(4)}\sigma}{M_0^{(1)}\sigma_1 + M_0^{(2)}\sigma_2 + M_0^{(3)}\sigma_3 + M_0^{(4)}\sigma},$$

$$q = \frac{M_2^{(1)}\sigma_1 + M_2^{(2)}\sigma_2 + M_2^{(3)}\sigma_3 + M_2^{(4)}\sigma}{M_0^{(1)}\sigma_1 + M_0^{(2)}\sigma_2 + M_0^{(3)}\sigma_3 + M_0^{(4)}\sigma},$$

$$r = \frac{M_3^{(1)}\sigma_1 + M_3^{(2)}\sigma_2 + M_3^{(3)}\sigma_3 + M_3^{(4)}\sigma}{M_0^{(1)}\sigma_1 + M_0^{(2)}\sigma_2 + M_0^{(3)}\sigma_3 + M_0^{(4)}\sigma},$$

$$\omega_i = \frac{P_i^{(1)}\sigma_1 + P_i^{(2)}\sigma_2 + P_i^{(3)}\sigma_3 + P_i^{(4)}\sigma}{M_0^{(1)}\sigma_1 + M_0^{(2)}\sigma_2 + M_0^{(3)}\sigma_3 + M_0^{(4)}\sigma},$$

où p, q, r sont les composantes de la rotation et ω_i celles des intensités cycliques; l'argument u des σ est

$$u = n(t - t_0),$$

avec n et t_0 constants; et les M et les P sont des constantes qui s'expriment, ainsi que n et les constantes elliptiques, par les racines d'une équation du quatrième degré, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des composantes mécaniques du problème.

L'auteur annonce que les développements relatifs aux propositions de cette Note seront publiés dans les *Annali di Matematica*.

Volterra (*V.*) [R 8 *e*]. — Sur le mouvement d'un système où il y a des mouvements intérieurs variables (p. 107-110).

Dans un système symétrique autour d'un axe, dont est constante la forme et la distribution de densité, on peut faire varier les mouvements intérieurs de manière que le pôle de rotation s'éloigne continuellement du pôle d'inertie. Ce résultat, obtenu par M. Peano par la méthode du calcul géométrique (*Atti delle R. Acc. di Torino*, t. XXX, 1895, p. 515) peut se déduire, comme l'auteur

le prouve, des équations du mouvement données par lui dans une Note antérieure (mêmes *Atti*, t. XXX, p. 301).

Segre (*C.*) [M₁ 1 *c*, ref. Q 2]. — Sur la forme hessienne (p. 143-148).

Soit f une forme d'ordre n à $d+1(\geqq 3)$ variables, dont O soit un point s — uple. Soit t une droite qui ait $s+h$ points communs avec f, réunis en O (un contact d'ordre h); étant $d>2$ et $h\geqq 2$, la droite t a en O

$$(d+1)s-2d-2$$

points communs réunis avec la hessienne de f, et, comme O est

$$[(d+1)s-2d]-\text{uple}$$

pour la hessienne, la droite a en O avec cette courbe un contact du deuxième ordre. Si $d=2$, c'est-à-dire si f est une courbe plane, h étant quelconque, ou bien si $h=0$ ou $h=1$, d étant quelconque, la droite t a en O un contact de l'ordre h avec la hessienne.

Autres propositions analogues.

Berzolari (*L.*) [P 6 *c*]. — Sur les correspondances algébriques $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ entre r points d'un espace linéaire d'un nombre quelconque de dimensions (p. 148-155).

Extension des correspondances étudiées, pour les formes de première espèce, par De Paolis (*Mém. d. Acc. di Torino*, 2e série, t. XLII, 1892, p. 495). Une telle correspondance est représentée par

$$a_{x^{(1)}}^{1^{m_1}} a_{x^{(2)}}^{2^{m_2}} \ldots a_{x^{(r)}}^{r^{m_r}} = 0,$$

et à $r-1$ points $x^{(1)}\ldots x^{(i-1)}x^{(i+1)}\ldots x^{r}$ de l'espace S_n correspondent les points $x^{(i)}$ d'une variété à $n-1$ dimensions d'ordre m_i. On obtient des propositions générales dont des cas particuliers sont les théorèmes de Kohn (*Sitzungsb. d. Akad. d. Wiss. zu Wien*, 1884); Segre (*Mém. d. Acc. di Torino*, 2e série, t. XXXVII); Sturm (*Math. Ann.*, t. XIX); Battaglini (*Mém. d. R. Acc. d. Lincei*, 3e série, t. XII); De Paolis [*Sulle involuzioni proiettive* (*Rend. d. R. Acc. d. Lincei*, 1886)] et Pasch (*Journ. f. Math.*, t. XCI).

Beltrami (*E.*) [R 5 *c*]. — A propos d'une nouvelle recherche du professeur Charles Neumann (p. 177-180).

Dans ses *Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip* (Leipzig, 1896), M. Neumann a étudié un nouveau potentiel élémentaire

$$\frac{\Sigma A e^{-\rho r}}{r}.$$

L'auteur montre que la propriété caractéristique de ce potentiel, démontrée

par M. Neumann dans le cas particulier de la loi

$$\frac{A e^{-\alpha r}}{r},$$

et qui est exprimée par

$$\Delta_2 V = \alpha^2 V - 4\pi k \psi(0),$$

où

$$\psi = A e^{-\alpha r},$$

est une conséquence du théorème général suivant, démontré par lui dans sa Note : *Sull'espressione analitica del principio di Huygens* (*Rendiconti*, 1892) :

Étant

$$U = \int K(\xi, \eta, \zeta, r) \frac{dS}{r},$$

on a

$$\Delta_2 U = \int \frac{\partial^2 K}{\partial r^2} \frac{dS}{r} - 4\pi K(x, y, r, 0).$$

Pour la loi plus compliquée

$$\frac{\Sigma A e^{-\alpha r}}{r},$$

on peut aussi déduire de la même formule générale la propriété démontrée par M. Neumann.

Tacchini (*P.*) [U]. — Taches, facules et protubérances solaires observées dans les deuxième et troisième trimestres de 1895 à l'Observatoire royal du Collège romain (p. 181-182).

Tacchini (*P.*) [U]. — Observations sur les Léonides (p. 182-183).

Tacchini (*P.*) [U]. — Observations sur la planète Vénus, faites à l'Observatoire royal du Collège romain en été de 1895 (p. 183-185).

La rotation se fait en 224,7 jours, temps égal à celui de la révolution, comme il a été annoncé par M. Schiaparelli.

Millosevich (*E.*) [U]. — Sur l'orbite de la planète (306) fondée sur quatre oppositions (p. 193-198).

Padova (*E.*) [R 8 *c* α]. — Sur le mouvement d'un corps de révolution autour d'un point de l'axe (p. 198-202).

Si la fonction potentielle des forces ne dépend que des deux angles eulériens θ et φ, la méthode de Mme Kowalefsky ne donne pas des cas nouveaux. En ne faisant pas cette restriction, l'auteur trouve deux nouveaux problèmes

qui admettent des intégrales uniformes n'ayant que des pôles dans le plan de la variable t.

Pincherle (*S.*) [H 1 *e*, ref. H 12]. — Sur les solutions conjuguées dans les équations linéaires différentielles et aux différences (p. 228-232).

On appelle *conjuguées* r solutions telles que φ étant l'une d'elles, les autres soient $x\varphi$, $x^2\varphi$, ..., $x^{r-1}\varphi$.

Pour une équation linéaire aux différences, on appelle *conjuguées* r solutions telles que φ étant l'une d'elles, les autres soient

$$x\varphi, \quad x(x+1)\varphi, \quad \ldots, \quad x(x+1)\ldots(x+r-1)\varphi.$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions conjuguées a été trouvée par Brassine (Note IIIe au *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de Sturm; Paris, 1868) pour ce qui regarde les équations différentielles, et par M. Torelli (*Rend. d. Acc. di Napoli*, 1895) pour les équations aux différences. L'auteur trouve une condition générale, comprenant ces conditions comme cas particuliers, et cela par l'application du calcul des opérations fonctionnelles suivant les principes exposés dans sa Note : *Sulle operazioni funzionali distributive* (*Rendiconti*, voir ce même Tome, 1er semestre, p. 142). La condition trouvée par l'auteur est la suivante :

Afin qu'une opération distributive A s'annule pour un système conjugué de r solutions, il est nécessaire et suffisant qu'il y ait une fonction qui annule A et ses $r-1$ premières dérivées fonctionnelles.

Ricci (*G.*) [C 4 *d*, ref. N_3 3]. — Sur la théorie des hyperespaces (p. 232-237).

Étant

$$\varphi = \sum_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

une forme différentielle à n variables, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les éléments d'un système simple covariant, pour lequel on ait l'identité

$$\sum_r \lambda^{(r)} \lambda_r = 1,$$

les équations

$$\lambda^{(r)} = \frac{dx_r}{\sqrt{\varphi}}$$

représentent une congruence de lignes tracées dans la variété φ. Les systèmes $\lambda^{(r)}$ et λ_r sont respectivement les *systèmes coordonnés contrevariant* et *covariant* de la congruence.

Soient alors

$$\lambda 1|r, \quad \lambda 2|r, \quad \ldots, \quad \lambda n|r$$

les systèmes coordonnés covariants de n congruences de lignes, orthogonales

deux à deux; on aura

$$\sum_r \lambda_h^{(r)} \lambda_k|_{rs} \begin{cases} = 0 & (h \neq k), \\ = 1 & (h = k), \end{cases}$$

d'où, par dérivation covariante,

$$\sum_r \lambda_h^{(r)} \lambda_k|_{rs} + \sum_r \lambda_k^{(r)} \lambda_h|_{rs} = 0;$$

et, en posant

$$(1) \qquad \lambda_h|_{rs} = \sum_{ij} \gamma_{hij} \lambda_i|_r \lambda_j|_s,$$

on a

$$\gamma_{hkj} + \gamma_{khj} = 0,$$
$$\gamma_{hhj} = 0.$$

Il résulte de (1) que les $\frac{n^2(n-1)}{2}$ coefficients γ_{hij} sont invariables. Ils sont liés aux systèmes coordonnés des n congruences par des équations différentielles, qui pour $n = 2$ se réduisent à une seule, celle qui donne l'expression de Liouville pour la courbure des surfaces.

En supposant que la variété φ soit contenue dans un espace de $n + m$ dimensions, et en regardant comme forme fondamentale, au lieu de φ, la forme

$$\psi = \sum_{rs}^{n+m} a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

où les a_{rs}, pour les points de φ et pour r, s non supérieurs à n, sont les mêmes qui entrent dans φ, les γ_{hij} ne changent pas de valeur; et comme toute variété peut être conçue comme renfermée dans un espace linéaire, cela amène l'auteur à une interprétation géométrique assez simple des γ_{hij}.

Ces résultats sont ensuite appliqués à des questions particulières : conditions pour que les lignes d'une congruence soient orthogonales aux variétés à $n - 1$ dimensions d'un système quelconque ($\gamma_{nkh} = \gamma_{nhk}$); conditions pour que les lignes d'une congruence soient géodésiques

$$(\gamma_{inn} = 0, \text{ étant } i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

équations fondamentales de la Géométrie différentielle dans les hyperespaces.

Sella (*A.*) [T 3 *b*]. — Sur les lois de propagation de la lumière dans les cristaux magnétiques (p. 237-232).

Tacchini (*P.*) [U]. — Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège romain pendant les deuxième et troisième trimestres de 1895 (p. 266-268).

Millosevich (*E.*) [U]. — Sur les deux comètes découvertes le 17 et le 18 novembre en Amérique (p. 268-269).

Ciani (*E.*) [P 2 *b*]. — Sur la correspondance polaire entre coniques enveloppes et coniques lieux, établie au moyen d'une quartique plane (p. 274-280).

Cette correspondance est interprétée dans l'espace S_5, dont les points et les hyperplans sont les coniques enveloppes et les coniques lieux du plan donné π, au moyen d'une polarité par rapport à une quadrique (de quatre dimensions). Les courbes invariantes de la quartique viennent ainsi se grouper deux à deux de manière que pour chaque couple les caractéristiques plückériennes conjuguées par dualité sont égales; cela a lieu pour la hessienne et le contrevariant Ψ de Clebsch; et aussi pour la steinérienne et l'enveloppe des droites joignant les points correspondants du covariant S.

Peano (*G.*) [R 8 *e*]. — Sur le mouvement d'un système où il y a des mouvements intérieurs variables (p. 280-282).

Observations sur le déplacement du pôle terrestre et sur les travaux de M. Volterra relatifs à cet argument.

Sella (*A.*) [T 3 *b*]. — Encore sur les lois de propagation de la lumière dans les cristaux magnétiques (283-288).

Enriquez (*F.*) [A 4 *e*]. — Sur les irrationnalités dont peut dépendre la résolution d'une équation algébrique $f(x, y, z) = 0$ au moyen de fonctions rationnelles de deux paramètres (p. 311-316).

Généralisation de la question résolue par Noether (*Math. Ann.*, t. III) relativement à une équation $f(x, y) = 0$.

Étant

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface rationnelle, et par cela

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v), \tag{2}$$

les φ étant des fonctions rationnelles, on veut déterminer quelles sont les irrationalités les plus simples, dans les coefficients des φ, qu'il faut ajouter pour obtenir la résolution (2). On suppose que la résolution soit inversible, c'est-à-dire qu'on puisse aussi exprimer rationnellement u et v par x, y, z. Le résultat est le suivant :

La résolution (2) peut toujours s'effectuer par des opérations rationnelles (d'élimination), des extractions de racine carrée et cubique, et par la résolution d'une des équations pour la bissection de l'argument des fonctions :

1° Abéliennes de genre 3;
2° Ou abéliennes de genre 4;
3° Ou hyperelliptiques de genre p ($p = 1, 2, \ldots$).

Les démonstrations ne sont qu'indiquées sommairement et renvoyées à un autre travail. Elles se fondent sur une transformation successive de la surface rationnelle

$$f(x, y, z) = 0$$

d'ordre n et à sections non hyperelliptiques de genre > 2, au moyen des polynomes adjoints d'ordre $n - 3$.

Viccoletti (*O.*) [H 1 *g*]. — Sur les intégrales des équations différentielles ordinaires, considérées comme des fonctions de leurs valeurs initiales (p. 316-324).

Soient $x_1^0, \ldots, x_n^0$ les valeurs initiales des n intégrales du système

$$dx_i = X_i\, dx \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Les intégrales, dont l'existence est prouvée par la méthode des approximations successives de Picard, sont des fonctions finies et continues de $x_1^0, \ldots, x_n^0$, et qui ont aussi finies et continues leurs dérivées $p^{\text{ièmes}}$ par rapport à ces valeurs, pourvu que soient finies et continues les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ des X_i par rapport aux x_r.

Il résulte de là une démonstration de l'existence de l'intégrale générale d'une équation linéaire homogène aux dérivées partielles du premier ordre; démonstration ne supposant pas que les x_i soient des fonctions analytiques.

Il en résulte aussi l'unicité des intégrales des (1).

Pizzetti (*P.*) [U 10 *a*]. — Sur la détermination effective de la surface de niveau terrestre, dans des régions limitées (p. 324-331).

Levi-Civita (*T.*) [T 5 *a*]. — Sur la distribution induite dans un cylindre indéfini par un système symétrique de masses (p. 332-336).

Le problème est ramené à l'inversion de l'intégrale définie

$$-P(z, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\zeta)\, d\zeta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2} a\, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} a^2 \sin^2\varphi}}.$$

S. R.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, DIRETTI DAL PROF. F. BRIOSCHI, Milano, tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.; série II.

Tome XVII; 1889-1890.

Vivanti (*G.*) [J 5, *ref.* Q 2]. — Fondements de la théorie des types ordonnés (1-35).

Cette théorie a été fondée par G. Cantor (*Mittheilungen zur Lehre von Transfiniten; Zeitschrift für Philosophie und philos. Kritik*, t. XCI, XCII). L'auteur rattache son travail à celui de Cantor et à celui de Schwartz (*Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen;* Halle, 1888) en ajoutant une représentation géométrique des types ordonnés, et des résultats qui regardent principalement le nombre de classes des types qui ont un nombre donné d'éléments.

Somigliana (*C.*) [T 2 *a*]. — Sur les équations de l'élasticité (37-64).

Pour les fonctions qui représentent les intégrales des équations de l'élasticité dans les corps isotropes, et pour le cas de l'équilibre, on peut établir une théorie analogue à celle des fonctions potentielles. L'auteur part du théorème de Betti

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\delta\int_S X_i u_i'' \, dS + \int_\sigma L_i U_i'' \, d\sigma\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\delta\int_S X_i'' u_i \, dS + \int_\sigma L_i'' U_i \, d\sigma\right),$$

où X_i sont les composantes des forces agissant sur la masse du corps, L_i celles qui agissent sur la surface, u_i les composantes du déplacement et U_i les valeurs des u_i à la surface, δ la densité du corps supposée constante. Il en déduit des formules qui sont dans la théorie de l'élasticité les analogues de celle de Green pour les fonctions potentielles, et par lesquelles on peut exprimer les composantes u_i du déplacement

$$u_i(x_1', x_2', x_3') = \frac{1}{4\pi\mu}\sum_{i=1}^{3}\left[\delta\int_S X_i u_i^{(0)} \, dS + \int_\sigma (L_i U_i^{(0)} + L_i^{(0)} U_i) \, d\sigma\right],$$

étant

$$u_i^{(0)} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2\left(\frac{r}{2}\right)}{\partial x_i^2} + \frac{1}{r}, \qquad u_i^{(0)} = \alpha\frac{\partial^2\left(\frac{r}{2}\right)}{\partial x_i \, \partial x_i},$$

$$L_i^{(0)} = 2\alpha\mu\left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2\left(\frac{r}{2}\right)}{\partial x_i^2} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_i}\gamma_i\right] + \mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n},$$

$$L_i^{(0)} = 2\alpha\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\left(\frac{r}{2}\right)}{\partial x_i \, \partial x_i} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_i}\gamma_i\right] + \mu\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_i}\gamma_i - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_i}\gamma_i\right],$$

$$\gamma_i = \frac{\partial x_i}{\partial n}, \qquad \alpha = \frac{2\lambda + \mu}{2(\lambda + \mu)},$$

et λ, μ deux constantes dépendant de la nature du corps.

Il en résulte que toute déformation d'un corps élastique isotrope homogène peut se décomposer en trois déformations dues respectivement aux forces de masse, aux forces à la surface et aux déplacements superficiels. Des formules pour représenter les déplacements peuvent aussi s'obtenir indépendamment du théorème de Betti, ainsi que l'auteur le fait dans le paragraphe 2. Dans le paragraphe 3, en supposant que les $u_i^{(s)}$ et les $L_i^{(s)}$ soient développables en série admettant l'intégration par termes à l'intérieur d'une sphère renfermée dans le corps donné, il déduit des développements en série pour les déplacements u_i, qui, lorsque les forces de masse sont nulles, s'expriment par une somme d'un nombre infini de déformations, dont les déplacements sont des fonctions rationnelles entières homogènes des différences $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$, $x_3 - a_3$, étant a_1 a_2, a_3 le centre de la sphère. Le paragraphe 4 et dernier contient une généralisation des résultats précédents à un espace de n dimensions. Pour $n = 2$ ces résultats ne peuvent s'appliquer, mais on peut suivre une méthode analogue, en prenant la fonction $\log \frac{1}{r}$ au lieu de $\frac{1}{r^{n-2}}$.

Pirondini (*G.*) [O 3 *i*, *ref.* O 3 *d*]. — Sur le problème consistant à déterminer la courbe dont on connaît le lieu des centres de courbure (65-79).

Ce problème, déjà traité par Serret (*Journal des Mathématiques pures et appliquées*, 1853), conduit à l'intégration d'une équation du troisième ordre, qui n'est pas intégrable même dans plusieurs cas particuliers. L'auteur résout le problème dans quelques cas particuliers. En indiquant par L le lieu des centres et par L_1 la courbe cherchée, les cas considérés par l'auteur sont les suivants :

1° L est une géodésique sur la surface polaire de L_1;

2° Les rayons de courbure de L_1 se projettent sur les tangentes de L en segments constants;

3° L est une trajectoire isogonale des génératrices de la développable polaire de L_1;

4° Les plans osculateurs de L forment, avec les plans tangents de la développable polaire L_1, un angle constant;

5° L est une trajectoire orthogonale des droites polaires de L_1, et le plan osculateur de L coupe sous un angle constant la développable polaire de L_1.

Pascal (*E.*) [G 3 *i*]. — Sur le développement des fonctions σ abéliennes impaires de genre 3 (81-111).

Le but de ce Mémoire est la détermination du terme de 3° ordre de la fonction σ abélienne impaire, correspondant à une courbe du 4° ordre de genre 3.

Un deuxième Mémoire (*Sur les formules de récurrence pour le développement des 6 abéliennes impaires à trois arguments*) est dans ce Tome à la page 197.

Predella (*P.*) [P 1, *ref.* Q 2]. — Les homographies dans un espace d'un nombre quelconque de dimensions (113-159).

Étude et classification des homographies dans un espace S_n. Dans le cas où il y a des espaces fondamentaux multiples, l'étude peut se réduire à celle des homographies générales; en supposant que les espaces multiples soient formés par des espaces infiniment rapprochés. De cette manière, les homographies sont caractérisées par les dimensions de leurs espaces fondamentaux, distincts ou superposés, et l'on peut en faire une classification en classes et sous-classes; les classes étant déterminées par le nombre et les dimensions des espaces fondamentaux, et les sous-classes par les invariants absolus. L'auteur fait aussi une étude des éléments unis essentiels d'une homographie. Après, il traite la question suivante :

Deux homographies de même sous-classe étant données dans deux espaces S_n, S_{n1} respectivement, on peut établir une correspondance homographique entre ces deux espaces, de manière à transformer l'une dans l'autre les deux homographies données. La question que l'auteur se pose est relative à la détermination de cette correspondance.

Il trouve qu'en donnant un couple de points correspondants et un certain nombre de couples d'espaces correspondants, la correspondance entre les deux espaces est déterminée. Il déduit de là une règle pour obtenir la forme réduite (canonique) d'une homographie quelconque. Du théorème relatif au passage d'une homographie à une autre il déduit le théorème de Weierstrass sur la transformation des formes bilinéaires

$$(1) \qquad \sum a_{ik} x_i \xi_k, \qquad \sum b_{ik} x_i \xi_k,$$

dans les deux autres

$$(2) \qquad \sum a'_{ik} X_i \Xi_k, \qquad \sum b'_{ik} X_i \Xi_k,$$

et démontre, sans recourir au développement en série, la seconde partie de ce théorème, c'est-à-dire que si les déterminants $|a_{ik} - rb_{ik}|$, $|a'_{ik} - rb'_{ik}|$ ont les mêmes diviseurs élémentaires, on peut passer des (1) aux (2). Il complète ce théorème en ajoutant que, dans l'une des deux transformations servant à passer des (1) aux (2), il y a Σh^2 coefficients arbitraires, les $h - 1$ étant les dimensions des espaces fondamentaux distincts ou superposés de l'homographie déterminée en S_n par les deux formes bilinéaires

$$\sum a_{ik} x_i \xi_k = 0, \qquad \sum b_{ik} x_i \xi_k = 0,$$

lorsqu'on fait correspondre entre eux deux points de S_n, qui correspondent à un même point de S'_n.

Les coefficients de l'homographie par laquelle on passe d'une homographie à une autre, appartenant à une même sous-classe, satisfont à des équations linéaires, et il y en a $n + 1 + \Sigma h(h - 1)$ qui sont arbitraires.

2ème Partie.

Gerbaldi (*F.*) [L, 18 *a*]. — Sur le système de deux coniques. (161-196).

Invariants et covariants du système de deux formes quadratiques ternaires, et leurs relations. Faisceau de coniques et système à quatre tangentes communes. Les coniques invariantes du système. Coniques polaires réciproques. Coniques bitangentes. Coniques conjuguées. Représentation des coniques invariantives sur les points d'un plan. Réalité des coniques invariantives.

Pascal (*E.*) [G 3 *i*]. — Sur les formules de récurrence pour le développement de σ abéliennes impaires à trois arguments. Mémoire II. (197-224).

Mémoire faisant suite à l'autre, inséré à la page 81 de ce Tome. Relations récurrentes déduites de l'équation différentielle de Wiltheiss et démonstration de la propriété fondamentale que les σ impairs sont des fonctions entières des coefficients des trois formes D, Φ, Ω.

Pirondini (*G.*) [O 6 *k*]. — Sur les surfaces de translation. (225-255).

Une surface de translation est engendrée par une courbe plane (*génératrice*) de forme invariable, qui se meut sans rotation, tandis que l'un de ses points décrit une courbe donnée (*directrice*). L'auteur suppose que la génératrice et la directrice soient des courbes quelconques à double courbure, et démontre quelques propriétés des surfaces ainsi engendrées; puis il traite le problème de la déformation de ces surfaces.

Pascal (*E.*) [G 3 *b*]. — Sur la théorie des fonctions σ hyperelliptiques paires et impaires de genre 3. Mémoire III. (257-305).

Klein (*F.*) [V 1 *a*]. — Considérations comparatives sur des recherches géométriques récentes. (307-343).

Traduction du Programme publié à l'occasion de la réception à la Faculté philosophique et dans le Sénat de l'Université d'Erlangen, 1872.

M. Klein relève l'importance de la notion de groupe de transformations et en déduit les relations qui ont lieu entre divers genres de recherches géométriques.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Tome II: année 1906 [1].

Jouguet (*M.*). — Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz. (5-86). (Suite du Mémoire analysé, t. XXXV, p. 27).

Rémoundos (*G.*). — Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches. (87-107).

L'auteur appelle *algébroïde* toute fonction ayant un nombre fini de branches dans tout le plan. Le but de ce Mémoire est d'étendre aux fonctions algébroïdes certaines propriétés des fonctions uniformes.

Soit une fonction algébroïde donnée par l'équation

$$u^\nu + A_1(z)u^{\nu-1} + A_2(z)u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(z)u + A_\nu(z) = 0.$$

Si les fonctions $A_1, A_1, \ldots, A_\nu$ sont d'ordre fini et si ρ est le plus grand des ordres de ces fonctions, la fonction algébroïde u sera *d'ordre* ρ.

Si $M(r)$ désigne le module maximum d'une branche quelconque de la fonction sur un cercle de rayon r, l'inégalité

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

où ε désigne un nombre positif, aussi petit que l'on veut, est satisfaite à partir d'une certaine valeur de r; de même l'inégalité

$$M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

est satisfaite pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment.

Pour le module minimum, on a le résultat suivant qui étend aux fonctions algébroïdes un théorème de M. Hadamard sur les fonctions uniformes.

Si l'on exclut du cercle de rayon r certains arcs dont la longueur totale tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ comme e^{-r^α} (α étant un nombre positif quelconque et inférieur à ε), tous les autres points du cercle satisfont à l'inégalité

$$|u(r)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

et cela pour toutes les branches de la fonction multiforme $u(r)$.

L'auteur étend aux fonctions algébroïdes un théorème fondamental de M. Borel sous la forme suivante :

Une identité de la forme

$$a_1(z)e^{H_1(z)} + a_2(z)e^{H_2(z)} + \ldots + a_n(z)e^{H_n(z)} = 0,$$

[1] Voir *Bulletin*, t. XXXV, p. 17.

où les fonctions algébroïdes $a_i(z)$ croissent moins vite que e^{z^r}, tandis que les fonctions aussi algébroïdes $H_i(z) - H_k(z)$ croissent plus vite que $r^{2(r)^{1+\alpha}}$, entraine la nullité de tous les coefficients $a_i(z)$.

Soit maintenant $a(z)$ une fonction algébroïde qui a un nombre fini de pôles et a un nombre quelconque. Si la fonction $a(z) - a$ a un nombre fini de zéros, le nombre a est dit *exceptionnel*. Dans des travaux antérieurs, l'auteur a montré que le nombre de ces nombres exceptionnels ne peut pas surpasser le double du nombre des branches. On forme alors une fraction algébrique $q(z)$ ayant les mêmes zéros et les mêmes pôles que $a(z) - a$; on pourra poser

$$a(z) - a = q(z)\, e^{H(z)},$$

$H(z)$ sera fini à distance finie. En général $H(z)$ a un nombre infini de branches; dans le cas contraire, le nombre a est *doublement exceptionnel*. On a alors le théorème suivant :

Il est impossible d'avoir deux nombres doublement exceptionnels finis.

L'auteur applique ces théories générales aux équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q sont des polynomes par rapport à x et y. Soient alors y_1, y_2, y_3, y_4 quatre intégrales distinctes et leur rapport anharmonique

$$R(x) = \frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)};$$

il obtient le résultat suivant :

Si y_1, y_2, y_3, y_4 sont des fonctions algébroïdes, tout rapport anharmonique $R(x)$ de ces intégrales peut se mettre sous la forme

$$R(x) = q(x)\, e^{H(x)},$$

$q(x)$ étant une fonction algébrique, $H(x)$ une fonction qui reste finie à distance finie et dont la dérivée $H'(x)$ est une fonction algébroïde.

Combebiac (G.). — Sur les actions exercées par un fluide parfait incompressible sur ses parois. (109-134).

L'objet de ce Mémoire est d'établir la formule générale exprimant les actions exercées par un fluide parfait incompressible sur les parois, dans le cas où le fluide est animé d'un mouvement quelconque, cyclique ou acyclique, rotationnel ou irrotationnel.

La solution du problème posé a été poursuivie exclusivement en employant l'analyse quaternionienne, qui introduit dans la question de grandes simplifications.

L'auteur considère un fluide parfait incompressible, dans lequel peuvent baigner des corps mobiles et qui occupe un espace limité par des parois mobiles ou s'étendant à l'infini, mais, dans ce dernier cas, avec la condition que le fluide est *au repos à l'infini*.

On suppose que les forces extérieures qui s'exercent sur les éléments de volume admettent une fonction potentielle.

Le mouvement d'un tel fluide réalise les conditions suivantes :

1° Toute particule du fluide qui se trouve, à un instant déterminé, en contact avec les parois, conserve cette propriété ;

2° L'accélération aux divers points du fluide admet une fonction potentielle.

Dans ces conditions, le mouvement du fluide est déterminé par les données suivantes :

Mouvement des parois ;

Rotation élémentaire aux divers points du fluide à un instant déterminé ;

Valeur des modules de circulation à un instant déterminé.

La vitesse v en tout point du fluide peut être décomposée en deux autres : une composante v_0 qui dépend des paramètres qui fixent la position des parois et une composante v_1 qui dépend des composantes normales des vitesses aux divers points des parois. La fonction T de Lagrange est égale à la somme de celles qui correspondent à chacune de ces vitesses. C'est en partant de cette fonction T que l'auteur obtient les équations du problème.

Poincaré (*H.*). — Sur les périodes des intégrales doubles. (135-189).

Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface algébrique, et soit

$$\mathfrak{I} = \int\int \frac{P\,dx\,dy}{F_z} = \int\int \frac{P\,dy\,dz}{F_x} = \int\int \frac{P\,dz\,dx}{F_y}$$

une intégrale double relative à cette surface; P étant une fonction rationelle de x, y, z. L'intégrale est prise le long d'un domaine K défini de la façon suivante : on coupe la surface par un plan π ayant pour équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \varepsilon.$$

Soit C la courbe d'intersection ; sur la surface de Riemann correspondant à cette courbe, on prend un cycle fermé k ; quand le plan π varie d'une manière continue, ce cycle k variera aussi d'une manière continue, l'ensemble des positions de ce cycle forme le domaine à deux dimensions K.

On obtient alors

$$d\mathfrak{I} = A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma + E\,d\varepsilon,$$

A, B, C, E étant des intégrales abéliennes prises le long du cycle k.

L'intégrale $\mathfrak{I}$ est une fonction multiforme des variables α, β, γ, ε, parce que les cycles k s'échangent entre eux lorsque les variables α, β, γ, ε reviennent à leurs valeurs initiales en tournant autour de points singuliers, et parce que l'intégrale $\mathfrak{I}$ prend deux valeurs différentes, si entre ces deux chemins il y a un point singulier. Ces points singuliers correspondent au cas où le plan π est tangent à la surface.

Soient $k_1, k_2, \ldots, k_{2p}$ les cycles fondamentaux de la surface de Riemann; $A_1, A_2, \ldots, A_{2p}$ les valeurs de l'intégrale A correspondant à chacun de ces

cycles: après une rotation autour d'un point singulier, ces cycles se transforment en d'autres qui sont des combinaisons des cycles fondamentaux, et les périodes A_i subissent une transformation linéaire à coefficients entiers; A est une fonction linéaire de A_1, A_2, A_{2p}; après la rotation, A prend une nouvelle valeur qu'on obtient en effectuant sur cette forme linéaire la transformation linéaire des périodes; les fonctions B, C, D, E, leurs dérivées d'ordre quelconque par rapport aux variables α, β, γ, ε subissent la même transformation linéaire. On arrive donc au théorème suivant :

Entre $2p+1$ dérivées partielles quelconques de $\mathfrak{J}$ (la fonction $\mathfrak{J}$ étant exclue) il y a toujours une relation linéaire dont les coefficients sont des fonctions rationelles de α, β, γ, ε.

Soient $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, ..., $\mathfrak{J}_{2p}$ les valeurs de $\mathfrak{J}$ qui correspondent aux déterminations A_1, A_2, ..., A_{2p} de A. Si, par une rotation autour d'un point singulier, A_i se change en

$$\sum \lambda_{ik} A_k,$$

$\mathfrak{J}_i$ se changera en

$$\sum \lambda_{ik} \mathfrak{J}_k + H_i,$$

H_i étant une constante.

Si l'on considère q points singuliers M_1, M_2, ..., M_q, quand on tournera autour de M_r une combinaison de la forme

$$\sum \lambda_{rk} \mathfrak{J}_k$$

se change en

$$\sum \mu_{rk} \mathfrak{J}_k + H_r,$$

les H_r étant des constantes.

Soit C_r un cycle de la surface de Riemann correspondant aux valeurs initiales de α, β, γ, ε et $\Sigma h_{rk} A_k$ la valeur correspondante de A; par une rotation autour du point singulier M_r, le contour C_r engendre un cycle à deux dimensions K_r; H_r est l'intégrale double prise le long du domaine K_r.

Si maintenant ν_1, ν_2, ..., ν_q sont des entiers tels que

$$\sum \nu_r (\lambda_{r1} - \mu_{r1}) = \sum \nu_r (\lambda_{r2} - \mu_{r2}) = \ldots = \sum \nu_r (\lambda_{r2p} - \mu_{r2p}) = 0,$$

l'expression

$$\sum \nu_r H_r$$

sera *une période de l'intégrale double;* elle correspond au cycle *ferme*

$$\sum \nu_r K_r.$$

Les points singuliers correspondent au cas où le plan variable π est tangent à la surface; mais il peut y avoir des singularités d'ordre plus élevé; il peut arriver, par exemple, que le plan soit plusieurs fois tangent à la surface. Or, M. Picard a démontré que, par une transformation birationnelle convenable,

une surface quelconque peut être ramenée à une surface *normale*, c'est-à-dire à une surface qui a une courbe double et des points triples isolés. Au point de vue tangentiel, on peut donc se limiter aux singularités suivantes :

1° Des plans tangents doubles en nombre simplement infini;
2° Des plans tangents triples en nombre fini.
3° Des plans tangents d'inflexion.

Supposons d'abord que le plan π ait un contact simple en un point M_i. Lorsque le point analytique α, β, γ, ε tourne autour de M_i pour revenir à sa position initiale, les cycles fondamentaux s'échangent. M. Picard a montré qu'on peut choisir les cycles fondamentaux

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_{2p},$$

de telle sorte qu'ils se changent en

$$k_1, \quad k_2 + k_1, \quad k_3, \quad \ldots, \quad k_{2p}.$$

K_1 est le *cycle évanouissant* qui correspond au point M_i. Dans le plan figuratif de la variable qui entre dans α, β, γ, ε, joignons un point fixe O au point M : on forme ainsi un lacet rectiligne L_i; l'intégrale $\mathfrak{I}$ se réduit à l'intégrale $j(h_i)$ prise suivant le chemin rectiligne OH_i et en supposant le cycle k remplacé par le cycle évanouissant K_1.

Si le point M_i correspond à un plan tangent double ou triple, il y aura deux ou trois cycles évanouissants correspondant aux deux ou trois points de contact de ce plan avec la surface; il y aura donc deux ou trois valeurs possibles pour $j(L_i)$.

L'auteur suppose ensuite que le plan π conserve une direction fixe, parallèle au plan des xz. A chaque valeur y_1 de y correspond une section de la surface et une surface de Riemann correspondante $S(y_2)$. Toutes ces surfaces ont m points communs Q_1, Q_2, ..., Q_m situés à l'infini. Ils sont donnés par l'équation

$$F_m(x, z) = 0,$$

F_m représentant l'ensemble des termes de degré m en x et z.

Dans le plan figuratif de la variable y, marquons les points singuliers ε_1, ε_2, ..., ε_k qui correspondent aux plans tangents à la surface. On forme les lacets h_1, h_2, ..., h_k qui joignent l'origine à ces points singuliers. Toute période sera une combinaison linéaire à coefficients entiers des intégrales $j(h_i)$.

Il reste à trouver le nombre des périodes distinctes. Pour arriver à ce résultat, l'auteur indique d'abord une construction des cycles; puis cherche les homologies qui peuvent exister entre ces cycles.

Ces relations identiques correspondent aux $2p$ cycles de la surface de Riemann et aux lignes allant du point Q_1, aux points Q_2, ..., Q_m situés à l'infini. Le nombre total des homologies est donc $2p + m - 1$.

Mais ces homologies ne sont pas distinctes; il y a autant de relations identiques entre ces homologies qu'il y a de *cycles invariants*.

En résumé, soient N le nombre des points singuliers;
p le genre de la surface de Riemann $S(y)$;
q le nombre des cycles invariants;
m le nombre des points à l'infini communs aux surfaces $S(y)$: le nombre

des cycles à deux dimensions est

$$N + q = 4p - m.$$

On peut appliquer ces principes à la surface du troisième degré. Au lieu de considérer des sections parallèles de cette surface, on peut couper la surface par des plans passant par une droite fixe D. Quelle que soit la position de la droite D, le nombre des cycles à deux dimensions doit rester le même. Si la droite D a une position quelconque, on a

$$N = 12, \qquad q = 0, \qquad p = 1, \qquad m = 3.$$

Le nombre des cycles est 7. On vérifie que si la droite D prend des positions particulières, le nombre des cycles reste toujours égal à 7.

Dumas (*G.*). — Sur quelques cas d'irréductibilité des polynomes à coefficients rationnels. (191-258).

L'auteur rappelle d'abord quelques propriétés des séries de M. Hensel qui sont de la forme

$$a_\rho p^\rho + a_{\rho+1} p^{\rho+1} + \ldots + a_{\rho+k} p^{\rho+k} + \ldots$$

où p est un nombre premier quelconque, a_ρ, $a_{\rho+1}$, ... sont égaux à 0, 1, 2, ..., ou $p-1$; le premier exposant ρ est un nombre entier positif, négatif ou nul; il n'y a donc dans la suite qu'un nombre limité de termes à exposants négatifs. Si ρ est négatif, la suite est dite à *caractère rationnel*; si ρ est nul ou positif, elle est à *caractère entier*.

La suite ainsi écrite est dite *réduite* parce que les coefficients des termes sont compris entre 0 et $p-1$. Si l'on a une suite

$$A = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$$

où les a sont des entiers quelconques, on peut trouver une suite reduite *équivalente* à la suite donnée.

On définit ensuite la somme, la différence, le produit, le quotient de deux suites.

Si A et B sont deux entiers positifs, on détermine des nombres a_0, a_1, ..., compris entre 0 et $p-1$, satisfaisant aux égalités

$$A = A_0 p + B a_0,$$
$$A_0 = A_1 p + B a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et l'on pose

$$(p) \qquad \frac{A}{B} = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$$

L'auteur considère ensuite des polynomes de la forme

$$P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_\nu x^{n-\nu} + \ldots + A_n$$

dans lesquels les coefficients sont des suites de M. Hensel. La définition de la réductibilité est la même que dans un domaine rationnel.

Si l'on écrit le polynome $P(x)$ sous la forme

$$P(x) = \sum A_{\alpha\beta} p^{\alpha} x^{\beta},$$

on fait correspondre à chaque terme $A_{\alpha\beta} p^{\alpha} x^{\beta}$, le point du plan qui a pour abscisse β et pour ordonnée α. Tous ces points sont situés sur le contour ou au-dessus d'une certaine ligne brisée qu'on appelle le *polygone* relatif à $P(x)$. On a alors le théorème suivant :

Tout polynome $P(x)$, *dont le polygone n'est pas rectiligne, est nécessairement réductible. A l'un quelconque des côtés du polygone,* $A_{i-1} A_i$ *par exemple, correspond un diviseur de* $P(x)$, *dont le polygone se réduit à une droite de même longueur et de même inclinaison que* $A_{i-1} A_i$.

La deuxième Partie de ce travail est consacrée à l'étude des polynomes à coefficients rationels. Soit

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n;$$

si l'on remplace chaque coefficient a_i par la suite de M. Hensel qui lui correspond, on obtient un polynome $F(x)$ qui est dit *équivalent à* $f(x)$ *dans le domaine du nombre premier* p.

Si $f(x)$ est réductible, il en sera de même de $F(x)$; par conséquent si $F(x)$ est irréductible, il en sera de même de $f(x)$. On a ainsi une méthode qui permet d'établir simplement l'irréductibilité de certains polynomes.

Bachelier (*L.*). — Théorie des probabilités continues. (259-327).

Les principes qui servent de base à ce travail peuvent se ramener à deux conceptions : 1° la supposition de la continuité de la probabilité; 2° la réduction de tous les problèmes à un type unique, au problème relatif au jeu.

On connaît les inconvénients que présentent les formules élémentaires qui donnent la probabilité, lorsque le nombre des épreuves est très grand. Ces formules contiennent des factorielles dont le calcul devient impraticable, quand le nombre des épreuves n'est pas très petit. Ensuite ces formules ne sont pas expressives, elles ne donnent aucune idée des lois de la variation de la probabilité avec le nombre des épreuves.

Depuis longtemps, on a remplacé les factorielles par des valeurs approchées qui sont continues et expressives. Le point de départ ici est tout autre, on considère les probabilités comme continues *a priori*.

S'il s'agit d'un nombre très grand d'épreuves μ, on peut supposer que celles-ci se suivent à des intervalles de temps infiniment petits, égaux, et considérer la variable μ comme représentant le temps total.

Lorsqu'un problème n'est pas explicitement relatif à un jeu, on peut le considérer comme le cas particulier d'un problème relatif à un jeu. Il suffit de remarquer que, s'il s'agit uniquement de probabilités $p_1, p_2, \ldots$ on augmente la généralité du problème en supposant qu'à chacune des probabilités corresponde un gain ou une perte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Le problème proposé n'est que le cas particulier pour lequel les α sont égaux à l'unité.

On imagine un jeu fictif, continu, tel que, s'il doit être joué μ parties, les gains ou les pertes de chaque joueur soient supposés continus.

Si les conditions du jeu sont identiques à chaque partie ou pour chaque élément $d\mu$, on dit qu'il y a *uniformité*.

Si les conditions varient d'une partie à l'autre suivant une loi donnée à l'avance, dépendant uniquement du rang occupé par cette partie, on dit qu'il y a *indépendance*.

Si les conditions relatives à chaque partie dépendent des faits qui peuvent se produire dans les parties antérieures, on dit qu'il y a *connexité*.

Si les variables qui représentent les gains des joueurs peuvent prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, les probabilités sont dites du *premier genre;* si l'une de ces variables est limitée dans un sens, les probabilités sont dites du *second genre;* si une variable est limitée dans les deux sens, les probabilités sont du *troisième genre*. Enfin, les probabilités sont de *genres supérieurs*, quand deux ou plusieurs variables sont limitées.

L'auteur étudie un certain nombre de problèmes relatifs à ces différents types. On obtient, tout de suite, les intégrales qui donnent la solution du problème en appliquant la théorie des probabilités composées. On obtient ainsi des relations curieuses entre certaines intégrales.

Humbert (*G.*). — Sur les fonctions abéliennes singulières d'invariants huit, douze et cinq. (329-355).

L'auteur établit les relations particulières qui existent entre les valeurs des dix thêtas normaux du premier ordre pour la valeur nulle des arguments, pour les fonctions abéliennes singulières de deux variables, dont les invariants sont respectivement huit, douze, quinze. Les quatre paires de périodes sont désignées par 1, 0; 0, 1; g, h; h, g'; les notations employées sont celles de Weierstrass.

Dans le cas de l'invariant huit, on a $g' = 2g$. Cela posé, on a d'une manière générale

$$4\theta_0^2(2g, 2h, 2g') = \theta_0^2 + \theta_{12}^2 - \theta_{34}^2 - \theta_{56}^2.$$

Mais si $g' = 2g$, on vérifie en développant en séries que

$$2\theta_{56}(2g, 2h, 2g') = \theta_{56} - \theta_{12}.$$

En remplaçant, on obtient une relation quadratique; on en obtient cinq autres d'une manière analogue. On a les six équations

$$\theta_{34}^2 + \theta_0^2 = 2\theta_{56}\theta_{12}, \qquad \theta_{31}^2 + \theta_{24}^2 = 2\theta_{56}\theta_{34}, \qquad \theta_{56}^2 - \theta_{34}^2 = 2\theta_{31}\theta_{12},$$
$$\theta_{34}^2 - \theta_0^2 = 2\theta_{34}\theta_{56}, \qquad \theta_{31}^2 - \theta_{24}^2 = 2\theta_{12}\theta_{56}, \qquad \theta_{56}^2 - \theta_{34}^2 = 2\theta_{56}\theta_{31}.$$

Si l'on tient compte des équations biquadratiques générales, on tire

$$\theta_{56}^2 = \theta_{34}^2 + \theta_{12}^2 + \theta_0^2.$$

Dans le cas de l'invariant douze, on a $g' = 3g$, les relations entre les dix thêtas sont les suivantes :

$$\theta_{56}^2 + \theta_{34}^2 - \theta_{24}^2 - \theta_{31}^2 = 2\theta_{34}\theta_{31},$$
$$\theta_{56}^2 + \theta_{31}^2 - \theta_{24}^2 - \theta_{34}^2 = 2\theta_{56}\theta_{24},$$
$$\theta_{56}^2 - \theta_{24}^2 - \theta_{34}^2 - \theta_{31}^2 = 2\theta_{31}\theta_{24}.$$

Si l'on pose

$$U = lu + 3kv, \qquad V = ku + lv,$$

l et k étant des entiers, solutions de l'équation de Pell

$$l^2 - 3k^2 = 1,$$

toute fonction abélienne $f(u, v)$ devient une fonction abélienne $F(U, V)$ aux périodes 1, 0; 0, 1; G, H; H, G′ et l'on a encore $G' = 3G$. On a ainsi une série de transformations singulières de degré un; toutes ces transformations sont des puissances de la transformation T_1 qui correspond à $l = 2$, $k = 1$.

On obtient des formules très simples pour exprimer les nouveaux θ d'arguments nuls, à l'aide des anciens quand on effectue la transformation T_1.

Dans le cas de l'invariant cinq, on a

$$g' = h - g.$$

On trouve dix relations du troisième degré entre les θ d'arguments nuls.

Toutes ces relations conduisent à des conséquences arithmétiques intéressantes; pour les invariants huit ou douze, ces consequences concernent les décompositions des nombres du corps quadratique $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ en sommes de carrés de deux nombres appartenant au même corps; dans le cas de l'invariant cinq, on obtient des propositions, sur les décompositions en somme de trois carrés des nombres du type $M + \frac{1}{2} N(1 + \sqrt{5})$, où M et N sont des entiers ordinaires.

Adhémar (*R. d'*). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique. (357-379).

L'auteur étudie l'équation

$$A(u) = F(x, y, z),$$

où A représente l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Il cherche l'intégrale *réelle*, déterminée par des données sur une frontière réelle.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point A;

$$z' = z - z_0, \qquad x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0,$$
$$r^2 = x'^2 + y'^2,$$
$$V = \log\left[\frac{z'}{r} - \sqrt{\left(\frac{z'}{r}\right)^2 - 1}\right].$$

L'intégrale est donnée par la formule

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial \mathfrak{I}_A}{\partial z_0},$$

$\mathfrak{I}_A$ étant une intégrale triple étendue à un certain domaine

$$\mathfrak{I}_A = \iiint F(x, y, z) V_A \, dz.$$

La fonction inconnue u se présente sous la forme intéressante de la différence finie de deux termes infinis.

L'auteur prouve que la fonction u ainsi définie possède les deux propriétés suivantes :

1° Elle prend la valeur donnée à la frontière ;
2° Elle satisfait à l'équation

$$A(u) = F(x, y, z).$$

Dulac (*H.*). — Sur les points dicritiques. (381-402).

Ce Mémoire est consacré à l'étude des intégrales d'une équation différentielle

$$X(x, y)\frac{dy}{dx} = Y(x, y),$$

dans le voisinage d'un point *dicritique*. Si l'origine est un point dicritique, cette équation peut se mettre sous la forme

$$[x A(x, y) + \varphi_n(x, y) + \ldots]\frac{dy}{dx} = y A(x, y) + \psi_n(x, y) + \ldots,$$

où A, φ_n, φ_{n+1}, ..., ψ_n ... sont des polynomes homogènes en x et y : A étant de degré $n-2$, φ_n et ψ_n de degré n.

L'auteur examine d'abord le cas ou le point dicritique ne présente pas de *directions singulières*, c'est-à-dire le cas où il n'existe pas de solutions communes aux deux polynomes homogènes

$$A(x, y) \quad \text{et} \quad y\varphi_n(x, y) - x\psi_n(x, y).$$

On a alors les résultats suivants :

1° *On peut trouver un nombre* ε *tel que, si l'on a* $|x_0| < \varepsilon$, $|y_0| < \varepsilon$, *l'intégrale de l'équation correspondant aux valeurs initiales* x_0, y_0 *est, pour* $|x| < |x_0|$, *ou bien holomorphe et tend vers zéro avec* x, *ou bien algébroïde, et alors une au moins de ses déterminations tend vers* 0 *avec* x.

2° *Toutes les déterminations de l'intégrale considérée tendent vers* 0 *avec* x, *si* x *est en facteur dans le coefficient de* $\frac{dy}{dx}$.

Ces résultats peuvent subsister partiellement si le point dicritique présente des directions singulières. Ainsi le résultat 2° subsiste, pourvu que $A(x, y)$ ne contienne pas x en facteur.

Jordan (*C.*). — Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires. (403-438).

Soit

$$R = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m$$

un réseau dérivé de m formes quadratiques φ_1, φ_2, ..., φ_m des n variables x_1, x_2, ..., x_n. On peut se proposer de le réduire à une forme canonique par des transformations linéaires effectuées tant sur les x, d'une part, que sur les λ, d'autre part.

On peut évidemment se borner au cas où les fonctions φ sont linéairement distinctes et où il n'est pas possible de faire disparaître une variable de toutes les fonctions φ par une même substitution linéaire. Soit alors N_{mn} le nombre des types distincts de réseaux R.

Si $m > \frac{n(n+1)}{2}$, les fonctions φ ne sont pas linéairement indépendantes, donc $N_{mn} = 0$; si $m = \frac{n(n+1)}{2}$, on a évidemment $N_{mn} = 1$. Cela posé, l'auteur traite en détail les deux cas suivants :

1° $m = 2$,

2° $n = 3$.

I. *Cas de* $m = 2$. — On a un faisceau de la forme

$$F = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2.$$

Ce faisceau F peut être *simple* ou *composé*. Il est composé si les variables peuvent être choisies de manière à se répartir en plusieurs séries

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots; \qquad y_1, \quad y_2, \quad \ldots; \qquad z_1, \quad z_2, \quad \ldots$$

telles que l'on ait

$$\varphi_1 = X_1 + Y_1 + \ldots, \qquad \varphi_2 = X_2 + Y_2 + \ldots,$$

X_1, X_2 étant des fonctions des x seuls; Y_1, Y_2 des y seuls, etc.

Si le faisceau F est simple, deux cas peuvent se présenter :

1° Le faisceau F contient des formes dont le discriminant est différent de zéro; 2° Toutes les formes du faisceau F ont un discriminant nul (ce cas ne peut se présenter que si n est impair).

Dans le premier cas, on peut prendre comme bases du faisceau les formes A_x^n, B_x^n qui ont les valeurs :

1° n pair

$$A_x^n = 2(x_1 x_2 + x_3 x_4 + \ldots + x_{n-1} x_n),$$
$$B_x^n = 2(x_2 x_3 + x_4 x_5 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1}) + x_n^2,$$

2° n est impair

$$A_x^n = 2(x_1 x_2 + x_3 x_4 + \ldots + x_{n-1} x_{n-1}) + x_n^2,$$
$$B_x = 2(x_2 x_3 + x_4 x_5 + \ldots + x_{n-1} x_n).$$

Dans le deuxième cas, on peut prendre comme bases du faisceau les formes

$$C_x^n = 2(x_1 x_2 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1}),$$
$$D_x^n = 2(x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n).$$

Après une étude complète des faisceaux composés, l'auteur arrive aux résultats suivants :

Pour $n = 2$, on a les deux types

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \quad \text{et} \quad \lambda_1 x_1 x_2 + \lambda_2 x_2^2.$$

Pour $n = 3$, on a six types; pour $n = 4$, on en a 14, etc.

II. *Cas de* $n = 3$. — On a un réseau de forme ternaire. On a déjà

$$N_{m3} = 0, \quad m > 6, \quad N_{63} = 1, \quad N_{13} = 1, \quad N_{23} = 6;$$

il reste à examiner les trois cas suivants : $m = 3, 4, 5$.

Si $m = 3$, on a

$$R = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3.$$

Désignons par P le point du plan qui a pour coordonnées homogènes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. A chaque point P on fait correspondre la conique dont l'équation est $R = 0$, c'est la *conique du point* P. Le discriminant Δ de la forme R est du troisième degré en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; le lieu des points P dont la conique est décomposable en deux droites est donc une cubique $\Delta = 0$. C'est cette cubique qui sert de base à la classification des réseaux R. L'auteur examine successivement les cas où la cubique est indécomposable, avec ou sans rebroussement; le cas où la cubique se décompose en une droite et une conique, puis en trois droites distinctes ou confondues; enfin le cas où Δ est identiquement nul. On trouve ainsi treize types distincts.

Si $m = 4$, on a

$$R = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4.$$

Parmi les coniques du réseau, il en est une au moins qui se réduit à une droite double. Les réseaux sont classés d'après le nombre de leurs droites doubles. En examinant successivement tous les cas, on trouve *huit* types réduits.

Si $m = 5$, on a

$$R = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4 + \lambda_5 \varphi_5.$$

On classe encore les divers types en tenant compte des propriétés des droites doubles du réseau. On trouve *cinq* types distincts.

C. G.

ACTA MATHEMATICA.

Tome XXIV [1].

Bendixson (*I.*) [H 1 *h*]. — Sur les courbes définies par des équations différentielles. (1-88).

L'auteur complète les célèbres recherches publiées par M. Poincaré, sous le même titre, dans le *Journal de Mathématiques*. Il les étend d'abord au cas où l'équation n'est pas analytique et traite, d'autre part, certaines singularités exceptionnelles, non étudiées dans les Mémoires de M. Poincaré.

CHAPITRE I. — *Théorèmes généraux sur les courbes définies par des équations différentielles.* — Rappel des théorèmes d'existence des solutions pour

[1] Voir *Bulletin*, 2e série, t. XXXV, 2e Partie, p. 179.

les équations différentielles

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Y(x, y), \end{cases}$$

à l'aide de la méthode d'approximations successives de M. Picard, les seules hypothèses faites sur X, Y étant que ces fonctions sont continues et admettent des dérivées du premier ordre et continues, le tout dans une certaine aire A. On n'étudiera d'ailleurs que les *caractéristiques* [courbes satisfaisant aux équations (1)] ou les *demi-caractéristiques* (parties des caractéristiques correspondant aux seules valeurs de t positives ou — ce qui revient au même — supérieures à un nombre t_0) qui ne sortent pas de A.

Continuité des solutions par rapport aux données initiales (démonstration de M. Lindelöf).

Après avoir étudié le cas où la caractéristique tend vers un point déterminé, lequel est forcément un point singulier de l'équation, on arrive immédiatement au théorème des *cycles limites : toute caractéristique intérieure à* A *qui ne tend pas vers un point est fermée ou asymptotique à une trajectoire fermée* (premier résultat fondamental de M. Poincaré), aux relations des caractéristiques fermées avec les points singuliers.

Une discussion générale des allures des différentes trajectoires qui passent dans le voisinage d'un point singulier P, à l'aide des « régions nodales » qu'on peut délimiter autour de ce point, est présentée *sans faire intervenir les développements de* X, Y. Les conclusions ainsi obtenues conserveront donc leur validité, même pour des singularités d'ordre plus élevé que les singularités ordinaires. C'est ainsi, par exemple, que tout point singulier isolé auquel n'aboutit aucune caractéristique, est nécessairement un *centre*. Ce mot est, toutefois, pris dans un sens un peu différent de celui qu'il a pour M. Poincaré : un point singulier P sera qualifié *centre*, dès qu'il existe une infinité de caractéristiques fermées entourant P d'aussi près qu'on veut (sans que *toutes* les trajectoires voisines de P soient assujetties à se fermer autour de ce point).

Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsqu'il existe des caractéristiques aboutissant en P, on est conduit à dire d'une quelconque d'entre elles, soit qu'elle finit en P (lorsque les caractéristiques voisines aboutissent également en P) soit qu'elle *traverse* P et est prolongée au delà de ce point par une autre branche qui en repart (lorsque les caractéristiques voisines, ou au moins certaines d'entre elles, ne passent pas en P).

Le nombre des caractéristiques qui traversent P est toujours fini.

Ces résultats, comme les précédents, sont obtenus sans faire, sur la forme des fonctions X, Y, d'autres hypothèses que celles qui ont été faites en commençant.

Chapitre II. — *Théorèmes généraux relatifs aux cas où* X *et* Y *sont des fonctions holomorphes.* — Soit maintenant supposé que, autour du point singulier (qu'on place à l'origine des coordonnées), les développements des fonctions X, Y commencent par des termes d'ordre donné quelconque m.

On arrive, dans ces conditions (en étudiant, sur une caractéristique, le maximum ou le minimum d'une fonction telle que x ou $ax^2 + by^2$), à séparer les trajectoires qui traversent (au sens qui vient d'être indiqué) le point singulier par des arcs de courbes dont l'équation peut être écrite *a priori*. Dès lors, on

peut avoir une limite supérieure de leur nombre : limite supérieure qui est effectivement atteinte, par exemple, dans le cas d'un *col*.

On démontre que les caractéristiques aboutissant en P y aboutissent toutes avec des tangentes déterminées (dont les coefficients angulaires ne peuvent recevoir qu'un nombre fini de valeurs calculables *a priori*) ou tournent toutes en spirale autour de P (cas où le point P est un *foyer*).

Le nombre c des caractéristiques traversant P et le nombre n_f des régions nodales fermées, entourant ce point, sont liés à l'*indice i* de ce point (POINCARÉ, *Journ. de Math.*, 1881, p. 400 et suiv.) par la relation

$$c - n_f = 2(i - 1).$$

CHAPITRE III. — *Les termes de la plus petite dimension sont d'ordre* 1. — On considère d'abord l'équation

$$(2) \qquad x^m \frac{dy}{dx} = ay - bx - \ldots$$

avec $a \neq 0$. Quatre cas sont à distinguer, suivant le signe de a et la parité de m. Pour m impair, l'origine est (suivant le signe de a), un *nœud* ou un *col*. Pour m pair, elle se comporte d'un côté de l'axe des y comme un nœud, de l'autre comme un col (avec une demi-caractéristique unique, prolongée au delà de l'origine par l'axe des y lui-même).

Cela fait, on discute le cas (qui est celui où s'est placé M. Poincaré) où les fonctions X, Y commencent par des termes linéaires. On sait qu'alors la discussion dépend des racines d'une certaine équation du second degré, correspondant à la réduction d'une substitution linéaire à sa forme canonique. L'auteur arrive à faire la discussion (dès le Chapitre actuel), pour tous les cas où cette équation n'a pas ses deux racines nulles.

CHAPITRE IV. — *Cas où le polynome* $(xY_m - yX_m)$ *n'a pas de facteur réel multiple.* — On suppose à nouveau que les fonctions X, Y ont des développements commençant par des termes X_m, Y_m de degré $m > 1$. On suppose, si le polynome homogène $xY_m - yX_m$ ne s'annule pas identiquement, que ce polynome n'a pas de facteur réel multiple; et, si $\frac{X_m}{x}$ est identiquement égal à $\frac{Y_m}{y}$, que la valeur commune Q_{m-1} de ces rapports est un polynome sans facteur réel multiple.

Premier cas : Le polynome $xY_m - yX_m$ *n'a aucun facteur réel.* — Dans ce cas, le point singulier est un foyer ou un centre. Pour savoir dans lequel des deux cas on se trouve, on transforme en coordonnées polaires. L'équation différentielle transformée donne (dans l'hypothèse actuelle) $\frac{d\rho}{d\theta}$ comme fonction holomorphe de ρ pour toutes les valeurs de θ entre 0 et 2π (limites comprises) et, par conséquent, d'après un théorème de M. Poincaré, son intégrale donne ρ pour toutes les valeurs en question de θ, en fonction holomorphe de la valeur initiale ρ_0 que prend ρ pour $\theta = 0$. Les coefficients successifs de ce développement sont déterminés par des équations linéaires du premier ordre (jointes à la condition de s'annuler, sauf le premier, pour $\theta = 0$); on est conduit à rechercher si les coefficients ainsi déterminés sont périodiques en θ.

Deuxième cas : Il existe des racines réelles de $xY_m - yX_m$. — Soit k_ν l'une de ces racines; on pose $y = \eta x$ et l'on considère l'équation différentielle entre x et η autour du point singulier $x = 0$, $\eta = k_\nu$. La racine k_ν étant toujours supposée simple, on est alors ramené au Chapitre précédent, et, en considérant en même temps deux points singuliers consécutifs ($x = 0$, $\eta = k_\nu$) ($x = 0$, $\eta = k_{\nu+1}$) de l'équation transformée, on peut trouver quelles sont (pour l'équation primitive) les branches aboutissant au point singulier qui se prolongent entre elles.

Si, d'autre part, on a

$$\frac{X_m}{x} = \frac{Y_m}{y} = Q_{m-1}(x, y),$$

à une direction quelconque issue du point singulier correspondent, en général, deux caractéristiques *aboutissant* en ce point. Toutefois, pour les directions qui annulent le polynome Q_{m-1}, on a (en général) des caractéristiques *traversant* le point singulier et y présentant chacune un rebroussement, ainsi qu'un nombre égal de régions nodales fermées autour de ce point.

Chapitre V. — *Le cas général.* — En effectuant la même transformation qu'au Chapitre précédent (*deuxième cas*), il n'arrive plus (si un facteur réel de $xY_m - yX_m$ est multiple) qu'on soit ramené au cas traité dans le Chapitre III. Mais on peut être ramené à celui qui fait l'objet du Chapitre précédent.

Sinon, on fera une nouvelle transformation analogue.

Continuant ainsi, l'auteur démontre que (X et Y étant supposés analytiques et holomorphes) on aboutira, *après un nombre fini d'essais*, à un système dans lequel les quantités X, Y commenceront par des termes du premier ordre.

Un seul cas reste encore à traiter, celui qui a été réservé au Chapitre II et où l'équation quadratique formée en cet endroit a ses deux racines nulles. On constate que, dans ce cas également, on est, après un nombre fini de transformations, ramené à une équation appartenant aux types antérieurement traités.

Chapitre VI. — *Quelques théorèmes relatifs aux cas où* X *et* Y *sont des polynomes.* — Dans ce cas, on peut raisonner sur le point à l'infini comme sur les autres (moyennant une inversion, par exemple) et, en particulier, énoncer les théorèmes du Chapitre I sans faire intervenir la restriction que la caractéristique reste à distance finie. Comparaison avec les résultats de M. Poincaré. Relation entre les indices des points à distance finie et à l'infini, entre les indices des points singuliers intérieurs à une même caractéristique fermée. On ne peut avoir de telles trajectoires si $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$ ne change pas de signe.

Chapitre VII. — *Sur le calcul des intégrales par approximations successives.* — Au point de vue quantitatif, tout est ramené, d'après ce qui précède, à intégrer (au voisinage de l'origine) des équations de la forme

$$x^m \frac{dy}{dx} = ay + bx + \varphi(x, y),$$

où φ commence par des termes quadratiques.

Soit, pour fixer les idées, m pair ($m = 2n$) et $a > 0$. On considère les quan-

tités y_ν définies par les équations linéaires successives

$$x^{2n}\frac{dy_\nu}{dx} = ay_\nu + bx - \varphi(x, y_{\nu-1}),$$

la première d'entre elles étant, par exemple, identiquement nulle.

Supposons que $y_{\nu-1}t$ tende vers zéro avec x. Prenons d'abord le cas de $x > 0$. Alors l'équation linéaire précédente admettra une intégrale qui prendra, pour $x = x_0$, la valeur arbitrairement donnée y_0 et (quels que soient x_0, y_0 pourvu que leurs modules soient suffisamment petits), cette intégrale tendra vers zéro avec x. En calculant ainsi les y_ν successifs, on constate qu'ils tendront vers une limite y, solution de l'équation proposée pour $x > 0$, nulle avec x et prenant la valeur y_0 pour $x = x_0$.

Pour $x > 0$, l'équation linéaire n'aura qu'une seule solution nulle avec x. On en déduira donc (sans l'intervention de condition initiale relative à $x = x_0$, cette fois) y_ν à l'aide de $y_{\nu-1}$. On constate, ici encore, la convergence des approximations ainsi obtenues vers une solution du problème.

La méthode s'applique, quels que soient m et x, avec une légère modification pour $m = 1$.

Von Koch (H.) [B 1 *e*]. — Sur quelques points de la théorie des déterminants infinis. (89-122).

Compléments apportés à des travaux antérieurs (particulièrement *Acta math.*, t. XVI; *Bihang till Sv. Vet. Ak. Abh.*, t. XXII).

I. *Généralités sur les déterminants absolument convergents.* — Après avoir défini la convergence absolue d'un déterminant infini

$$\|A_{ik}\| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \infty),$$

on rappelle les conditions suffisantes énoncées à cet égard dans le second des Mémoires cités (conditions un peu plus générales que celles du Mémoire des *Acta math.*, t. XVI) et qui font intervenir certains produits de facteurs, dans lesquels le nombre des facteurs, augmenté d'une unité, est dit l'*ordre* du produit.

De plus, les conditions suffisantes de convergence ainsi obtenues peuvent être remplacées par une série d'autres plus simples. Chacune de ces dernières s'obtient en considérant, au lieu des produits d'ordre quelconque, ceux dont l'ordre est inférieur à un nombre déterminé p.

Lorsque l'une de ces règles s'applique, le déterminant est dit de *genre* fini : le nombre entier qui en est dit le genre dépend de p. Les déterminants de genre zéro ne sont autres que ceux que l'auteur avait précédemment appelés *normaux*.

D'autre part, x_1, x_2, ... étant une suite indéfinie de quantités (non nulles), la convergence change lorsqu'on remplace simultanément tous les A_k par les valeurs correspondantes de $A_k \frac{x_i}{x_k}$, changement qui est dit *substitution multiplicatoire*. Deux déterminants qui se ramènent l'un à l'autre par une telle substitution sont dits *semblables* : en particulier, les déterminants semblables aux déterminants normaux sont dits *normaloïdes*.

II. *Sur le théorème de multiplication.* — On forme, de quatre manières différentes, le produit de deux déterminants de la forme précédente, et l'on obtient des règles de convergence pour ces quatre espèces de déterminants produits, plus spécialement, des conditions suffisantes pour qu'un tel déterminant soit du même genre que ses facteurs.

III. *Sur une classe nouvelle de déterminants.* — Énoncé d'une règle de convergence applicable à des déterminants de genre *infini*. La convergence a nécessairement lieu si le produit des éléments diagonaux converge et si, en outre, il existe deux suites de nombres positifs

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots,$$
$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots,$$

tels qu'on ait

$$|A_{ik}| \leq S_i T_k,$$

la série $\Sigma S_i T_i$ étant convergente.

Le déterminant (ou, du moins, celui qu'on en déduit par une substitution multiplicatoire convenable) est alors dit *hypernormal*.

Deux des règles de multiplication indiquées précédemment s'appliquent aux déterminants hypernormaux.

On peut parler, pour de tels déterminants convergents, de *suites majorantes*, dont la définition est analogue à celle des séries majorantes classiques, avec cette différence qu'on y introduit une constante multiplicative arbitraire. La suite de nombres positifs α_k est dite majorante du déterminant (A_{ik}) si [en posant $A_{ii} = 1 + a_{ii}$, $A_{ik} = a_{ik}$ $(i \neq k)$], il existe une constante K telle qu'on ait

$$|A_{ik}| \leq K \alpha_k.$$

IV. *Application aux systèmes d'ordre infini d'équations différentielles linéaires.* — Un déterminant infini, supposé hypernormal, donne, lorsqu'on l'égale à zéro, la condition de possibilité d'un système (infini) d'équations homogènes du premier degré, absolument comme il arrive pour le cas de l'ordre fini.

Soit, d'autre part, un système d'équations différentielles linéaires en nombre infini et à une infinité d'inconnues, dont les coefficients, fonctions de la variable indépendante t, sont finis dans une région déterminée R du plan.

L'auteur a démontré (*Ofv. Kongl. Vet. Ak. Forh.*, 1889) l'existence des intégrales. Il constate que si la variable indépendante décrit un chemin déterminé quelconque à l'intérieur de R, le déterminant d'un système fondamental de solutions ne cesse pas d'avoir la même suite majorante (au sens du numéro précédent).

On peut, dès lors, aborder l'étude de la polydromie des intégrales lorsque le chemin, supposé fermé, entoure un point singulier. Il existe une intégrale qui, dans ces conditions, se reproduit multipliée par la constante ω, si ω est racine d'une certaine équation (dont le premier membre est un déterminant infini).

Toutefois, on n'atteint pas ainsi le cas de $\omega = 1$, c'est-à-dire de l'intégrale uniforme, lequel, dans le problème actuel, offre des difficultés particulières et doit être traité à part.

Application à un exemple simple où l'on étudie la permutation autour du point singulier 1.

Lipschitz (*R.*) [K 13 *b* α, K 13 *c* α]. — Démonstration de la relation entre quatre axes de rotation relatifs à un changement d'orientation d'un système orthogonal et un tétraèdre maximum. (123-159).

Soient menés, par un même point, deux trièdres trirectangles, autrement dit, deux systèmes de trois *demi*-droites rectangulaires deux à deux. Si ces deux trièdres ont même disposition, il existe une rotation qui les amène l'un sur l'autre. Si, maintenant, on donne deux systèmes, non plus de demi-droites, mais de trois droites indéfinies tri-rectangulaires, sur lesquelles les sens ne sont pas spécifiés, on a (en faisant sur ces sens les différentes hypothèses qui donnent deux trièdres de même disposition) quatre modes de superposition, et quatre axes de rotation.

On va établir que, en portant sur ces axes des longueurs convenablement choisies (dépendant des angles de rotation), on a quatre points qui sont les sommets d'un « tétraèdre maximum » (tétraèdre dont les arêtes opposées sont orthogonales et, par conséquent, à hauteurs concourantes) dont les hauteurs sont les axes en question.

Réciproquement, de tout tétraèdre maximum on peut déduire deux systèmes d'axes tri-rectangulaires liés à ce tétraèdre par les relations précédentes.

I. On calcule d'abord les paramètres directeurs de l'axe de rotation correspondant à une transformation de coordonnées orthogonales donnée, ainsi que ceux des axes analogues, pour les transformations qu'on déduit de la première en changeant les sens de deux des arêtes d'un des trièdres.

Les formules obtenues, qui reviennent, au fond, à celles d'Olinde Rodrigues, introduisent, comme elles, quatre quantités λ_0, λ_{23}, λ_{31}, λ_{12} à l'aide desquelles les paramètres des quatre axes s'expriment.

II. *Calcul* (*à l'aide des mêmes paramètres* λ) *des angles de quatre rotations.* — On porte sur les axes de ces rotations des longueurs proportionnelles aux tangentes des demi-angles. Le tétraèdre qui a pour sommets les extrémités de ces longueurs possède bien les propriétés annoncées.

III. *Réciproque.* — Soit donné un tétraèdre maximum : on sait que la somme des carrés de deux arêtes opposées est la même pour les trois couples d'arêtes qu'on peut ainsi former. On peut dès lors représenter les carrés des longueurs des six arêtes à l'aide de quatre nombres v_1, v_2, v_3, v_4 sous la forme $v_{i_1} + v_k$ (i_1, k désignant une combinaison quelconque des indices 1, 2, 3, 4, pris deux à deux).

Expression des paramètres λ *à l'aide des quantités* v. — On en déduit la détermination des deux systèmes d'axes rectangulaires, dont la superposition peut se faire par des rotations autour des hauteurs du tétraèdre. Constructions géométriques correspondantes.

IV. *Examen, au même point de vue, de l'espace à n dimensions.* — On part d'un travail de Schläfli (*Journal de Crelle*, t. LXV, p. 185) où la question des rotations dans un tel espace est ramenée à une question de maximum ou de minimum. Le nombre des rotations qu'on obtient en effectuant tous les changements de sens admissibles est, dans le cas général, de 2^{n-1}.

Von Koch (*H.*) [19 *b*]. — Sur la distribution des nombres premiers. (159-182).

Recherches asymptotiques qui conduisent, en particulier, à établir que, si la proposition de Riemann, relative à la réalité des zéros de $\zeta(\frac{1}{2}+ti)$ est exacte, la différence entre $F(x)$ [nombre des nombres premiers non supérieurs (¹) à x] et le logarithme intégral $L_i(x)$ est d'ordre inférieur à $x^{\frac{1}{2}+\sigma}$, où σ désigne un nombre positif aussi petit qu'on le veut.

I. *Expression nouvelle de la fonction* $f(x)$. — $f(x)$ est déduit de la fonction $F(x)$ par la relation introduite par Riemann (¹)

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2}F(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}F(\sqrt[3]{x}) + \ldots.$$

En employant, non des intégrales définies classiques, la quantité

$$\lim_{s=\infty}(1 - e^{-x^s})$$

égale à 1, à $1 - \frac{1}{C}$ ou à 0 suivant que x est supérieur, égal ou inférieur à 1, l'auteur trouve $f(x)$ comme limite d'une série ordonnée suivant les puissances de x^s (s étant une variable qui augmente indéfiniment), dans laquelle s'introduit le logarithme de la fonction connue ζ.

II. *Expression des fonctions* $\psi(x)$ *et* $\Omega(x, r)$. — L'une de ces fonctions a été introduite par Tchebycheff, l'autre par M. von Mangoldt (elle a été employée ensuite dans les travaux fondamentaux de M. de la Vallée Poussin). Elles ont des expressions analogues à celles de $f(x)$, $\zeta(s)$ étant seulement remplacé par sa dérivée logarithmique $Z(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, ou par cette même fonction dans laquelle l'argument est augmenté de la constante r.

III. *Rappel de quelques propriétés connues de la fonction* $\zeta(s)$.

IV. *Étude de la fonction* $\Psi(x, s)$. — Cette fonction est celle qui (d'après le n° II), fournit $\psi(x)$ à une constante près, lorsqu'on y fait s infini. On y remplace la dérivée logarithmique Z par son expression décomposée en fractions simples, et l'on exprime ainsi Ψ à l'aide de la quantité

$$P(x, s, \alpha) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu s + \alpha} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} x^{\nu s},$$

que l'on évalue elle-même sous diverses formes.

(¹) Cette définition de $F(x)$ n'est pas tout à fait identique à celle qui est classique depuis Riemann (elle en diffère de $\frac{1}{2}$ lorsque x est premier tout en coïncidant avec elle dans tous les autres cas). Mais cette discordance est insignifiante au point de vue des valeurs asymptotiques.

V. *Remarques sur les séries* $\sum_n \frac{s}{2n(s-2n)}$, $\sum_\rho \frac{s}{\rho(s-\rho)}$, $\sum_\rho \frac{sx^\rho}{\rho(s-\rho)}$

Les deux dernières sommes sont étendues aux zéros imaginaires ρ de $\zeta(s)$. On en trouve des limites supérieures en supposant démontrée, pour la dernière, la proposition de Riemann d'après laquelle tous les ρ ont leur partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

VI. *Transformatiön de la formule trouvée au n° II.* — On est conduit à trouver une limite supérieure de la différence entre $\Psi(x, s)$ et sa limite $\psi(x)$.

VII. *Applications des formules précédentes. — Expressions asymptotiques des fonctions* $\psi(x)$, $\theta(x)$, $f(x)$, $F(x)$. — La dernière de ces expressions n'est autre que le résultat qui a été annoncé en commençant. On trouve, de même, toujours en admettant l'hypothèse de Riemann sur les parties réelles des quantités ρ, que $\frac{\psi x}{x}$ et par suite $\frac{\theta(x)}{x}$ diffèrent de 1 d'une quantité inférieure (pour x très grand) à $\frac{x^\sigma}{\sqrt{x}}$ (σ étant toujours un nombre positif aussi petit qu'on le veut.

Dans une *Note additionnelle*, l'auteur arrive à remplacer la limite $x^{\frac{1}{2}+\sigma}$ [pour $F(x) - L_i(x)$] par une autre de l'ordre $\sqrt{x}\log x$; avec une réduction analogue pour l'ordre de grandeur de $\psi(x) - x$.

Mittag-Leffler (*G.*) [D 4]. — Sur la représentation analytique d'une branche uniforme de fonction monogène (deuxième Note). (183-204).

Suite du Mémoire inséré sous le même titre au Tome précédent.

On considère encore l'*étoile* A, définie dans le Mémoire en question, de centre a, relative à un élément de fonction analytique $F(x)$. On a démontré que, dans toute cette étoile, l'expression

$$(1) \qquad \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^2} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lambda_1! \ldots \lambda_n!} F^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$$

converge vers $F(x)$ pour $n = \infty$.

On obtient d'ailleurs une autre somme donnant également $F(x)$ dans l'étoile, en considérant la série multiple

$$(2) \qquad \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1! \ldots \lambda_n!} F^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n},$$

non d'après la définition ordinaire, mais en convenant de sommer dans un certain ordre convenablement choisi : la convergence vers $F(x)$ a lieu dans une étoile aussi voisine de A qu'on le veut, pour n assez grand.

Mais l'une ou l'autre des deux expressions précédentes n'est pas nécessairement caractéristique de la fonction $F(x)$ et de l'étoile A, en ce sens qu'elle pourrait converger en dehors de A et représenter, dans ces conditions, une fonction différente de $F(x)$.

Cela tient à la circonstance géométrique suivante : si l'on nomme C l'ensemble de cercles qui interviennent dans la formation de ces expressions (cercles de rayon unique $r = \frac{x-a}{n}$ et de centres respectifs $a - \mu r$ ($\mu = 1, 2, \ldots, n-1$), la figure C′ obtenue en remplaçant (sans changer a) le point x par son homothétique direct relatif à a, avec un rapport plus petit que 1, n'est pas toujours entièrement intérieure à C.

Toutefois, ceci n'empêche pas qu'on ait ainsi une solution du problème lorsqu'il n'y a qu'un seul point singulier.

Pour arriver à cette même solution dans les autres cas, il faut s'arranger pour que la figure C′ soit nécessairement intérieure à C. On y parvient en construisant la chaîne de cercles non plus de telle sorte que les cercles successifs aient même rayon, mais de telle sorte que chacun coupe le suivant aux points de contact de ce dernier avec les tangentes qu'on peut lui mener par le centre a.

Construction des cercles à cet effet, et des étoiles successives correspondantes.

Les séries ainsi obtenues étant divergentes en dehors de l'étoile peuvent, comme la série de Taylor, servir à l'étude des singularités de la fonction sur la frontière du domaine de convergence.

Mittag-Leffler (*G.*) [D 4]. — Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. (205-244).

Au lieu de former, comme dans l'article précédent, une suite discontinue d'expressions tendant vers F (x), on considère une somme qui satisfait à la même condition, mais qui dépend continûment d'un paramètre β.

A cet effet, on introduit la représentation conforme définie par la relation

$$(1) \qquad v = e^{\int_1^u \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\beta} \frac{du}{u}}.$$

β étant un paramètre réel tel qu'on ait

$$0 \leqq \beta < 1.$$

Pour $\beta = 0$, on a

$$v = u.$$

Au cercle de rayon 1, tracé dans le plan des u, correspond un cercle identique dans le plan des v.

β croissant à partir de zéro, la figure F qui, dans le plan des v, correspond au cercle unité du plan des u, devient d'abord *cordiforme*. Puis, pour β tendant vers l'unité, elle tend à s'aplatir indéfiniment et à se réduire au segment de droite $0 - 1$ (les figures sont représentées sur une planche à la fin du Volume).

Soit encore $\alpha = 1 - \beta$.

Tout point x du plan permet de définir une figure F′ semblable à F et telle que ce point corresponde au point d'affixe 1 du plan de F, pendant que le point a (ayant la même notation que dans l'article précédent) correspond à l'origine des coordonnées du même plan.

F′ dérive du cercle de rayon 1 du plan des u par la relation

$$(1') \qquad z = a - (x - a)\, e^{\int_1^u \left(\frac{1-u}{1-u}\right)^2 \frac{du}{u}}$$

analogue à (1).

A cette figure F′ on substitue d'abord une figure Z très peu différente (celle qu'on obtient en remplaçant, dans le plan des u, le cercle de rayon 1 par un cercle concentrique de rayon r un peu plus petit).

Dès lors, A étant une étoile quelconque de centre a (voir l'article précédent), on désignera par $A^{(\alpha)}$ une étoile que l'on définit comme précédemment, en divisant les points u en deux catégories suivant que l'étoile Z correspondante est ou non intérieure à A.

La figure Z correspondant à un point déterminé est d'ailleurs intérieure à la figure analogue correspondant à un point situé au delà du premier, sur le prolongement de la droite qui joint celui-ci au centre α (l'importance de ce fait a déjà été reconnue dans l'article précédent).

Ceci posé, dans le développement donné

$$F(a) + (x - a)\, F'(a) + \ldots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(x - a) + \ldots$$

on remplace d'abord x par z, et l'on pose

$$z - a = \frac{\psi(u)}{\psi(r)}(x - a),$$

où $\psi(u)$ est la fonction déjà introduite

$$\psi(u) = u\, e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1-u}{1-u}\right)^2 - 1\right] \frac{du}{u}},$$

et $r < 1$ est le rayon du cercle qui a servi à définir Z par la représentation conforme (1′) et l'on développe suivant les puissances de u, les coefficients étant alors des polynomes $G_\nu(x - a)$. Comme, en faisant $u = r$, on a $y, z = x$, on obtient une expression de la fonction donnée.

En passant à la limite pour $\alpha = 0$, on a une expression convergente dans toute l'étoile A et qui est une expression limite double.

La valeur de α (ou, ce qui revient au même, de β) est d'ailleurs sans influence sur la valeur du développement, mais influe seulement sur sa région de convergence.

On peut se demander si cette expression garde ses propriétés quand on y fait $r = 1$. Une démonstration communiquée par M. Phragmén établit ce fait en partant des propriétés des séries trigonométriques (en particulier d'un théorème important dû à Lipschitz sur ce sujet).

L'expression a d'ailleurs A pour étoile de convergence; elle diverge en dehors de A. Il résulte de recherches de M. Borel, insérées au même Volume des *Acta* (voir plus loin), que ce fait est lié au caractère de limite *double* que possède cette expression.

Pringsheim (*A.*). — Déclaration. (245).

Questions de priorité concernant un Mémoire précédent (*Math. Ann.*, t. L) et une Note de M. Lerch (*Monatsh. für Math. und Phys.*, 8e année), traduite au Tome XXII des *Acta mathematica*.

Maillet (*E.*) [I 19 *b*]. — Sur les équations indéterminées de la forme $x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$. (247-256).

Impossibilité de certaines équations de cette forme, lorsque λ n'est pas un nombre exceptionnel, c'est-à-dire lorsqu'il est un des nombres pour lesquels Kummer a démontré le théorème de Fermat (équation précédente pour $c = 1$).

Différentes catégories de valeurs de c pour lesquelles l'auteur arrive à établir en toute rigueur cette impossibilité. C'est le cas, en particulier, pour $c = \lambda$.

Hough (*S.-S.*) [U 5]. — Sur certaines discontinuités liées aux orbites périodiques. (257-288).

En étudiant le mouvement d'un satellite, c'est-à-dire d'un point matériel de masse négligeable attiré, suivant la loi de Newton, par deux points S (*Soleil*) et J (*Jupiter*) en mouvement képlérien circulaire de vitesse angulaire n l'un par rapport à l'autre, sir G. Darwin (*Acta*, t. XXI), a obtenu, pour le mouvement relatif (c'est-à-dire rapporté à des axes entraînés dans le mouvement de rotation de la droite SJ) des solutions périodiques (dites *solutions* A). Mais M. Poincaré, dans les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, démontre qu'il y a là, en réalité, deux catégories différentes de solutions, les satellites *instables* n'étant pas la continuation analytique des satellites *stables*.

Ces séries n'étant pas le prolongement l'une de l'autre, il reste à rendre compte de la naissance de l'une et de la disparition de l'autre.

L'auteur y arrive par l'obtention de certaines orbites particulières (*orbites rétrogrades*).

I. *Mouvements au voisinage de l'équilibre relatif.* — On considère d'abord le mouvement au voisinage d'une position d'équilibre relatif (positions de Lagrange pour lesquelles la figure formée par les trois corps reste invariable), en se bornant d'ailleurs à celles de ces positions qui sont situées sur la droite SJ. Les équations différentielles peuvent alors, en première approximation, être considérées comme linéaires.

L'équation caractéristique ayant deux racines réelles et deux racines purement imaginaires, les inconnues s'expriment par des sommes de fonctions circulaires et de fonctions hyperboliques.

En prenant le cas où ces dernières existent seules, on a une série de trajectoires particulières qui sont des hyperboles H, ayant toutes les mêmes asymptotes. Le passage d'une branche d'hyperbole à une branche conjuguée se fait par un mouvement rectiligne tendant *asymptotiquement* vers le centre (celui-ci jouant jusqu'ici, par conséquent, le rôle d'un col au sens de M. Poincaré).

Si, maintenant, on tient compte des deux autres constantes arbitraires (les coefficients de fonctions circulaires), il faut composer ce mouvement hyperbolique avec un mouvement elliptique. Ce dernier, considéré seul, est analogue aux orbites du satellite oscillant de sir G. Darwin.

Lorsque le mouvement hyperbolique se réduit à un mouvement rectiligne asymptotique, le mouvement total est donc, à son tour, asymptotique à un *satellite oscillant*. Les trajectoires de cette nature servent donc de transition entre deux sortes de trajectoires T_1, T_2 qui se distinguent les unes des autres

par la nature des hyperboles H (savoir, par le fait que celles-ci sont dans un angle ou dans l'autre par rapport aux asymptotes).

II. *Applications aux orbites de Darwin.* — Des circonstances de cette nature se passent lorsque, pour une certaine valeur de la constante qui figure dans l'intégrale de Jacobi, on passe, en changeant très peu la position initiale, d'une orbite *planétaire* (tournant autour de S) à une orbite *lunaire* (tournant autour de J).

Il résulte des considérations précédentes que, dans les formes qui servent de passage entre ces deux types, la trajectoire tourne un certain nombre de fois, de plus en plus grand à mesure qu'on approche de la forme critique (qui est la forme asymptotique T) autour de la position d'équilibre relatif.

III. *Orbite relative d'un satellite approchant infiniment près de la planète.* — Si le satellite était seul avec J, il décrirait une orbite elliptique : celle-ci pourrait dégénérer en une portion de droite, forme qui sert de passage entre les mouvements elliptiques directs et les mouvements rétrogrades.

Pour étudier le mouvement relatif, il faut composer ce mouvement elliptique avec le mouvement de rotation n, changé de signe. Si le mouvement elliptique est très excentrique, il sera prédominant au *périjove*, de sorte que la trajectoire sera (suivant le sens de ce mouvement) directe ou rétrograde. A l'*apojove*, au contraire, le mouvement de rotation prédomine et donne toujours son signe.

Certaines trajectoires ont, dès lors, dans le voisinage de J, une sinuosité (comme la cycloïde allongée), d'autres une boucle (comme la cycloïde raccourcie). Comme intermédiaire, on a des trajectoires à point de rebroussement.

IV. *Application aux orbites de Darwin.* — On a, dans le cas de Darwin, des exemples analogues. Les points de rebroussement se présentent lorsque la trajectoire a un point commun avec le lieu des vitesses nulles (tel que le fournit l'intégrale de Jacobi).

V. *Formes conjecturales d'orbites rétrogrades.* — Celles qui forment le passage entre deux formes d'orbites calculées par M. Darwin.

VI. *Courbes des* φ. — Pour rechercher les orbites périodiques, Darwin considère une orbite partant d'un point (défini par son abscisse x_0) pris sur SJ, et l'angle φ_1 que cette trajectoire fait avec la normale à SJ à sa nouvelle intersection avec la droite. L'orbite dépendant ici de x_0 et de la constante C de Jacobi, on considère cette dernière quantité comme fixe et on prend x_0 comme abscisse, φ_1 comme ordonnée.

En réalité, on a affaire à une fonction multiforme de x_0, ses différentes déterminations correspondant aux intersections successives de la même orbite avec SJ.

La condition de périodicité est, dans le cas actuel, que φ_1 soit un multiple de π.

On étudie d'abord la courbe pour les grandes valeurs de C; cette courbe contient, en particulier, un point A qui correspond à l'orbite périodique de Darwin.

VII. *Première déformation de la courbe des* φ *rendant compte de la disparition de l'orbite* A. — On constate que cette orbite coïncide, à un cer-

tain moment, avec une trajectoire à point de rebroussement et que, ensuite, elle est devenue une orbite rétrograde.

VIII. *Forme de la courbe des φ au voisinage d'une orbite asymptotique.* — La courbe présente une suite indéfinie d'ondulations contenant chacune un des points qui correspondent aux orbites en huit de chiffre du Mémoire de Darwin.

IX. *Complément de la courbe des φ.* — On cherche à préciser la forme des arcs par lesquels cette courbe se ferme. Leur examen montre que les trajectoires asymptotiques y figurent par couples.

X. *Seconde déformation de la courbe des φ.* — Il résulte de ce qui vient d'être dit que les orbites asymptotiqnes coïncident deux à deux au moment de disparaître. Changements de forme de la courbe des φ dans ces conditions.

XI. *Résumé et conclusion.* — Les deux familles de satellites (orbites A et orbites en huit), sont bien independantes comme l'annonçait M. Poincaré. Si M. Darwin a été conduit à les confondre, c'est que, dans les données numériques qu'il a adoptées, le hasard a voulu que le moment de l'apparition d'une des familles coïncide sensiblement avec celui de la disparition de l'autre.

Horn (*J.*)[H 4 α]. — Sur la représentation asymptotique des intégrales des équations différentielles linéaires. (289-388).

Suite des recherches précédemment publiées sur les intégrales irrégulières (dans le voisinage de $x=\infty$) des équations linéaires. Comme précédemment, la méthode se distingue de celle de M. Poincaré en ce qu'on ne fait pas usage de la transformation de Laplace. Dans le Mémoire actuel, on peut, dès lors, aborder le cas où les coefficients ne sont plus des polynomes, mais des développements ordonnés suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$.

1° On considère d'abord le système (A) de m d'équations linéaires du premier ordre

$$(\mathrm{A}) \qquad x^{-k}\frac{dw_\lambda}{dx} = \alpha_\lambda w_\lambda + \sum Q_{\lambda\mu} w_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m),$$

dans lequel k est un entier donné (positif ou nul); $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, des constantes dont les parties réelles sont différentes et rangées par ordre de grandeur décroissante, tandis que les Q_μ sont des fonctions de x, nulles pour $x=\infty$.

On constate que les rapports $Z_2 = \frac{w_2}{w_1}, \ldots, Z_m = \frac{w_m}{w_1}$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{x}$, toutes les fois du moins que l'on considère une solution telle qu'il existe une valeur ξ de x donnant lieu à l'inégalité $M < \frac{1}{\varepsilon}$, où M est le plus grand des rapports en question et ε une certaine quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{\xi}$. Il existe évidemment de telles solutions.

Les Z vérifient un système d'équations différentielles (B) dont il est facile de trouver la forme générale. Si les coefficients sont développés suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, on montre, par la même méthode, que ce système (B) a au moins une solution asymptotiquement représentée, *jusqu'aux*

termes d'un rang déterminé quelconque n, par un développement qu'on peut écrire, sans qu'il soit encore démontré que cette solution puisse rester la même lorsque n augmente indéfiniment.

2° On passe de là à l'équation différentielle donnée, d'ordre m, irrégulière à l'infini,

$$(C) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + x^k P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^m} + \ldots + x^{(m-1)k} P_{m-1} \frac{dy}{dx} + x^{mk} P_m y = 0,$$

où les P sont développés suivant les puissances positives de $\frac{1}{x}$.

On peut la ramener à un système (A) (numéro précédent) aux inconnues $w_1, \ldots, w_m$ indiquées par M. Poincaré et définies par les équations

$$y = w_1 + \ldots + w_m,$$
$$x^{-\nu k} \frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \alpha_1^\nu w_1 + \ldots + \alpha_m^\nu w_m \qquad (\nu = 1, \ldots, m-1).$$

les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ étant les racines (supposées à parties réelles distinctes et rangées par ordre de grandeur décroissante) d'une certaine équation caractéristique.

On peut, dès lors, appliquer aux w les conclusions du numéro précédent et en former des développements asymptotiques.

D'autre part, les w étant supposés connus, la détermination de y dépend d'une équation linéaire du premier ordre, c'est-à-dire d'une quadrature. On trouve alors des développements dont chacun, limité à un terme de rang déterminé quelconque n, représente asymptotiquement au moins une intégrale de l'équation (sans qu'on puisse, ici encore, affirmer immédiatement que cette conclusion s'étend à $n = \infty$).

3° Le calcul précédent fournit m développements correspondant aux m racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de l'équation caractéristique : les solutions correspondantes forment un système fondamental.

On constate que la dernière y_m de ces solutions est nécessairement *unique*. Ceci permet de lever la restriction donnée à la fin de chacun des deux paragraphes précédents, en ce qui concerne y_m : cette fonction est représentée asymptotiquement par un développement indéfini qu'on peut écrire.

5° y_m étant ainsi obtenu, on en déduit de proche en proche les intégrales analogues $y_{m-1}, \ldots$.

Borel (*E.*) [D 4 *e*, D 2 *b* $\frac{\gamma}{4}$]. — Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles. (309-382).

Après les séries de puissances, dont la théorie est maintenant classique, ce sont les séries de polynomes et de fractions rationnelles dont l'étude paraît tout d'abord s'imposer. Mais il faut limiter, par des hypothèses convenables, l'extrême généralité de telles séries : si on la laisse entière, on peut, en particulier, obtenir par de telles séries des fonctions dont les propriétés soient sans rapport discernable avec celles des séries qui les définissent.

Première Partie : *Les séries de fractions rationnelles.* — Un exemple des circonstances singulières auxquelles il vient d'être fait allusion (outre ceux

auxquels avaient déjà été conduits Weierstrass, M. Appell, etc.), est fourni par la série

$$\sum \frac{\varphi(m) z^m}{1 - z^m},$$

où $\varphi(m)$ est la fonction arithmétique bien connue de Gauss.

Cet exemple traité, on considère la série de fractions rationnelles

$$(1) \qquad \sum \frac{P_n(z)}{R_n(z)},$$

dans laquelle on suppose les degrés des numérateurs et des dénominateurs limités à un entier donné m, le coefficient de z^m dans chaque dénominateur étant l'unité. On impose aux coefficients des numérateurs une condition limitative convenable.

Moyennant cette condition, et sans même avoir à s'occuper de la distribution des zéros a_n des dénominateurs, on peut établir l'existence d'une région de convergence. A cet effet, on entoure chaque point a_n d'un cercle : on constate que (même si les pôles forment un ensemble partout dense) on peut choisir les rayons de ces cercles de manière que la région R qui leur est extérieure soit :

1° une région de convergence, et de convergence uniforme pour la série (1);
2° ait des points dans n'importe quelle aire continue donnée à l'avance.

En particulier, perpendiculairement à toute droite donnée D, on peut tracer une infinité de droites Δ qui sont, pour la série, des lignes de convergence uniforme et, par conséquent, de continuité. Il existe, de même, des courbes de continuité.

On peut, d'ailleurs, modifier les inégalités imposées aux coefficients de manière que les mêmes conclusions s'étendent aux séries dérivées.

Si, sur une courbe de continuité fermée C, on intègre la fonction, on peut appliquer le théorème général de Cauchy : ce théorème donne

$$\int_C F(z)\, dz = 2i\pi \sum (\Sigma \rho_n).$$

Dans cette formule, le signe Σ intérieur se rapporte aux résidus relatifs aux pôles d'un même terme de la série (1) et le signe extérieur aux différents termes.

Rien ne prouve, *a priori*, qu'il soit permis de sommer dans un ordre différent et, par exemple, de réunir les résidus correspondants à un même pôle a_n commun à plusieurs termes. Il se peut fort bien que la série ainsi obtenue soit divergente et que, par rapport à a_n, la série n'ait pas de résidu déterminé. On montre, sur un exemple, la possibilité de cette circonstance et d'autres analogues.

Deuxième Partie : *Les séries de polynomes et le prolongement analytique.* — Les séries de polynomes

$$(2) \qquad \sum P_n(z)$$

sont étudiées en classant ensemble, pour les comparer, non plus celles qui se déduisent les unes des autres en multipliant chaque terme P_n par une constante, mais celles pour lesquelles le coefficient de chaque puissance z^k est multiplié

par un coefficient déterminé (variable avec k, mais indépendant de n). Deux séries ainsi liées seront dites *semblables* et seront considérées comme appartenant à la même *classe*.

Chaque fois qu'on connaît un développement de la quantité $\frac{1}{1-z}$ en série de polynomes, ce développement étant convergent pour toutes les valeurs de z autres que celles qui sont réelles et supérieures à 1, on peut en déduire, pour toute fonction analytique $f(x)$, holomorphe autour de l'origine, une série de polynomes semblables (au sens qui vient d'être défini). Il suffit d'appliquer l'intégrale classique de Cauchy, en y remplaçant $\frac{1}{z-x}$ par $\frac{1}{z\left(1-\frac{x}{z}\right)}$ et $\frac{1}{1-\frac{x}{z}}$ par le développement donné.

On a ainsi une démonstration du théorème de M. Mittag-Leffler (*Acta math.*, t. XXIII et présent Volume), car l'expression obtenue pour $f(z)$ converge dans toute *l'étoile* qui intervient dans l'énoncé de ce théorème.

On peut d'ailleurs limiter les coefficients du développement de $f(z)$ en fonctions des modules de cette fonction et de ceux des coefficients du développement primitif de $\frac{1}{1-z}$.

On applique ceci aux séries $f(z) = \sum \frac{A_n}{z-a_n}$ considérées dans la première Partie, des a_n étant distribuées dans la couronne circulaire $\alpha < |a_n| < \beta$.

Moyennant des inégalités convenables imposées aux A_n et sans autre hypothèse, on montre que le développement de $f(z)$ converge absolument et uniformément (et représente, en outre, la fonction) sur une infinité de diamètres du cercle de rayon β, une infinité non dénombrable de ces diamètres étant située dans tout angle au centre, aussi petit, qu'on veut.

En modifiant convenablement les conditions d'inégalité imposées aux A_n, on peut faire que, sur les diamètres en question, la série de polynomes soit dérivable terme à terme.

On forme, en particulier, les inégalités dont il s'agit lorsque les développements envisagés sont ceux qui ont été fournis par M. Mittag-Leffler dans son premier Mémoire (*Acta math.*, t. XXIII). Il suffit, alors, qu'on ait

$$(4) \qquad |A_n| < e^{-e^{n^{2+\varepsilon}}},$$

ε étant un nombre positif fixe quelconque, et l'on peut prendre $\beta = \infty$.

Soient E l'ensemble dérivé de celui des points a_n et Σ la partie du plan qui n'appartient pas à E. Les hypothèses fondamentales subsistant lorsqu'on change z en $z + z_0$ dès que le point z_0 est dans Σ, on voit que, sous cette dernière condition, le point z_0 est également l'origine commune d'une infinité de droites de convergence.

Σ peut se composer de plusieurs régions séparées, à l'intérieur desquelles la série représente des fonctions analytiques différentes. Si on se borne à ce qui se passe sur une droite de convergence et qu'on amène cette droite à l'axe réel, on constate que la série, ainsi considérée comme dépendant d'une variable réelle, peut même représenter une fonction analytique dans un intervalle et une fonction non analytique dans un autre intervalle.

Troisième Partie : *La généralisation du prolongement analytique.* — La transformation en série de polynomes peut s'appliquer à des séries de puissances toujours divergentes.

On peut, en particulier, trouver, pour certains développements de la forme $\sum \frac{A_n}{z-a_n}$ transformés en séries de polynomes, des droites de convergence D, dont tous les points appartiennent à l'ensemble appelé précédemment E, de sorte que la fonction correspondante n'est analytique en aucun point de D.

En amenant encore D a être l'axe réel, on voit qu'il existe des fonctions $f(x)$ d'une variable réelle x [dites fonctions (M)] qui ne sont nulle part analytiques, et qui cependant sont telles que, si l'on part de la suite

$$f(x_0), \quad f'(x_0), \quad \ldots, \quad f^{(k)}(x_0), \quad \ldots,$$

formée par des valeurs de f et de ses dérivées pour $x = x_0$, pour former le développement de M. Mittag-Leffler, ce développement converge pour $x \neq x_0$ et représente toujours $f(x)$.

Une fonction (M) est donc, comme une fonction analytique, complètement déterminée par la connaissance de ses valeurs dans un intervalle fini quelconque.

On peut aussi, d'ailleurs, d'après les mêmes principes, définir des fonctions (M) sur des droites (D) du plan des variables complexes. On saura alors également ce qu'on entend en disant que deux telles fonctions définies sur deux droites différentes (ces définitions étant toutefois valables au point i, intersection des deux droites) sont le *prolongement* l'une de l'autre; parler, par conséquent, de fonctions (M) *uniformes* dans une région sillonnée par une infinité de droites (D) sans être analytique en aucun point de cette région, etc. : en un mot, on a ainsi une généralisation de la notion de fonction analytique.

En même temps, on a une généralisation de la notion de prolongement analytique, celui-ci pouvant, dans certains cas, se faire, par la méthode précédente, à travers une coupure essentielle.

Borel (*E.*) [D 4 *e*, D 2 *b* M]. — Addition au Mémoire sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles. (383-388).

Extension des principaux résultats du Mémoire précédent au cas où l'on ne suppose plus les convergences absolues (tout en continuant à admettre qu'elles sont uniformes).

Duport (*M.*) [J 4 *f*]. — Sur la théorie des groupes. (389-394).

$y = f(x, a)$ étant l'équation d'un groupe à une variable x et à un paramètre a, on doit avoir

$$f[f(x, a), b] = f(x, c),$$

c étant une fonction de a et de b.

L'auteur détermine la forme de fonctions satisfaisant à un système un peu plus général que celui-là.

Mittag-Leffler (*G.*). — Charles Hermite. (395-396).

J. H.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome CL. 1910 [1].

Kœnigs (*C.*). — Sur les courbes conjuguées dans le déplacement relatif le plus général de deux corps. (22-24).

A 8420.

Demoulin (*A.*). — Sur la transformation de Ribaucour. (25-29).

A 8450, 8455.

Tsitzéica (*G.*). — Un problème sur les systèmes triples orthogonaux. (29-32).

A 8860.

Denjoy (*A.*). — Sur les fonctions analytiques uniformes à singularités discontinues non isolées. (32-34).

A 5620, 0430.

Guichard (*C.*). — Sur les surfaces à courbure totale constante qui correspondent à des systèmes singuliers d'ordre quelconque. (76-80).

A 8830.

Russyan (*C.*). — Le théorème de M. W. Stekloff (théorème général de Jacobi) et les formules généralisées de la transformation de contact. (81-85).

A 4830.

Lebesgue (*H.*). — Sur l'intégrale de Stieltjes et sur les opérations fonctionnelles linéaires. (86-88).

A 3260.

Le Roux (*J.*). — Sur les formes quadratiques définies à une infinité de variables. (88-91).

A 2840.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXVIV$_2$, p. 5.

Demoulin (*A.*). — Sur les systèmes et les congruences K. (156-159).

A 8450, 8455.

Cisotti (*U.*). — Sur une application de la méthode de Jacobi. (160-162).

A 4830.

Zoretti (*L.*). — Sur les ensembles de points. (162-164).

A 0430.

Le Roux (*J.*). — Sur des conditions de maximum ou de minimum d'une fonction analytique d'une infinité de variables. (202-204).

A 3280.

Mirimanoff (*D.*). — Sur le dernier théorème de Fermat. (204-206).

A 2860, 2810.

Galbrun. — Sur la représentation des solutions d'une équation aux différences finies linéaires pour les grandes valeurs de la variable. (206-208).

A 6020.

Demoulin (*A.*). — Sur les systèmes et les congruences K. (310-313).

A 8450, 8455.

Mollerup (*J.*). — Une remarque sur les équations intégrales de première espèce. (313-315).

A 4450, 6050.

Kryloff (*N.*). — Sur les développements procédant suivant les polynomes hypergéométriques. (316-318).

A 3630.

Plancherel (*M.*). — Sur la représentation d'une fonction arbitraire par une intégrale définie. (318-321).

A 4430.

Birkeland (*R.*). — Sur des intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires. (321-224).

A 4850.

Etévé (*A.*). — Sur l'autorotation. (324-326).

B 2840.

Borel (*E.*). — Sur la définition de l'intégrale définie. (375-377).

A 3260.

Le Roux (*J.*). — Les formes quadratiques positives et le principe de Dirichlet. (377-379).

A 2840, 3600.

Boulad (*F.*). — Sur la disjonction des variables des équations nomographiques rationnelles d'ordre supérieur. (379-382).

A 0090, 2440.

Bourlet (*C.*). — Sur la résistance de l'air. (382-385).

B 2830, 2840.

Humbert (*G.*). — Sur les minima des classes de formes quadratiques binaires et positives. (431-436).

A 2830.

Darboux (*G.*). — Rapport sur le Mémoire sur les courbes conjuguées dans le mouvement relatif le plus général de deux corps solides, présenté par H. Gabriel Koenigs, dans la séance du 3 janvier 1910. (441-444).

A 8420.

Stekloff (*W.*). — Sur un théorème général d'existence des fonctions fondamentales correspondant à une équation différentielle linéaire du second ordre. (452-454).

A 4810, 4850.

Pompéiu (*O.*). — Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes. (454-455).

A 3610, 0430.

Chazy (*J.*). — Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale possède une coupure essentielle mobile. (456-458).

A 4800.

Cotty (*G.*). — Sur la transformation des fonctions abéliennes. (458-461).

A 4070.

Picard (*E.*). — Un théorème général sur certaines équations intégrales de troisième espèce. (489-491).

A 4430.

Boussinesq (*J.*). — Sur la manière dont le potentiel des vitesses, dans le problème des ondes par émersion, dépend de l'état initial. (491-496).

B 2480.

Borel (*E.*). — Sur une condition générale d'intégrabilité. (508-511).

A 0430, 3260.

Cotton (*E.*). — Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles. (511-513).

A 4800, 4820.

Bernstein (*S.*). — Conditions nécessaires et suffisantes pour la possibilité du problème de Dirichlet. (514-515).

A 5660.

Marty (*J.*). — Sur une équation intégrale. (515-518).

A 4430.

Féjer (*L.*). — Sur une paire de séries de Fourier conjuguées. (518-520).

A 5610.

Denjoy (*A.*). — Sur la mesure des ensembles. (596-598

A 0430.

De Séguier. — Sur le groupe symétrique et le groupe alterné. (599-600).

A 1210.

Stekloff (*W.*). — Sur le développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant certaines fonctions fondamentales. (601-603).

A 3630. 4470.

Marty (*J.*). — Développements suivant certaines solutions singulières. (603-606).

A 3630, 4470.

Janiszewski (*S.*). — Contribution à la théorie des courbes planes générales. (606-609).

A 0430, 8460.

Hadamard (*J.*). — Sur les ondes liquides. (609-611).

B 2480.

Boussinesq (*J.*). — Propagation verticale, aux grandes profondeurs, du mouvement des ondes par émersion dans le cas d'un canal ou d'un bassin horizontalement indéfinis. (655-660).

B 2480, 2440.

Riesz (*E.*). — Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation des fonctions continues. (674-677).

A 6000.

Remy (*L.*). — Sur les surfaces algébriques représentables sur celle de Kummer. (679-680).

A 8060, 4070.

Larose (*H.*). — Sur l'équation des télégraphistes. (680-683).

A 4840

Haag (*J.*). — Sur quelques nouvelles familles de Lamé. (767-869).

A 8860.

Chatelet (*A.*). — Sur une transformation des fractions continues arithmétiques. (769-772).

A 2815.

Hadamard (*J.*). — Sur les ondes liquides. (772-774).

B 2480.

Haag (*J.*). — Sur la représentation sphérique de certaines familles de Lamé. (852-854).

A 8860.

Arnoux (*R.*). — L'équilibre longitudinal et la courbure des surfaces portantes des aéroplanes. (854-857).

B 2840.

Bratu (*G.*). — Sur certaines équations intégrales non linéaires. (896-899).

A 4470, 4820.

Lévy (*P.*). — Sur les équations intégrales non linéaires. (899-901).

A 4470.

Galitzine (*B.*). — Sur l'ébranlement des édifices. (901-904).

B 3220, 3280.

Tzitzéica. — Sur une nouvelle classe de surfaces. (955-956).

A 8830.

Blondel (*A.*). — Sur l'équation fonctionnelle linéaire. (957-960).

A 4460.

Petot (*A.*). — Sur le mode d'action des roues motrices. (960-962).

B 0430.

Russyan (*C.*). — La méthode de Jacobi généralisée d'intégration du système d'équations différentielles partielles du premier ordre. (1027-1031).

A 4830.

Marty (*J.*). — Existence de solutions singulières pour certaines équations de Fredholm. (1031-1033).

A 4470.

Fekete (*M.*). — Sur les séries de Dirichlet. (1033-1036).

A 3220, 3610.

Ouivet. — Sur une application des transformations birationnelles. (1036-1038).

A 8020.

Vergne (*H.*). — Sur les changements canoniques de variables. (1038-1041).

A 4830, B 2020.

Galitzine (*B.*) — Sur la précision des appareils qui servent à étudier l'ébranlement des édifices. (1041-1043).

B 3220, 3280.

Guichard (*C.*). — Sur un mode de génération des systèmes triple-orthogonaux à lignes de courbure sphériques dans un seul système. (1090-1094).

A 8860.

Haag (*J.*). — Sur certains systèmes triple-orthogonaux. (1096-1099).

A 8860.

Gau (*P.-E.*). — Sur l'intégration par la méthode de M. Darboux, des équations aux dérivées partielles du second ordre de la forme $s = a(x, y, z)p + b(x, y, z)q + c(x, y, z)$. (1099-1101).

A 4840.

Chatelet (*A.*). — Sur la sommation de fractions continues arithmétiques. (1101-1104).

A 2815.

Chazy (*J.*). — Sur les équations différentielles déduites de certains invariants des formes linéaires. (1104-1106).

A 4800.

Lattès (*S.*). — Sur la convergence des relations de récurrence. (1106-1109).

A 6020.

Lichtenstein (*L.*). — Sur la définition générale des fonctions analytiques. (1109-1110).

A 3600.

Darboux (*G.*). — Sur une classe particulière de systèmes triple-orthogonaux. (1155-1160).

A 8860.

Darboux (*G.*). — Sur l'emploi de nouvelles méthodes de récurrence dans la théorie des systèmes orthogonaux (1208-1212).

A 8860.

Tzitzéica. — Sur une nouvelle classe de surfaces. (1227-1229).

A 8830.

Ouivet (*E.*). — Sur l'équation différentielle du mouvement d'un projectile sphérique pesant dans l'air. (1229-1231).

B 1610.

Fréchet (*M.*). — Sur les fonctionnelles continues (1231-1233).

A 4460.

Féjer (*L.*). — Sur les sommes partielles de la série de Fourier. (1299-1302).

A 5610.

Gau (*P.-E.*). — Sur la recherche des intégrales intermédiaires de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$. (1410-1412).

A 4840.

Lattès (*S.*). — Sur les séries de Taylor à coefficients récurrents. (1413-1415).

A 3240.

Le Roux (*J.*). — Sur la distribution des torsions dans la déformation infinitésimale d'un milieu continu. (1415-1418).

B 0440.

Larore (*H.*). — Sur deux suites de solutions de l'équation des télégraphistes. (1418-1421).

A 4840.

Marty (*J.*). — Valeurs singulières d'une équation de Fredholm. (1449-1502).

A 4470.

Chatelet (*A.*). — Sur le classement d'un système de tableaux équivalents entre eux. (1502-1505).

A 2815.

Zorretti (*L.*). — Sur les propriétés des lignes cantoriennes. (1505-1106).

A 0430.

Saltykow (*N.*). — Sur la généralisation du théorème de S. Lie. (1506-1508).

A 4830.

Barré (*E.*). — Sur une série de solutions des équations de l'élasticité de Lamé dans un milieu homogène et isotrope. (1509-1511).

B 3210.

Autonne (*L.*). — Sur les groupes commutatifs de quantités hypercomplexes. (1581-1583).

A 1210.

Buhl (*A.*). — Sur la transformation des séries asymptotiques en séries de polynomes tayloriens convergentes. (1583-1585).

A 3630.

Saltykow (*N.*). — Sur les applications du théorème de S. Lie généralisé. (1585-1586).

A 4830.

De Saussure (*R.*). — Sur les corps solides opposés (1586-1589).

A 8420.

Le Roux (*J.*). — Sur la flexion. (1589-1592).

B 3210.

Arnoult (*J.*). — Sur le mouvement d'un fil dans l'espace. (1592-1595).

B 1630.

Soreau (*R.*). — La poussée sur la surface portante des aéroplanes. (1595-1598).

B 2840.

Vessiot (*E.*). — Sur l'intégration des systèmes complets. (1662-1664).

A 4830.

Hadamard (*J.*). — Quelques propriétés des fonctions de Green. (1664-1666).

A 5660.

Renard (*P.*). — Sur la façon de parcourir en aéronef un itinéraire rectiligne avec une dépense minima de travail total. (1666-1669).

B 2840.

Letombe (*L.*). — Étude géométrique de la distribution des machines à distributeurs séparés. (1736-1838).

B 0430.

Tome CLI, 1910.

Study (*E.*). — Sur la *Géométrie des feuillets* de MM. R. de Saussure et R. Bricard. (137-138).

A 8420.

Denjoy (*A.*). — Continu et discontinu. (138-140).

A 0430.

Drach (*J.*). — Sur le problème logique de l'intégration des équations différentielles. (192-195).

A 4800.

Bernstein (*S.*). — Sur les équations du calcul des variations. (195-198).

A 3280.

Janiszewski (*S.*). — Sur la géométrie des lignes cantoriennes. (198-201).

A 0430.

Zoretti (*L.*). — Sur la notion de ligne. (261-265).

A 0430.

Chazy (*J.*). — Sur une équation différentielle du troisième ordre qui a ses points critiques fixes. (203-205).

A 4880.

Garnier (*R.*). — Sur une classe d'équations différentielles dont les intégrales générales ont leurs points critiques fixes. (205-208).

A 4880.

Jarkowski (*W.*). — Quelques théorèmes sur les sustentateurs. (208-211).

B 2840.

Tanakadaté (*A.*). — Étude photographique du courant d'air produit par le mouvement d'une hélice. (211-213).

B 2840.

Bricard (*R.*). — Au sujet d'une réclamation de priorité de M. E. Study. (293-295).

A 8420.

Dienes (*P.*). — Sur un problème d'Abel. (294-296).

A 3630, 3240.

Mazurkiewicz (*E.*). — Sur la théorie des ensembles. (296-298).

A 0430.

Korn (*A.*). — Sur le problème biharmonique et le problème fondamental dans la théorie de l'élasticité. (299-301).

B 2490.

De Douder (*Th.*). — Sur le théorème de Poisson et sur les invariants différentiels de Lie. (571-573).

A 5240, 5220.

Lévy (*P.*). — Sur quelques équations définissant des fonctions de ligne. (373-375).

A 4430.

Bohr (*H.*). — Sur la convergence des séries de Dirichlet. (375-377).

A 3630.

Sainte-Laguë (*A.*). — La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés. (377-378).

A 1630.

Darmois (*G.*). — Sur les correspondances à normales concourantes. (431-434).

A 8420, 8830.

De Saussure (*R.*). — Au sujet d'une réclamation de priorité de M. E. Study. (434-435).

A 8420.

Fekete (*M.*). — Sur un théorème de M. Landau. (497-500).

A 3630.

Demoulin (*A.*). — Sur les familles de Lamé composées de surfaces possédant des points singuliers. (587-589).

A 8860.

Darboux (*G.*). — Remarques sur la Communication précédente. (589-590).

A 8860.

Picard (*E.*). — Discours prononcé aux obsèques de M. Maurice Lévy. (603-606).

A 0010, 0040, B 0010.

Picard (*E.*). — Sur une équation fonctionnelle singulière du type de l'équation de Fredholm. (606-610).

P 1460, 5630.

Bernstein (*S.*). — Sur une généralisation des théorèmes de Liouville et de M. Picard. (636-639).

A 3640, 4840.

Robin (*F.*). — Loi de la résistance à l'écrasement de corps cylindriques en fonction de leurs dimensions. (639-641).

B 3250, 3620.

Demoulin (*A.*). — Sur certains couples de systèmes triple-orthogonaux. (796-800).

A 8860.

Stekloff (*W.*). — Sur le développement d'une fonction arbitraire en séries de fonctions fondamentales. (800-803).

A 3630.

Petot (*A.*). — Sur les moteurs désaxés. (805-808).

B 0430.

Bachelier (*L.*). — Mouvement d'un point ou d'un système matériel soumis à l'action de forces dépendant du hasard. (852-855).

A 1630.

Arnodin. — Le pont de la Cassagne (système Giselard). (855-858).

B 3270.

Cartan (*E.*). — Les développables isotropes et la méthode du trièdre mobile. (919-922).

A 8420.

Fabry (*E.*). — Ordre des points singuliers d'une série de Taylor. (922-925).

A 8240.

Chatelet (*A.*). — Sur quelques applications du calcul des tableaux à la théorie des ordres et entiers algébriques. (925-927).

A 4010.

Lalesco (*T.*). — Sur les noyaux résolvants. (928-930).

A 3640.

Brillouin (*M.*). — Mouvement discontinu de Helmholtz. Obstacles courbes. (931-933).

B 2440.

Tzitzéica (*G.*). — Sur un théorème de M. Darboux. (971-974).

A 8455.

Stekloff (*W.*). — Une application nouvelle de ma méthode de développement des fonctions fondamentales. (974-976).

A 3630.

Lévy (*P.*). — Sur l'intégrabilité des équations définissant des fonctions de lignes. (977-979).

A 4460, 3280.

Eiffel (*G.*). — Sur la résistance des plans rectangulaires frappés obliquement par le vent. (979-981).

B 2830.

Gau (*P.*). — Sur l'intégration, par la méthode de M. Darboux, d'une équation aux dérivées partielles du second ordre quelconque. (1031-1033).

A 4840.

Lalesco (*T.*). — Sur les pôles des noyaux résolvants. (1055-1034).

A 3640.

Villat (*H.*). — Sur les mouvements d'un fluide autour d'un obstacle de forme donnée. (1034-1037).

B 2240.

Servant (*H.*). — Sur les transformations des surfaces applicables sur les surfaces du second degré. (1105-1109).

A 8850.

Blutel (*E.*). — Sur l'application de la méthode d'approximation de Newton à la résolution approchée des équations à plusieurs inconnues. (1109-1112).

A 2440.

Autonne (*L.*). — Sur les groupes commutatifs et pseudo-nuls des quantités hypercomplexes. (1113-1114).

A 1210.

Galbrun. — Sur la représentation asymptotique des solutions d'une équation aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable. (1114-1116).

A 6020.

Stekloff (*W.*). — Sur la condition de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales. (1116-1119).

A 3210.

Servant (*M.*). — Sur les transformations des surfaces applicables sur les surfaces du second degré. (1335-1336).

A 8850.

Lalesco (*T.*). — Sur les noyaux symétriques gauches. (1336-1337).

A 4850, 3630.

Kowalewski (*G.*). — Les formules de Frenet dans l'espace fonctionnel. (1338-1340).

A 8440, 0430.

Zoretti (*L.*). — Sur les équations du mouvement d'un fluide visqueux. (1340-1342).

B 2490.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

Tome CXXXVIII; année 1910 [1].

Faber (*G.*). — Sur la formule d'approximation de Newton. (1-21).

Cet article a pour but de compléter et de simplifier la théorie de la formule d'approximation de Newton; il se rapporte en principe à des fonctions d'une variable *complexe*.

---

[1] Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXXV, p. 150.

1. *Préliminaires.* — La formule d'approximation de Newton consiste, étant données une équation $f(x) = 0$ et une valeur approchée x_1, à prendre une nouvelle valeur approchée

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

et, d'une manière générale,

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}.$$

Les deux questions les plus importantes qui se posent sont les suivantes :

1° Existe-t-il une limite $\bar{x} = \lim_{i=\infty} x_i$?

2° Cette limite $\bar{x}$ est-elle racine de l'équation $f(x) = 0$?

L'auteur se place d'abord dans l'hypothèse où il y a une limite $\bar{x}$ et où l'on n'a pas, à partir d'un certain rang, $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = \bar{x}$. Alors $\bar{x}$ est ou un zéro de la fonction $\frac{f(x)}{f'(x)}$ ou un point d'indétermination de cette fonction. Ce dernier cas peut très bien se présenter.

Si $\bar{x}$ n'est pas un point d'indétermination de $\frac{f(x)}{f'(x)}$ et si $\bar{x}$ est un point ordinaire ou un point critique algébrique de $f(x)$, $\bar{x}$ est un zéro de $f(x)$, comme l'auteur le montre plus loin (§ 3).

Si $f(x)$ n'est pas une fonction analytique, mais est réelle, continue et dérivable, $\bar{x}$ n'est pas nécessairement un zéro de $f(x)$; mais la conclusion est certainement vraie si $f'(x)$ ne présente pas au voisinage de $\bar{x}$ une infinité de maxima et de minima.

2. *Étude de la convergence.* — $f(x)$ étant une fonction analytique, le théorème de la moyenne de Darboux pour les fonctions d'une variable complexe donne, appliqué à la fonction $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, l'égalité

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \lambda \frac{f(\xi) f''(\xi)}{[f'(\xi)]^2},$$

où ξ est un point du segment (x_{n-1}, x_n) et λ est de module au plus égal à 1. De là résulte le théorème suivant :

S'il existe un nombre positif $\alpha < 1$ tel qu'à l'intérieur du cercle K *de centre x_1 et de rayon* $R = \frac{1}{1-\alpha}\left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right|$, *on ait*

$$\left|\frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < \alpha,$$

la méthode d'approximation de Newton, appliquée à la valeur initiale x_1, donne une suite qui converge vers une racine de $f(x)$ située à l'intérieur de K.

On déduit de là que si $\bar{x}$ est un point ordinaire ou un point critique algébrique de $f(x)$, si $\frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \neq 0$ et $\left|\frac{f(\bar{x}) f''(\bar{x})}{[f'(\bar{x})]^2}\right| < 1$, il existe un domaine S

autour du point $\bar{x}$ tel que la suite de Newton converge vers $\bar{x}$, dès que la valeur initiale x_1 est à l'intérieur de S; si, au contraire $\left|\frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{[f'(\bar{x})]^2}\right| > 1$, la suite de Newton ne peut jamais converger vers $\bar{x}$.

En posant d'autre part $x_n - x_{n-1} = u_n$, on a, si x_n tend vers $\bar{x}$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{[f'(\bar{x})]^2}.$$

3. *Degré de la convergence.* — Si $\bar{x}$ est un point critique algébrique d'ordre q et si $f(\bar{x})$ est fini et différent de zéro, on a ou bien $\frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \neq 0$, ou bien $\frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{[f'(\bar{x})]^2} = \infty$, de sorte que la suite de Newton ne peut pas converger vers $\bar{x}$.

Si maintenant $f(\bar{x})$ est nul ou infini,

$$f(x) = a(x-\bar{x})^p + \ldots,$$

on a

$$\frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{[f'(\bar{x})]^2} = \frac{p-1}{p};$$

par conséquent la suite de Newton peut converger vers $\bar{x}$ si $p \geqq \frac{1}{2}$. Dans ce cas $\bar{x}$ est la somme d'une série Σu_i qui converge comme la progression géométrique $\sum \left(\frac{p-1}{p}\right)^i$.

Si p est égal à 1, ce qui est le cas le plus important dans la pratique, la série converge plus rapidement que toute progression géométrique.

D'une manière plus précise, si

$$f(x) = a(x-\bar{x}) + b(x-\bar{x})^{1+\gamma} + \ldots,$$

on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{b}{a}\gamma\right| |u_n|^\gamma (1+\varepsilon_n) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

la convergence de la série est comparable à celle de la série $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(1+\gamma)^i}$, en ce sens qu'il existe un nombre fini k tel que le $n^{\text{ième}}$ terme de chacune des deux séries soit plus petit que le $(n-k)^{\text{ième}}$ et plus grand que le $(n+k)^{\text{ième}}$ terme de l'autre série.

Si $\gamma = 1$, on a sensiblement

$$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\left[1 - \frac{f(x_{n-1})f''(x_{n-1})}{2[f'(x_{n-1})]^2}\right],$$

formule qui serait inexacte pour $p \neq 1$.

4. *Remarques sur le cas des fonctions réelles.* — Si dans un intervalle (a, b) la fonction réelle $f(x)$ admet la seule racine $\bar{x}$, si de plus dans cet

intervalle $f'(x)$ et $f''(x)$ ne peuvent s'annuler que pour $\bar{x}$, on peut de plusieurs manières trouver un intervalle plus restreint à l'intérieur duquel se trouve $\bar{x}$. Si par exemple on a

$$f(a)f''(a) > 0, \qquad f(b)f''(b) < 0,$$

les nombres

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad a_2 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

sont situés du même côté que a par rapport à $\bar{x}$, le nombre a_1 étant certainement plus approché que a; les nombres

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{m(a-b)^2}{2f'(b)} \operatorname{sign}[f''(b)],$$

$$b'_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}\left[1 - \frac{m|f(b)|}{2[f'(b)]^2}\right],$$

$$b_2 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{(b-a)^2 m}{2f'(a)} \operatorname{sign}[f''(a)]$$

sont situés du même côté que b par rapport à $\bar{x}$. Dans ces formules m est un nombre positif supérieur ou égal au maximum de $|f''(x)|$ dans l'intervalle (a, b); de plus on désigne par $\operatorname{sign}[f(x)]$ le nombre $+1$ ou -1, suivant que $f(x)$ est positif ou négatif.

5. *Méthodes d'approximation toujours convergentes dans le cas d'équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles.* — Si le polynome entier $f(x)$ à coefficients réels de degré n a toutes ses racines réelles, la courbe $y = F(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ se compose de l branches de courbes distinctes, l désignant le nombre des racines distinctes de $f(x)$. Une remarque géométrique simple montre que l'on a

$$\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \leq \frac{n-1}{n},$$

ce qui n'est autre chose qu'un théorème connu de Gerbaldi. De cette inégalité on peut déduire que la méthode de Newton, appliquée à la fonction $[F(x)]^m$, où $m \geq 2n$, conduit toujours à une suite convergente; on a

$$x_{i+1} = x_i + \frac{f(x_i)f'(x_i)}{m\{f(x_i)f''(x_i) - [f'(x_i)]^2\}};$$

la racine $\bar{x}$ de $f(x)$ vers laquelle converge x_i est l'une des extrémités de l'intervalle contenant la valeur initiale x_1 et limité par une racine de $f(x)$ et une racine de $f'(x)$ consécutives.

6. *Remarques géométriques.* — Dans le plan de la variable complexe x, la droite qui joint le point x_1 au point $x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ est normale à la courbe passant par x_1 sur laquelle le module de $f(x)$ reste constant. Les trajectoires orthogonales des courbes $|f(x)| = C$ passent toutes, à l'exception d'un nombre fini d'entre elles, par l'une des racines $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_l$ de $f(x)$; elles permettent de partager le plan en l domaines K_i correspondant à chacune de ces racines.

Si G_i est un domaine borné situé à l'intérieur de K_i, il existe un nombre entier m ne dépendant que de G_i et tel que la méthode de Newton, appliquée à $y = [f(x)]^m$ et à une valeur initiale x_1 quelconque intérieure à G_i, conduise à la racine $\overline{x_i}$ intérieure à K_i. En particulier, dans le cas d'une équation du second degré à racines distinctes $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$, la méthode de Newton, appliquée à $y = f(x)$, conduit, comme l'a montré E. Schröder, à celle des deux racines $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$ qui est le plus rapprochée de la valeur initiale choisie x_1.

Fejér (*Léopold*). — Constantes de Lebesgue et séries de Fourier divergentes. (22-53).

Cet article se rapporte à la théorie des fonctions partout continues dont la série de Fourier diverge pour une valeur de la variable : ce sujet avait fait déjà l'objet de deux Notes antérieures du même auteur (même Journal, t. CXXXVII, p. 1, et *Rendiconti del Circ. matem. di Palermo*, t. XXVIII, p. 402).

1. *Les constantes de Lebesgue de la série de Fourier.* — Soit $s_n(x)$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ finie et intégrable (au sens de Riemann) dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$. M. Lebesgue a considéré l'ensemble des fonctions $f(x)$ qui restent dans cet intervalle inférieures ou égales à 1 en valeur absolue; la valeur absolue $|s_n(x)|$ de la somme $s_n(x)$ admet, pour une valeur donnée de x et pour toutes les fonctions de cet ensemble, une borne supérieure $\rho_n(x)$

$$\rho_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right| dt$$

qui est atteinte en particulier pour la fonction

$$\varphi_n(x)\,\mathrm{sign}\,\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{sign}\,a = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad a > 0, \\ 0 & \text{si} \quad a = 0, \\ -1 & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

La quantité $\rho_n(x)$ est d'ailleurs indépendante de x. On arrive ainsi à une suite infinie de constantes positives

$$\rho_0, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n, \quad \ldots$$

définies par l'égalité

$$\rho_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt,$$

et qui sont les *constantes de Lebesgue.*

M. Lebesgue a démontré que ρ_n augmente indéfiniment avec n; l'auteur donne une nouvelle démonstration de cette propriété fondée sur la formule

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx;$$

de plus il trouve une expression asymptotique de ρ_n. On a en effet, par un calcul facile,

$$\rho_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+\pi} + \ldots + \frac{1}{t+n\pi}\right)\sin t\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{n+1\frac{\pi}{2n+1}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t}\,dt$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)|\sin(2n+1)t|\,dt,$$

ce qui conduit à

$$\rho_n = \frac{4}{\pi^2}\log n + c_0 + \varepsilon_n,$$

où ε_n tend vers zéro et où c_0 est la constante donnée par la formule

$$c_0 = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)dt - \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\frac{\Gamma'\left(\frac{t}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{\pi}\right)}\sin t\,dt.$$

Une expression asymptotique plus précise que l'auteur indique sans la démontrer conduit à la conséquence qu'à partir d'un certain rang les constantes de Lebesgue vont en croissant.

Le problème qui vient d'être résolu pour les sommes $s_n(x)$ peut être posé pour les sommes

$$S_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n} = \int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right)^2 dt.$$

Si $|f(x)| \leq 1$, on a $|S_n(x)| \leq 1$ et l'on a en particulier $S_n(x) = 1$ si l'on prend $f(x) = 1$. Les constantes de Lebesgue sont donc ici remplacées, pour chaque valeur de n, par l'unité.

2. *Les suites de fonctions* $\psi\left(n + \frac{1}{2}, x\right)$, $\psi(2n, x)$, $\theta(n, x)$, $\theta(n, r, x)$. — La suite des fonctions

$$\varphi_n(x) = \operatorname{sign}\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \operatorname{sign}\sin(2n+1)\frac{x}{2} \qquad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

jouit de la propriété que, pour la $n^{\text{ième}}$ fonction $\varphi_n(x)$, la $n^{\text{ième}}$ somme $s_n(x)$ prend pour $x = 0$ une valeur ρ_n qui augmente indéfiniment avec n. Les fonctions $\varphi_n(x)$ sont *discontinues;* mais il est facile de trouver une autre suite de fractions *continues* jouissant de la même propriété; M. Lebesgue y est arrivé en se servant de l'approximation de certaines fonctions discontinues. Si l'on considère simplement, avec l'auteur, la suite des fonctions continues

$$\psi_n(x) = \sin(2n+1)\frac{x}{2} \qquad (0 \leq x \leq 2\pi),$$

on a, pour la $n^{\text{ième}}$ fonction $\psi_n(x)$ de cette suite,

$$s_n(0) = \sigma_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\sin(2n+1)t]^2}{\sin t}\,dt;$$

σ_n augmente indéfiniment avec n et l'on peut obtenir la valeur asymptotique

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi}\log n + \gamma_0 + \varepsilon_n,$$

où ε_n tend vers zéro et où l'on a

$$\gamma_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) dt + 2\int_0^1 \log\Gamma(t)\sin 2\pi t\,dt.$$

On peut d'ailleurs calculer directement les coefficients de la série de Fourier de $\psi_n(x)$, qui est une série de cosinus et l'on trouve que *toutes les sommes partielles de cette série de Fourier sont positives pour $x = 0$ et que, de plus, la plus grande de ces sommes, la $n^{\text{ième}}$, est supérieure à* $\frac{1}{2\pi}\log(2n+1)$.

On obtient des suites jouissant des mêmes propriétés en prenant

$$\psi(\mu, x) = \sin \mu x \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \pi,$$
$$\psi(\mu, x) = \psi(\mu, 2\pi - x) \quad \text{pour} \quad \pi \leq x \leq 2\pi,$$

où μ est un nombre entier positif. Une autre suite analogue s'obtient en considérant la fonction

$$\theta(n, r, x) = \frac{\cos(r+1)x}{n} + \frac{\cos(r+2)x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos(r+n)x}{1}$$
$$- \frac{\cos(r+n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(r+n+2)x}{n+2} - \ldots - \frac{\cos(r+2n)x}{n};$$

r désigne un entier positif; cette fonction est à elle-même sa propre série de Fourier; tous les $s_n(0)$ sont positifs ou nuls et la plus grande des sommes $s_n(0)$ a pour valeur

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1$$

qui augmente indéfiniment avec n. Il est vrai que la fonction $\theta(n, r, x)$ ne reste pas en valeur absolue inférieure à 1, comme $\psi(\mu, x)$, mais l'auteur démontre que l'on a l'inégalité remarquable

$$|\theta(n, r, x)| < 25,6.$$

3. *Exemples de fonctions continues avec une série de Fourier divergente.* — Toutes les suites précédentes permettent de former explicitement des fonctions

continues dont la série de Fourier diverge pour $x = 0$; par exemple les fonctions

$$f_1(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{\nu^3}+1)\frac{x}{2}}{\nu^2} \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi),$$

$$f_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{\nu^3} x}{\nu^2} \quad (0 \leqq x \leqq \pi) \quad \text{avec} \quad f_2(-x) = +f_2(x)\ (-\pi \leqq x \leqq 0),$$

$$f_3(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\theta(2^{\nu^3}, 0, x)}{\nu^2} \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi).$$

Un quatrième exemple conduit à une fonction dont la série de Fourier a des coefficients simples; l'auteur prend

$$f_4(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\theta(2^{\nu^3}, r_\nu, x)}{\nu^2},$$

où

$$r_1 = 0, \qquad r_\nu = 2.2^{1^3} + 2.2^{2^3} + \ldots + 2.2^{(\nu-1)^3} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots).$$

Pour avoir la suite des coefficients de la série de Fourier correspondante, qui est une série de cosinus, il suffit de considérer la suite de $2n$ nombres

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n-1}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad -1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad -\frac{1}{n},$$

de former cette suite pour les valeurs $n = 2^{1^3}, 2^{2^3}, 2^{3^3}, \ldots, 2^{\nu^3}, \ldots$, et d'écrire à la suite les unes des autres toutes ces suites en divisant par ν^2 les nombres de la $\nu^{\text{ième}}$ suite.

4. *Remarques sur la nature de la divergence de ces séries de Fourier.* — Dans les exemples précédents, les sommes $s_n(0)$, au lieu d'osciller autour de la valeur $f(0)$, lui sont constamment supérieures, puisqu'elles sont toutes positives. Quant aux moyennes arithmétiques de ces sommes elles convergent vers $f(0) = 0$; cette propriété générale peut se vérifier pour la série de Fourier de la fonction $f_4(x)$.

5. *Conclusion.* — L'existence de fonctions continues dont la série de Fourier diverge pour une valeur particulière de x avait déjà été démontrée par P. du Bois-Reymond; celui-ci avait posé la question de savoir s'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier est partout divergente : ce problème n'est pas encore résolu. En particulier on peut vérifier facilement que la série de Fourier de la fonction

$$f_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{\nu^3} x}{\nu^2}$$

converge pour les valeurs de x de la forme $\frac{r}{2^s}\pi$ où r et s sont des entiers positifs quelconques.

Hettner (*G.*). — L'équation de la surface minima de Schwarz

dans ses relations avec les fonctions thêta hyperelliptiques. (54-76).

M. Schwarz (*Gesammelte math. Abhandl.*, t. I, p. 6-125) a déterminé l'équation de la surface minima simplement connexe qui contient le périmètre d'un quadrilatère gauche dont les quatre côtés sont égaux et font entre eux un angle de 60°. On obtient cette surface en faisant

$$\mathcal{F}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - 14 s^4 + s^8}}, \qquad \mathcal{F}(0) = +1,$$

$$\mathcal{F}_1(s_1) = \frac{1}{\sqrt{1 - 14 s_1^4 + s_1^8}}, \qquad \mathcal{F}_1(0) = +1,$$

dans les formules de Weierstrass

$$x = \int_0^s (1 - s^2)\,\mathcal{F}(s)\,ds + \int_0^{s_1} (1 - s_1^2)\,\mathcal{F}_1(s_1)\,ds_1,$$

$$y = \int_0^s i(1 + s^2)\,\mathcal{F}(s)\,ds - \int_0^{s_1} i(1 + s_1^2)\,\mathcal{F}_1(s_1)\,ds_1,$$

$$z = \int_0^s 2s\,\mathcal{F}(s)\,ds + \int_0^{s_1} 2s_1\,\mathcal{F}_1(s_1)\,ds_1.$$

Le théorème d'addition des intégrales elliptiques a permis à Schwarz d'obtenir l'équation de la surface en annulant une fonction rationnelle entière de fonctions elliptiques des trois coordonnées x, y, z. Cette surface de Schwarz appartient à une catégorie de surfaces minima, étudiée postérieurement par Weierstrass et dont l'équation est de la forme

$$\mathfrak{Z}(v_1, v_2, v_3) = 0,$$

où v_1, v_2, v_3 sont des fonctions linéaires de x, y, z et où $\mathfrak{Z}$ est la fonction thêta qui se présente dans l'inversion des intégrales hyperelliptiques de genre 3. C'est à cette forme que l'auteur se propose de ramener l'équation de la surface de Schwarz; des transformations de calcul le conduiront ensuite aux trois formes différentes données par Schwarz à cette équation.

1. Un changement de coordonnées et le changement de variables $s' = -\frac{1}{s_1}$ conduisent d'abord aux équations suivantes :

$$x = \int_a^s \sqrt{-i}\,(1 - is^2)\,\mathcal{F}(s)\,ds + \int_{\frac{1}{a}}^{s'} \sqrt{-i}\,(1 - is^2)\,\mathcal{F}(s)\,ds,$$

$$y = \int_{-a}^s \sqrt{i}\,(1 + is^2)\,\mathcal{F}(s)\,ds + \int_{\frac{1}{a}}^{s'} \sqrt{i}\,(1 + is^2)\,\mathcal{F}(s)\,ds,$$

$$z = \int_{-a}^s 2s\,\mathcal{F}(s)\,ds + \int_{\frac{1}{a}}^{s'} 2s\,\mathcal{F}(s)\,ds;$$

dans ces équations a est le nombre $\frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{2}}$ racine de l'équation

$$1 - 14s^4 + s^8 = 0;$$

les sept autres racines de cette équation sont :

$$\frac{1}{a};\quad ai,\quad \frac{i}{a};\quad -a,\quad -\frac{1}{a};\quad -ai,\quad -\frac{i}{a}.$$

Les formules précédentes où entrent trois intégrales hyperelliptiques linéairement indépendantes de première espèce suffisent pour montrer que la surface appartient à la catégorie considérée par Weierstrass.

2. La fonction $\sqrt{1-14s^4+s^8}$ est uniforme sur la surface de Riemann obtenue en traçant les quatre coupures $\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $\left(ai, \frac{i}{a}\right)$, $\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$, $\left(-ai, -\frac{i}{a}\right)$. L'intégrale $\int_0^s 2s\,\bar{\mathcal{F}}(s)\,ds$ est une intégrale elliptique $\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-14u^2-u^4}}$; on peut prendre pour demi-périodes de cette intégrale elliptique les quantités

$$\omega = 2\int_0^{a^2} \frac{du}{\sqrt{1-14u^2-u^4}},$$

$$\omega' = 2i\int_{a^2}^1 \frac{du}{\sqrt{-(1-14u^2-u^4)}} = 2i\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+14u^2-u^4}}.$$

Les substitutions

$$\frac{1+s\sqrt{i}}{s-\sqrt{-i}} = s', \qquad \frac{1-s\sqrt{-i}}{s+\sqrt{i}} = s'$$

transforment les intégrales qui entrent dans x et dans y dans l'intégrale $\int 2s\,\bar{\mathcal{F}}(s)\,ds$ qui entre dans z. On peut ainsi calculer facilement au moyen de ω et ω' les valeurs des trois intégrales étendues à un chemin rectiligne partant de o et aboutissant à l'une des huit racines de $\bar{\mathcal{F}}(s)$.

3. L'auteur définit sur la surface de Riemann les six rétrosections K_1, K_1'; K_2, K_2'; K_3, K_3' telles que la seconde coupe la première, la quatrième la troisième, la sixième la cinquième, une fois dans le sens positif, puis il introduit, pour chacune des intégrales de première espèce qui entrent dans les expressions de x, y, z, les six périodes correspondantes :

$$2\omega_{\alpha 1},\quad 2\omega_{\alpha 2},\quad 2\omega_{\alpha 3};\quad 2\omega'_{\alpha 1},\quad 2\omega'_{\alpha 2},\quad 2\omega'_{\alpha 3}\qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

On trouve facilement, d'après les résultats du paragraphe précédent,

$$\begin{array}{lll}
\omega_{11} = -\omega, & \omega_{21} = \omega, & \omega_{31} = -\omega, \\
\omega_{12} = \omega, & \omega_{22} = \omega, & \omega_{32} = \omega', \\
\omega_{13} = \omega, & \omega_{23} = -\omega, & \omega_{33} = -\omega'; \\
\omega'_{11} = \omega, & \omega'_{21} = \omega - \omega', & \omega'_{31} = \omega - \omega', \\
\omega'_{12} = \omega + \omega', & \omega'_{22} = \omega + \omega', & \omega'_{32} = \omega, \\
\omega'_{13} = \omega - \omega', & \omega'_{23} = \omega, & \omega'_{33} = \omega - \omega'.
\end{array}$$

4. Si l'on pose

$$a_0 = -ai, \qquad a_1 = \frac{1}{a}, \qquad a_2 = a, \qquad a_3 = \frac{i}{a}, \qquad a_4 = ai,$$

$$a_5 = -\frac{1}{a}, \qquad a_6 = -a, \qquad a_7 = -\frac{i}{a},$$

$$t^2 = (s - a_0)(s - a_1)\ldots(s - a_7),$$

$$\frac{\sqrt{-1}\,(1 - is^2)}{t} = \mathrm{H}_1(s, t), \qquad \frac{\sqrt{i}\,(1 + is^2)}{t} = \mathrm{H}_2(s, t), \qquad \frac{2s}{t} = \mathrm{H}_3(s, t),$$

les équations

$$u_\alpha = \int_{a_1}^{s} \mathrm{H}_\alpha\, ds + \int_{a_2}^{s'} \mathrm{H}_\alpha\, ds + \int_{a_3}^{s''} \mathrm{H}_\alpha\, ds \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

permettent, par l'inversion, la représentation de s, s', s'' au moyen de u_1, u_2, u_3: on a

$$C_\lambda \sqrt{\frac{(a_\lambda - s)(a_\lambda - s')(a_\lambda - s'')}{(a_1 - s)(a_1 - s')(a_1 - s'')}} = \frac{\vartheta_\lambda(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta(v_1, v_2, v_3)},$$

où les C sont des constantes indépendantes de s, s', s'' et où les u_α sont liés aux v_α par les relations

$$u_\alpha = 2\omega_{\alpha 1} v_1 + 2\omega_{\alpha 2} v_2 + 2\omega_{\alpha 3} v_3 \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

On obtient facilement, en faisant $s'' = a_7$ [d'où $\vartheta(v_1, v_2, v_3) = 0$]:

$$u_1 = x - \omega', \qquad u_2 = y - \omega', \qquad u_3 = z + \omega',$$

$$v_1 = \frac{u_2}{4\omega} - \frac{u_3}{4\omega}, \qquad v_2 = \frac{u_1}{4\omega} - \frac{u_3}{4\omega}, \qquad v_3 = \frac{u_1}{4\omega} - \frac{u_3}{4\omega}.$$

Par suite, en posant $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$, l'équation de la surface minima prend la forme

$$\vartheta\left(\frac{y}{4\omega} - \frac{z}{4\omega} - \frac{1}{4} - \frac{\tau}{4},\ \frac{x}{4\omega} + \frac{y}{4\omega} - \frac{\tau}{2},\ \frac{x}{4\omega} - \frac{z}{4\omega} - \frac{1}{4} - \frac{\tau}{4}\right) = 0.$$

5. Si l'on désigne par $(\omega)_{\alpha\beta}$ les mineurs du déterminant $|\omega_{ij}|$, les modules $\tau_{\alpha\beta}$ de la fonction ϑ sont donnés par la formule

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{(\omega)}\left|(\omega)_{1\alpha}\omega'_{1\beta} + (\omega)_{2\alpha}\omega'_{2\beta} + (\omega)_{3\alpha}\omega'_{3\beta}\right| \qquad (\alpha \leq \beta),$$

ce qui donne ici

$$\tau_{11} = 1 + \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2\tau}, \qquad \tau_{12} = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}, \qquad \tau_{13} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tau},$$

$$\tau_{22} = 1 + \tau, \qquad \tau_{23} = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2},$$

$$\tau_{33} = 1 + \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2\tau}.$$

La partie réelle de la forme quadratique $\Sigma\tau_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$ est constamment négative, ce qui assure la convergence de la série $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$.

Le groupement des termes de cette série met en évidence la possibilité d'exprimer la fonction ϑ au moyen des fonctions thèta elliptiques de modules 2τ et $-\frac{2}{\tau}$. On a

$$\begin{aligned}\vartheta(v_1, v_2, v_3) = {} & \vartheta_3(v'_1 \mid 2\tau)\,\vartheta_3\left(-\frac{v'_2}{\tau}\,\middle|\,-\frac{2}{\tau}\right)\vartheta_2(v'_3 \mid 2\tau) \\ & - \vartheta_2(v'_1 \mid 2\tau)\,\vartheta_2\left(-\frac{v'_2}{\tau}\,\middle|\,-\frac{2}{\tau}\right)\vartheta_3(v'_3 \mid 2\tau) \\ & - \vartheta_3(v'_1 \mid 2\tau)\,\vartheta_2\left(-\frac{v'_2}{\tau}\,\middle|\,-\frac{2}{\tau}\right)\vartheta_2(v'_3 \mid 2\tau) \\ & - \vartheta_2(v'_1 \mid 2\tau)\,\vartheta_3\left(-\frac{v'_2}{\tau}\,\middle|\,-\frac{2}{\tau}\right)\vartheta_2(v'_3 \mid 2\tau),\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} v'_1 &= -v_1 + v_2 + v_3, \\ v'_2 &= -\tau(v_1 - v_2 + v_3), \\ v'_3 &= v_1 + v_2 - v_3. \end{aligned}$$

6. On peut transformer l'expression précédente en n'y introduisant que des fonctions elliptiques de même module 2τ, $\frac{\tau}{2}$ et $\frac{\tau-1}{2}$. On arrive ainsi aux trois formules, qui se rapportent respectivement à ces trois cas :

$$\begin{aligned}\vartheta(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{\frac{\tau}{2i}}\, e^{\frac{\pi i v_2'^2}{2\tau}} \Big\{ & \vartheta_3(v'_1)\,\vartheta_2(v'_2)\,\vartheta_3(v'_3) + \vartheta_2(v'_1)\,\vartheta_2(v'_2)\,\vartheta_2(v'_3) \\ & - \vartheta_3(v'_1)\,\vartheta_2(v'_2)\,\vartheta_2(v'_3) + \vartheta_3(v'_1)\,\vartheta_3(v'_2)\,\vartheta_2(v'_3) \\ & - \vartheta_3(v'_1)\,\vartheta_3(v'_2)\,\vartheta_2(v'_3) - \vartheta_2(v'_1)\,\vartheta_3(v'_2)\,\vartheta_2(v'_3) \\ & - \vartheta_2(v'_1)\,\vartheta_2(v'_2)\,\vartheta_2(v'_3) - \vartheta_2(v'_1)\,\vartheta_3(v'_2)\,\vartheta_2(v'_3)\Big\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta(v_1, v_2, v_3) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau}{2i}}\, e^{\frac{\pi i v_2'^2}{2\tau}} \Big\{ & \vartheta_3\left(\frac{v'_1}{2}\right)\vartheta_0\left(\frac{v'_2}{2}\right)\vartheta_0\left(\frac{v'_3}{2}\right) - \vartheta_0\left(\frac{v'_1}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{v'_2}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{v'_3}{2}\right) \\ & - \vartheta_3\left(\frac{v'_1}{2}\right)\vartheta_0\left(\frac{v'_2}{2}\right)\vartheta_0\left(\frac{v'_3}{2}\right) - \vartheta_0\left(\frac{v'_1}{2}\right)\vartheta_0\left(\frac{v'_2}{2}\right)\vartheta_0\left(\frac{v'_3}{2}\right)\Big\},\end{aligned}$$

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2}\sqrt{\tau}\, e^{\frac{\pi i v_2'^2}{2\tau}} \Big\{ \vartheta_0\left(\frac{v'_1}{2}\right)\vartheta_0\left(\frac{v'_2}{2}\right)\vartheta_0\left(\frac{v'_3}{2}\right) - i\,\vartheta_1\left(\frac{v'_1}{2}\right)\vartheta_0\left(\frac{v'_2}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{v'_3}{2}\right)\Big\}.$$

7. La première des formules du paragraphe 6, en posant

$$\varphi(u) = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\left(\frac{u}{2\omega} - \frac{\tau}{2}\,\middle|\,2\tau\right),$$

conduit à l'équation de la surface

$$\begin{aligned} & 1 + \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) \\ & \quad - [\varphi(y)\,\varphi(z) + \varphi(z)\,\varphi(x) + \varphi(x)\,\varphi(y)] - \varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z) = 0. \end{aligned}$$

Schwarz arrive à cette équation en définissant $\varphi(u)$ par l'équation

$$u = \int_1^{\varphi(u)} \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4}(1 - 14t^2 + t^4)}}.$$

8. La seconde des formules du paragraphe 6, en posant

$$\lambda(u) = -i\frac{\vartheta_2}{\vartheta_4}\left(\frac{u}{4\omega} - \frac{\tau}{4}\middle|\frac{\tau}{2}\right),$$

conduit à l'équation

$$\lambda(x)\lambda(y) - \lambda(y)\lambda(z) - \lambda(z)\lambda(x) - 1 = 0.$$

Schwarz arrive à cette équation en définissant $\lambda(u)$ par l'équation

$$u = \int_{\lambda u}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{3}{4}\lambda^4 - \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{3}{4}}}.$$

9. Enfin la troisième des équations du paragraphe 6, en posant

$$\lambda_1(u) = -i\frac{\vartheta_2}{\vartheta_4}\left(\frac{u}{4\omega} - \frac{\tau}{4}\middle|\frac{\tau-1}{2}\right),$$

conduit à l'équation

$$\lambda_1(x)\lambda_1(y)\lambda_1(z) - 1;$$

Schwarz déduit cette forme de la précédente en posant

$$\lambda_1(u) = \frac{\lambda(u) - 1}{\lambda(u) - 1},$$

ce qui conduit à

$$u = \int_{\lambda_1 u}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 - 1}}.$$

10. Les trois formes obtenues pour l'équation de la surface minima mettent en évidence ses propriétés géométriques. En particulier toutes les droites réelles de la surface résultent de 12 d'entres elles par translation; il suffit, dans les équations de ces droites, d'augmenter x, y, z de multiples entiers quelconques de 4ω.

Jung (*Heinrich W.-E.*). — Sur la théorie des faisceaux de courbes sur une surface algébrique (77-95).

L'auteur expose brièvement, sans démonstrations, les définitions et les notions fondamentales de la théorie des faisceaux de courbes (ou des classes de diviseurs) sur une surface algébrique; son but est de permettre une comparaison facile entre ses notations et celles de MM. G. Castelnuovo et F. Enriques dans leur Mémoire : *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques* (*Math. Ann.*, t. XLVIII).

L'auteur définit d'abord les *diviseurs premiers* attachés à une surface algébrique $F(x, y, z) = 0$. Chaque diviseur premier est défini par une courbe irréductible de la surface. Toute fonction rationnelle est décomposable en un produit de diviseurs premiers.

Tout produit de diviseurs premiers est un *diviseur;* un diviseur est *entier* si tous ses facteurs premiers entrent avec des exposants positifs. Deux diviseurs dont le quotient est une fonction rationnelle de x, y, z sont dits *équivalents ;* l'ensemble des diviseurs équivalents à un diviseur donné constitue une *classe*.

La *classe fondamentale* est formée des fonctions rationnelles. La *classe canonique* est formée des diviseurs équivalents au *diviseur canonique* $\mathfrak{A}$, défini par la condition que $\frac{dx\,dy}{\mathfrak{A}}$ n'est jamais ni nul ni infini.

La *dimension* $r\{\mathfrak{Q}\}$ d'une classe $(\mathfrak{Q})$ est le nombre des diviseurs *entiers* de cette classe linéairement indépendants; cette classe définit un faisceau de courbes d'ordre $r-1$.

On peut définir un symbole $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ qui, lorsque $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ sont des diviseurs premiers, représente le nombre des points d'intersection des courbes correspondantes; on a

$$(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1) + (\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_2).$$

Le symbole $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ ne change pas, si l'on remplace les deux diviseurs par des diviseurs équivalents.

Le *degré* d'une classe est égal à $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q})$ si $\mathfrak{Q}$ est un diviseur quelconque de la classe.

Le produit et le quotient de deux classes sont les classes formées par les produits et les quotients des diviseurs des deux classes. Deux classes sont *complémentaires*, si leur produit est égal à la classe canonique. L'auteur définit les classes complémentaires *par rapport à un diviseur premier* $\mathfrak{U}$.

La classe $\left(\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{U}}{\mathfrak{d}}\right)$, où $\mathfrak{d}$ est le diviseur des points doubles de $\mathfrak{U}$, s'appelle la classe *adjointe* au *diviseur premier* $\mathfrak{U}$; la classe $(\mathfrak{A}\mathfrak{Q})$ s'appelle la classe adjointe à la *classe* $(\mathfrak{Q})$.

L'auteur appelle *genre* d'une classe $(\mathfrak{Q})$ le nombre $\frac{1}{2}(\mathfrak{A}\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}) + 1$ (*genre virtuel* d'après MM. Castelnuovo et Enriques).

Si $(\mathfrak{Q}_i)$ et $(\mathfrak{Q}_2)$ sont deux classes quelconques, n et π leurs degrés et leurs genres $(i = 1, 2)$ et si l'on pose $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = i$, on a pour le degré n et le genre π de la classe produit, les formules

$$n = n_1 + n_2 - 2i,$$
$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1.$$

Le genre de la classe canonique n'est autre que le genre $p^{(1)}$ (*Curven-Geschlecht*) de M. Noether; il est lié au *degré* $p^{(2)}$ de cette classe par la formule

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1.$$

La différence $n - \pi$ est la même pour deux classes complémentaires.

L'auteur définit ensuite le *défaut* (Defect) d'une classe par rapport à un diviseur premier $\mathfrak{U}$; ce défaut $\omega_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{Q})$ est donné par la formule

$$\omega_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{Q}) = (\mathfrak{q}) - (\mathfrak{Q}) - \left(\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{U}}\right),$$

où $(\mathfrak{q})$ est la classe des diviseurs entiers du corps algébrique $\mathfrak{U} = 0$ qui proviennent des diviseurs entiers de la classe $(\mathfrak{Q})$.

Le reste de l'article est consacré à une série de formules se rapportant au théorème de Riemann-Roch, à la série caractéristique d'un diviseur premier, aux classes régulières, aux puissances d'une classe, enfin aux genres multiples d'une surface.

Thue (Axel). — Un théorème fondamental sur la détermination des valeurs approchées de toutes les racines de certaines fonctions entières (96-108).

L'auteur montre comment, étant données certaines fonctions rationnelles entières $F(x)$ de degré r, on peut construire des fonctions entières $A_n(x)$ et $B_n(x)$ de degré $rn+1$, telles qu'on ait

$$\rho A_n(x) - B_n(x) = (x-\rho)^{2n+1} C_n(x),$$

où ρ est une racine de $F(x)$ et où $C_n(x)$ est un polynome entier en x.

Les fonctions $F(x)$ dont il s'agit sont celles pour lesquelles il existe un polynome du second degré $U(x)$, tel qu'on ait

$$U(x)F''(x) - (r-1)U'(x)F'(x) + \frac{(r-1)r}{2}U''(x)F(x) = 0.$$

Les fonctions $A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont alors définies par les équations

$$H(x) = U(x)F'(x) - \frac{r}{2}U'(x)F(x),$$

$$4\lambda = U'^2(x) - 2U(x)U''(x),$$

$$A_0(x) = (r-1)\lambda,$$

$$B_0(x) = (r-1)\lambda x,$$

$$A_1(x) = U(x)F'(x) - \frac{r-1}{2}U'(x)F(x),$$

$$B_1(x) = xA_1(x) - U(x)F(x),$$

$$A_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)H(x)A_n(x) - (rn-1)F^2(x)A_{n-1}(x)}{\lambda[r(n+1)-1]},$$

$$B_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)H(x)B_n(x) - (rn+1)F^2(x)B_{n-1}(x)}{\lambda[r(n+1)-1]}.$$

Si λ et les coefficients de $F(x)$ sont des nombres rationnels, on peut de plus trouver un entier c et deux nombres positifs a et b indépendants de n tels que tous les coefficients de $cA_n(x)$ et $cB_n(x)$ soient entiers et tels que le module de chacun de ces coefficients soit inférieur à a^n, le module de chacun des coefficients de $cC_n(x)$ étant inférieur à b^n.

Cela étant, si ρ est une racine positive de $F(x)$ et si le nombre rationnel $\frac{p}{q}$ en est une valeur approchée telle que

$$|p - \rho q| < \frac{1}{q},$$

on a de nouvelles valeurs approchées de ρ en prenant $\frac{B_n\left(\frac{p}{q}\right)}{A_n\left(\frac{p}{q}\right)}$.

En posant

$$cq^{rn+1}A_n\left(\frac{p}{q}\right) = D_n, \qquad cq^{rn+1}B_n\left(\frac{p}{q}\right) = E_n,$$

les nombres D_n et E_n sont entiers et l'on a

$$|\rho D_n - E_n| < \delta^n q^{r-4\sqrt{n}-1},$$

où δ est indépendant de n, p, q : on a de plus

$$|D_n| < \gamma^n q^{rn+1},$$
$$|E_n| < \gamma^n q^{rn+1},$$

γ étant aussi indépendant de n, p, q. On peut de plus, si l'on a choisi q assez grand, déterminer une troisième quantité θ indépendante de n, p, q, telle qu'on ait

$$|D_n| > \theta^n q^{rn+1}.$$

Knopp (*Konrad*). — Valeurs limites des séries de Dirichlet, lorsqu'on s'approche du contour de convergence (109-132).

Introduction. — Dans une série de travaux récents, plusieurs auteurs se sont occupés de la manière dont se comporte une série de puissances quand la variable s'approche de la périphérie du cercle de convergence. Ces travaux, qui ont leur origine dans un théorème célèbre d'Abel, ont reçu une forte impulsion d'un théorème de Cesàro, ainsi conçu :

Si $\Sigma a_n x^n$ et $\Sigma b_n x^n$ sont deux séries de puissances à coefficients positifs, dont le rayon de convergence est égal à 1, *mais qui divergent pour $x = 1$, si de plus $\frac{a_n}{b_n}$ tend, pour $n = \infty$, vers une limite finie, on a aussi*

$$\lim_{\rho = 1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^n} = g,$$

lorsque le nombre positif ρ tend en croissant vers la valeur 1.

C'est le théorème qui a permis à M. Pringsheim de démontrer sur ce sujet des théorèmes d'une très grande portée.

Dans le présent article, l'auteur montre que, dans des cas très étendus, il est possible de comparer la manière dont se comporte une *série de Dirichlet* lorsque la variable se rapproche de la droite de convergence de cette série avec la manière dont se comporte une série de puissances lorsque la variable se rapproche de la circonférence de convergence. Il arrive ainsi à des théorèmes aussi généraux que ceux de M. Pringsheim.

1. Étant donnée une série de puissances $\Sigma b_n x^{-n}$ convergente pour $|x| < 1$ et divergente pour $x = 1$, M. Pringsheim considère les points voisins de 1 situés à l'intérieur d'un angle Δ ayant le point 1 pour sommet et dont les côtés sont tout entier dans le domaine de convergence de la série sans être tangents à la circonférence de convergence. Il convient alors de dire que la série est *uniformément divergente* pour $x = 1$ si l'on peut trouver un nombre positif β, ne dépendant que de l'ouverture de Δ et tel qu'on ait, pour tous les points x situés à

l'intérieur de Δ et suffisament voisins de 1, l'inégalité

$$\frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}\right|}{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n x^{-n}|} > \beta.$$

Cela étant, une série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$, convergente pour $\mathfrak{R}(x) > 1$ et divergente pour $x = 1$, sera dite uniformément divergente pour $x = 1$ si, dans les mêmes conditions que plus haut, on a

$$\frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}\right|}{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}\right|} > \alpha,$$

α étant un nombre positif qui ne dépend que de l'ouverture de Δ.

L'auteur démontre d'abord le premier théorème suivant :

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}$ *une série à coefficients positifs convergente pour* $|x| > 1$, *divergente et uniformément divergente pour* $x = 1$. *Si la série de Dirichlet à coefficients positifs* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$ *est telle qu'on ait*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=e^{n-1}}^{e^n} a_\nu}{b_n} = g,$$

elle converge pour $\mathfrak{R}(x) > 1$, *diverge uniformément pour* $x = 1$ *et l'on a, lorsque* x *tend vers* 1 *à l'intérieur de* Δ,

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}} = g;$$

il faut toutefois supposer

$$\lim \frac{n b_n}{B_1 + B_2 + \ldots + B_n} = 0 \qquad (B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

On peut généraliser le théorème précédent en supposant, au lieu de la propriété

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=e^{n-1}}^{e^n} a_\nu}{b_n} = g,$$

la propriété suivante plus générale,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{e^n} a_\nu}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = g,$$

ou la suivante, qui lui est équivalente,

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu}{b_1 + b_2 + \ldots + b_{[\log \nu]}} = g.$$

2. L'auteur combine maintenant le théorème précédent avec les résultats obtenus par M. Pringsheim. Le théorème fondamental de M. Prinsgheim est le suivant :

Soit $\lambda(x)$ une fonction positive croissante, tendant vers l'infini avec x de manière que

$$\frac{\lambda(r+1)}{\lambda(r)} = 1 + \frac{\varepsilon(r)}{r}, \qquad \text{avec} \qquad \lim_{r=\infty} \varepsilon(r) = 0.$$

Si l'on a une suite de nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$ telle que

$$\lim_{n=\infty} \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n^p \lambda^\alpha(n)} = g.$$

où l'on a : ou bien $p > 0$, $\alpha = +1$, 0 ou -1 ; ou bien $p = 0$, $\alpha = +1$: alors la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}$ converge pour $|x| > 1$, diverge uniformément pour $x = 1$, et l'on a, dans chaque angle Δ,

$$\lim_{n=1} (x-1)^p \lambda^{-\alpha}\left(\frac{1}{|x-1|}\right) \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n} = g\Gamma(p+1).$$

En prenant

$$b_n = n^p \lambda^\alpha(n) - (n-1)^p \lambda^\alpha(n-1)$$

et en prenant $\mu(r) = \lambda(\log r)$, on arrive au théorème suivant :

Soit $\mu(r)$ une fonction positive, croissante, tendant vers l'infini avec r, de manière que

$$\frac{\mu(r+1)}{\mu(r)} = 1 + \frac{\varepsilon(r)}{r \log r}, \qquad \text{avec} \qquad \lim_{r=\infty} \varepsilon(r) = 0.$$

Si les coefficients d'une série de Dirichlet $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}}$ *satisfont à la condition*

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\log^p(n)\,\mu^\alpha(n)} = g,$$

où l'on a : ou bien $p > 0$, $\alpha = +1$, 0 *ou* -1 ; *ou bien* $p > 0$, $\alpha = +1$: *alors la série converge pour* $\mathfrak{R}(x) > 1$, *diverge uniformément pour* $x = 1$ *et l'on a, à l'intérieur de chaque angle* Δ,

$$\lim_{x=1} \left\{ (x-1)^p \mu^\alpha\left(\frac{1}{|x-1|}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{x-1}} \right\} = g\,\Gamma(p+1).$$

L'auteur remarque que cet énoncé peut encore être généralisé en faisant intervenir, au lieu des coefficients a_ν, les sommes $A_\nu = a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu$; car les deux séries $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\nu-1}}{a_\nu}$ et $(x-1)\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{x^\nu}$ se comportent de la même manière au voisinage de $x = 1$. Il indique enfin ce que devient le théorème général quand on prend

$$\mu(x) = \log^q_{m+1} r \log^{q_1}_{m+2} r \ldots \log^{q_\varkappa}_{m+\varkappa+1} r,$$

où $m \geq 1$, $q > 0$ et où $q_1, q_2, \ldots, q_\varkappa$ sont les nombres réels quelconques.

Des théorèmes analogues pourraient être démontrés pour les séries de Dirichlet plus générales $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}$ et pour les intégrales

$$\mathfrak{I}(s) = \int_1^\infty \varphi(t)\, e^{-ts}\, dt.$$

Fraenkel (*Adolf*). — Le calcul de la fête de Pâques (134-146).

Après avoir rappelé la formule par laquelle Gauss calcule la date de la fête de Pâques et les travaux plus récents sur cette question, l'auteur expose une nouvelle méthode dans laquelle il commence par calculer directement la date de la « Lune XV » qui précède le dimanche de Pâques.

1. *Détermination de la fête de Pâques julienne.* — Le calendrier lunaire ecclésiastique se compose de cycles de 19 années, chaque cycle comprend 12 années de 12 mois et 7 années de 13 mois; les premières comprennent 11 jours de moins, les dernières 19 jours de plus que les années juliennes de même date; la dernière année du cycle comprend cependant un jour de moins. Étant donnée la distribution des années lunaires de 13 mois, on trouve que les $19Z + 7 - 8a$ premières années de l'ère chrétienne ($0 \leq a \leq 18$) contiennent $7Z + 3 - 3a$ années de 13 mois.

Si $19Z + 7 - 8a = A$, on trouve facilement

$$a = \left[\frac{7A + 8}{19}\right],$$

en désignant par $\left[\frac{m}{n}\right]$ le reste de la division de m par n, et

$$7Z + 3 - 3a = \frac{7A + 8 - a}{19}.$$

Un calcul facile montre alors que les A premières années lunaires surpassent les A premières années juliennes d'un nombre de jours égal à

$$\frac{240}{19} - \frac{30a}{19} + \frac{M}{19} \quad \text{où} \quad M = \left[\frac{A}{19}\right];$$

comme la lune XV de l'année o tombait le 6 avril, la date L en mars de la lune XV de l'année A est

$$L = 50 - c \quad \text{où} \quad c = \frac{30a + 7 - M}{19} = a + \frac{11a - 7 - M}{19}.$$

Le nombre M étant compris entre o et 18, c est la somme de a et du quotient à une unité près de $11a + 7$ par 19.

La date du dimanche de Pâques se détermine ensuite facilement. En désignant par b le reste $\left[\frac{A}{4}\right]$, le nombre de jours qui s'écoulent entre la lune XV et Pâques est

$$d = \left[\frac{4A + 2b - c + 6}{7}\right],$$

d'où la règle obtenue par l'auteur : Pâques tombe le $50 + d - c$ mars ou le $19 + d - c$ avril.

2. *Déterminations de la fête de Pâques julienne dans le calendrier mahométan.* — L'année mahométane est purement lunaire et se compose en moyenne de 354 jours $\frac{11}{30}$. La lune XV de l'année julienne A tombe dans l'année mahométane $J = A + E - 641$ où E est la partie entière du quotient

$$(1) \qquad \frac{6957 + 326{,}5\,A - 7{,}5b - 30c}{10631},$$

où b et c ont les mêmes valeurs que plus haut. La date f de cette lune dans l'année civile mahométane est la partie entière du quotient de e par 30, e désignant le reste de la division indiquée plus haut (1). La date du jour de Pâques est $f + h$, où

$$h = \left[\frac{J + 3g + 6f + 7}{7}\right], \qquad g = \left[\frac{e}{30}\right].$$

Il ne reste plus qu'à calculer le mois et le quantième du $(f + h)^{\text{ème}}$ jour de l'année J.

3. *Détermination de la fête de Pâques grégorienne.* — L'auteur indique sans démonstration une règle où interviennent deux nombres K et N de Gauss, et qui serait trop longue à indiquer ici.

Thomé (*L.-W.*). — Sur une application de la théorie des équations différentielles linéaires simultanées aux équations aux dérivées partielles (147-158).

Étant donnée une fonction $f(t, q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m)$ rationnelle entière des variables p et q, du second degré au plus, dont les coefficients sont des fonctions analytiques uniformes de t dans un domaine simplement connexe T qui contient le point $t = 0$, l'auteur s'occupe de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial W}{\partial t} + f\left(t, q_1, \ldots, q_m, \frac{\partial f}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q_m}\right) = 0.$$

La méthode de Jacobi-Hamilton consiste à intégrer le système d'équations différentielles simultanées

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_r}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

qui sont aussi linéaires; l'auteur détermine l'intégrale générale en introduisant comme constantes arbitraires les valeurs c_r et b_r de q_r et de p_r pour $t = 0$. Si f n'est pas linéaire par rapport aux p_r, les équations qui déterminent cette intégrale peuvent être résolues par rapport aux b_r. Les valeurs des q_r et des p_r portées dans l'expression

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \ldots + p_m \frac{\partial f}{\partial q_m} - f$$

donnent une fonction $F(t, c, b,)$ dont l'intégrale

$$V(t, c, b) = \int_0^t F(t, c, b)$$

fournit une solution de l'équation aux dérivées partielles, une fois qu'on y a remplacé les b, par leurs valeurs en fonction de t, des q et des c.

L'auteur, s'appuyant sur sa théorie d'intégration des équations linéaires, étudie le prolongement de l'intégrale W et s'occupe du cas singulier, traité par A. Mayer (*Math. Ann.*, t. III, p. 440).

Horn (*J.*). — Sur la manière dont se comportent les intégrales des équations aux différences et des équations différentielles linéaires pour de grandes valeurs de la variable (159-191).

Dans un Mémoire précédent (*Math. Annalen*, t. LIII), l'auteur s'était occupé des valeurs asymptotiques des intégrales de certaines équations aux différences linéaires de la forme

$$y(x+m) + x^k P_1 y(x+m+1) + x^{2k} P_2 y(x+m+2) + \ldots + x^{mk} P_m y(x) = 0,$$

où k est un nombre réel donné et P_i une série de puissances en $\frac{1}{x}$, convergente

pour de grandes valeurs de $|x|$, ou encore divergente, mais représentant asymptotiquement une fonction de x. L'auteur reprend ses recherches par une autre méthode et les étend aux équations différentielles linéaires.

Première Partie. — 1. Soit

$$D(y) = y(x+m) + P_1 y(x+m-1) + P_2 y(x+m-2) + \ldots + P_m y(x) = 0$$

une équation aux différences, où P_i est une fonction représentée asymptotiquement par un développement en $\frac{1}{x}$,

$$P_i = a_i + \frac{a'_i}{x} + \frac{a''_i}{x^2} + \ldots + \frac{a^{(n)}_i}{x^n} + \frac{\pi_i^{(n)}}{x^n}, \qquad \lim_{x=\infty} \pi_i^{(n)} = 0.$$

L'auteur suppose que *l'équation caractéristique*

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

admette m racines distinctes et différentes de zéro $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ et il les suppose ordonnées de manière à avoir

$$\alpha_1 | \geq \alpha_2 | \geq \ldots \geq |\alpha_m|.$$

L'équation aux différences est vérifiée formellement par m séries (en général divergentes)

$$S_i = \alpha'_i x^{\varphi_i}\left(1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots\right) \qquad (i = 2, \ldots, m),$$

ou

$$\varphi_i = -\frac{a'_1 \alpha_i^{m-1} + \ldots + a'_{m-1}\alpha_i + a'_m}{\alpha_i[m a_1 \alpha_i^{m-1} + (m-1) a_1 \alpha_i^{m-2} + \ldots + a_{m-1}]} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Si dans S_i on se limite au terme en $\frac{1}{x^n}$ on obtient une fonction

$$\varphi_i = a'_i x^{\varphi_i} \Phi_i\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui satisfait, quel que soit i, à une certaine équation aux différences

$$D_1(y) = y(x+m) + p_1 y(x+m-1) + \ldots + p_m y(x) = 0.$$

En posant

$$D_2(y) = D_1(y) - D(y) = (p_1 - P_1) y(x+m-1) + \ldots + (p_m - P_m) y(x),$$

l'équation aux différences données peut s'écrire

$$D_1(y) = D_2(y).$$

On a

$$D_2(\varphi_i) = \alpha'_i x^{\varphi_i + n - 2} q_i\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$p_1 = P_1 + \frac{\mathfrak{p}_1}{x^{n+1}}, \qquad \ldots, \qquad p_m = P_m + \frac{\mathfrak{p}_m}{x^{n+1}},$$

où $\mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ sont des séries de puissances en $\frac{1}{x}$. De plus si l'on pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_m(x) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_1(x-m-1) & \ldots & \varphi_m(x-m-1) \end{vmatrix}$$

et si l'on désigne par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ les mineurs relatifs aux éléments de la dernière ligne de ce déterminant, on a

$$\frac{\Delta_i}{\Delta} = \alpha_i^{-1} x^{-\sigma_i} \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right),$$

où les $\mathfrak{p}_i$ sont des séries de puissances en $\frac{1}{x}$.

Cela étant, l'auteur emploie une méthode d'approximations successives. En désignant par λ l'un des nombres 1, 2, ..., m, il détermine une suite de fonctions $u_0, u_1, u_2, \ldots$, par l'équation de récurrence

$$D_1(u_{\nu+1}) = D_2(u_\nu), \qquad u_0 = \varphi_\lambda.$$

La fonction $u_{\nu+1}$ se déduit de u_ν par la formule

$$u_{\nu+1} = \varphi_1 \sum_{\xi_1}^{x} D_2(u_\nu)\frac{\Delta_1}{\Delta} + \ldots + \varphi_m \sum_{\xi_m}^{x} D_2(u_\nu)\frac{\Delta_m}{\Delta},$$

où les ξ_i sont des nombres positifs à choisir ultérieurement, et l'on a

$$D_2(u_{\nu+1}) = D_2(\varphi_1)\sum_{\xi_1}^{x} D_2(u_\nu)\frac{\Delta_1}{\Delta} + \ldots + D_2(\varphi_m)\sum_{\xi_m}^{x} D_2(u_\nu)\frac{\Delta_m}{\Delta}.$$

2. En posant

$$D_2(u_\nu) = \alpha_\lambda^\nu x^{\sigma_\lambda - n - 2} F_\nu(x), \qquad F_0(x) = \mathfrak{q}_\lambda\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\xi_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_\lambda}, \qquad \sigma_i = \rho_i - \rho_\lambda,$$

on a les formules de récurrence

$$u_{\nu+1}\alpha_\lambda^{\nu} x^{\rho_\lambda} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^{\nu} x^{\sigma_i} \Phi_i\left(\frac{1}{x}\right) \sum_{\xi_i}^{x} \xi_i^{\nu} x^{-\sigma_i - n - 2} F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$F_{\nu+1}(x) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^{\nu} x^{\sigma_i} \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right) \sum_{\xi_i}^{x} \xi_i^{-\nu} x^{-\sigma_i - n - 2} F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right).$$

L'auteur suppose d'abord que les valeurs absolues de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont toutes distinctes. Il prend alors

$$\xi_1 = \ldots = \xi_{\lambda-1} = \xi_\lambda = x, \qquad \xi_{\lambda+1} = \ldots = \xi_m = x_0,$$

où x_0 est un nombre positif suffisamment grand. Si pour $n \geq x_0$, on a

$$\left|\mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq M, \qquad \left|\mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq N, \qquad \left|\Phi_i\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \Pi,$$

on a les inégalités fondamentales

$$|F_\nu(x)| \leq N\left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^\nu,$$

$$|u_{\nu+1}\alpha_\lambda^{-x}x^{-\beta_\lambda}| \leq \mathfrak{N}\left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^\nu,$$

où K désigne une certaine constante.

3. Si l'on choisit $x_0 > \sqrt[n+1]{MNK}$, la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \alpha_\lambda^{-x} x^{-\beta_\lambda}$$

est absolument et uniformément convergente pour $x \geq x_0$, et par suite l'équation

$$y_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$$

définit une fonction y_λ pour $x \geq x_0$. En posant

$$y_\lambda = \alpha_\lambda^x x^{\beta_\lambda}\left(\Phi_\lambda + \frac{\eta_\lambda}{x^{n+1}}\right),$$

on a, pour $x \geq x_0$,

$$|\eta_\lambda| \leq \mathfrak{N}\,MNK \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{MNK}{x_0^{n+1}}\right)^\nu.$$

Les m fonctions y_λ représentent un système de m intégrales indépendantes de l'équation aux différences donnée. De plus, chacune d'elles est représentée asymptotiquement par la série S_λ.

4. L'auteur s'affranchit ensuite de l'hypothèse que les valeurs absolues des racines de l'équation caractéristique sont toutes distinctes; si les racines sont distinctes et différentes de zéro, on arrive aux mêmes inégalités que précédemment et aux mêmes conclusions.

5. L'équation aux différences

$$y(x+m) + x^k P_1 y(x+m-1) + \ldots + x^{mk} P_m y(x) = 0$$

se ramène facilement à l'équation précédente en posant

$$y(x) = y'(x)\,[\Gamma(x+1)]^k;$$

elle admet par suite m intégrales indépendantes représentées asymptotiquement par m séries

$$S_i = [\Gamma(x+1)]^k\,\alpha_i^x x^{\beta_i}\left(1 + \frac{A_{i1}}{x} + \frac{A_{i2}}{x^2} + \ldots\right).$$

Deuxième Partie. — 6. Étant donnée l'équation différentielle

$$D(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + x^k P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + x^{mk} P_m y = 0.$$

où les P_i ont la même signification que plus haut, cette équation différentielle est vérifiée formellement par m séries normales de Thomé

$$S_i = e^{g_i(x)} x^{\rho_i} \left(1 - \frac{A_1}{x} - \frac{A_2}{x^2} - \ldots\right)$$

ou

$$g_i(x) = \alpha_i \frac{x^{k+1}}{k+1} - \alpha_1 \frac{x^k}{k} - \ldots - \alpha_{ik} x$$

est un polynome entier de degré $k+1$. Les α_i sont les m racines de l'équation caractéristique, supposées rangées par ordre de partie réelle non croissante. Les fonctions

$$\varphi_i = e^{g_i(x)} x^{\rho_i} \Phi_i\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \Phi_i = 1 - \frac{A_1}{x} - \ldots - \frac{A_m}{x^m}$$

satisfont à une équation différentielle $D_1(y) = 0$ et des notations analogues à celles de la première Partie conduisent aux formules

$$D_2(\varphi_i) = -D(\varphi_i) = e^{g_i(x)} x^{\rho_i - (m-1)k - n - 2} q\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{\Delta}{\Delta} = e^{-g_i(x)} x^{-\rho_i - (m-1)k} p_i\left(\frac{1}{x}\right).$$

La même méthode d'approximations successives est appliquée par les formules de récurrence

$$D_2(u_{\nu+1}) = D_2(u_\nu) \qquad (u_0 = \varphi_\lambda).$$

et elle donne

$$u_{\nu+1} = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \int_{\xi_i}^{x} D_2(u_\nu) \frac{\Delta_i}{\Delta} dx.$$

$$D_2(u_{\nu+1}) = \sum_{i=1}^{m} D_2(\varphi_i) \int_{\xi_i}^{x} D_2(u_\nu) \frac{\Delta}{\Delta} dx.$$

7. L'auteur pose

$$D_2(u_\nu) = e^{g_i(x)} x^{\rho_i - (m-1)k - n - 2} F_\nu(x)$$

et arrive, en prenant $\xi_1 = \ldots = \xi_\nu = \nu$, $\xi_{\nu+1} = \ldots = \xi^{n+1} = x$, aux inégalités

$$|F_\nu(x)| \leq N\left(\frac{MNk}{x_0^{n+1}}\right)^\nu,$$

$$|u_{\nu+1} e^{-g_i(x)} x^{-\rho_i}| \leq \mathfrak{N}\left(\frac{MNk}{x_0^{n+1}}\right)^\nu.$$

8. Ces inégalités se généralisent pour les dérivées successives des fonctions u_ν, le coefficient $\mathfrak{N}$ étant remplacé, pour la dérivée $m^{\text{ième}}$, par un autre coefficient $\mathfrak{N}^{(m)}$. Les mêmes conclusions en sont déduites que dans la première partie. Il existe m intégrales représentées asymptotiquement par les m séries S_i

9. L'auteur avait supposé dans ce qui précède, les parties réelles de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, toutes distinctes. Il montre que les conclusions subsistent s'il n'en est pas ainsi.

Troisième Partie. — 10. M. Dini a publié (*Annali di Matematica*, 3e série, t. II) une méthode d'intégration des équations différentielles linéaires fondée sur la considération de l'équation adjointe. En désignant par $E(z)$ l'expression différentielle adjointe de $D(y)$; par $z_1, z_2, \ldots, z_m$, m fonctions assujetties à l'unique condition de ne pas annuler identiquement le déterminant

$$Q = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & \ldots & z_1^{m-1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots\ldots \\ z_m & z'_m & \ldots & z_m^{m-1} \end{vmatrix};$$

par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ les mineurs relatifs à la dernière colonne de ce déterminant, les intégrales y de l'équation $D(y) = 0$ sont fournies par l'équation

$$y = (-1)^m \sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i}{Q} c_i + (-1)^m \sum_{i=1}^{i=1} \frac{Q_i}{Q} \int_{\xi_i}^{x} y E(z_i)\, dx.$$

En posant

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \qquad u_0 = (-1)^m \sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i}{Q} c_i,$$

on a

$$u_{\nu+1} = (-1)^m \sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i}{Q} \int_{\xi_i}^{x} u_\nu E(z_i)\, dx.$$

11. L'auteur montre comment la méthode précédente de M. Dini peut être appliquée de manière à conduire aux mêmes résultats que la méthode des approximations successives. Il compare les résultats du présent Mémoire à ceux obtenues par MM. Dini dans un second travail (*Annali di Matematica*, 3e série, t. III).

12. Enfin, l'auteur passe en revue les recherches récentes de MM. Ford, Galbrun et Perron sur les mêmes sujets.

Koebe (*Paul*). — Sur l'uniformisation des courbes analytiques quelconques. *Première Partie :* Le principe général d'uniformisation (192-252).

Si $y(x)$ est une fonction analytique quelconque, on dit que t est une variable uniformisante correspondant à $y(x)$ si la fonction analytique $t(x, y)$ est uniforme, c'est-à-dire ne prend aucune valeur plus d'une fois. Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont alors simultanément des fonctions analytiques uniformes de la variable complexe t. A la fonction $t(x, y)$ appartient une surface de Riemann Φ, qu'on peut imaginer comme développée sur la surface de Riemann F qui correspond à la fonction $y(x)$. La surface Φ peut alors, par le moyen de la fonction $t(x, y)$, être représentée d'une manière unique et conforme sur un domaine T à un seul feuillet, celui qui est défini par l'ensemble des valeurs que prend la variable t. Le problème de l'uniformisation conduit ainsi au nouveau problème suivant : Représenter d'une manière univoque et conforme sur un domaine à un seul feuillet une surface quelconque de Riemann jouissant de la propriété d'être décomposée en morceaux séparés par tout contour fermé qui lui est intérieur (surface de Riemann *schlichtartig*).

Pour résoudre ce problème, l'auteur construit sur la surface de Riemann B *la plus générale* la fonction potentielle U qui, dans l'interprétation de M. Klein, représente l'intensité d'un courant électrique permanent issu d'une double source placée en un point O de B. Cette fonction est, d'après Hilbert, complètement caractérisée par une propriété fondamentale de minimum, elle peut aussi être regardée, indépendamment de cette considération de minimum, comme la limite $U = \lim_{n=\infty} U_n$ de potentiels U_n, définis dans les domaines approchés B_n, par la condition que sur la frontière de ces domaines la dérivée normale soit nulle.

Si V est la fonction potentielle conjuguée de U, la fonction $U + iV$ réalise, dans le cas où la surface B est *schlichtartig*, la représentation conforme de B sur un domaine à un seul feuillet, dont les lignes frontières sont des segments de droite tous parallèles à l'axe réel, quelques-uns d'entre eux pouvant se réduire à un point. La frontière complète de ce domaine *a une aire nulle*, c'est-à-dire peut être renfermée dans un nombre fini de courbes fermées limitant une aire totale aussi petite qu'on veut. Ce dernier résultat est très remarquable : par exemple, tout domaine à un seul feuillet, dont le degré de connexion est infini et qui n'admet pour frontière qu'un ensemble de points discrets ayant la puissance du continu et d'*aire différente de zéro*, peut être représenté d'une manière univoque et conforme sur un autre domaine à un seul feuillet, *dont la frontière a une aire nulle*.

En ce qui concerne la démonstration de l'existence de la fonction U, l'auteur s'appuie essentiellement sur les méthodes combinatoires de Schwarz-Neumann, qui fournissent presque immédiatement les fonctions U_n dont U est la limite.

Parmi les transcendantes d'uniformisation $t(x, y)$ qui appartiennent à une courbe analytique donnée (x, y), il convient de signaler particulièrement celles pour lesquelles la surface Φ n'a, *par rapport à* F, aucun point de ramification et qui sont *simplement connexes*. La variable t est, dans ce cas, essentiellement caractérisée par la propriété que, non seulement x et y, mais encore toutes les fonctions $\tau(x, y)$ non ramifiées par rapport à la courbe (x, y), sont des fonctions uniformes de t. Si le domaine T des valeurs de ces variables est un cercle, ce qu'on peut toujours supposer, les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont des *fonctions uniformes automorphes* qui admettent un certain groupe de substitutions linéaires. Le théorème d'uniformisation qui se rapporte à ce cas-là est en effet le premier théorème d'uniformisation relatif à des courbes analytiques quelconques qui ait été démontré : il l'a été pour la première fois en 1907 par M. Poincaré et par l'auteur, qui suivirent d'ailleurs des méthodes différentes.

Pour les courbes analytiques réelles il faut signaler, comme présentant un intérêt particulier, les transcendantes d'uniformisation pour lesquelles la surface Φ se décompose en deux moitiés simplement connexes, symétriques l'une de l'autre.

Dans le paragraphe 1, l'auteur pose le problème qui se décompose en deux parties, un problème d'*analysis situs* et un problème de représentation conforme.

Le problème d'*analysis situs* est le suivant : *Trouver les surfaces* Φ *qui soient* SCHLICHTARTIG et *qui correspondent à une surface donnée* F.

Le problème de représentation conforme est le suivant : *Démontrer qu'une surface de Riemann schlichtartig est susceptible d'une représentation conforme sur un domaine à un seul feuillet.*

Dans le paragraphe 2, l'auteur résout le problème d'*analysis situs*. Il montre en particulier comment, étant donnée une surface quelconque F, on peut

construire une surface Φ qui ne possède, par rapport à F, aucun point de ramification, et qui soit *régulière* par rapport à F : cela veut dire que si l'on considère deux points quelconques de Φ coïncidant sur F, et appartenant à différents feuillets de Φ (différents *relativement à* F), cette relation de coïncidence définit une transformation ponctuelle univoque et réciproque de la surface Φ en elle-même. L'auteur construit également une surface Φ régulière par rapport à F et admettant, en des points donnés à l'avance de F, des points de ramifications d'ordres finis ou infinis donnés à l'avance.

Les paragraphes 3-14 sont consacrés au problème de représentation conforme. L'auteur considère un domaine B, supposé *schlichtartig*, qui sera en général d'un ordre de connexion infini, possédera en général une infinité de points de ramification, qui seront cependant tous d'ordre fini, car un point de ramification d'ordre infini devra être regardé comme faisant partie de la frontière de B. Le domaine B aura en général une infinité de feuillets. *On supposera qu'il contient à son intérieur le point à l'infini et qu'il est limité par des segments de droite tous parallèles à l'axe réel, certains d'entre eux pouvant se réduire à un point.*

Le cas le plus simple se présente lorsque la surface B a un ordre de connexion fini, possède un nombre fini de feuillets, a de plus un nombre fini de points de ramification et possède enfin une frontière formée de lignes analytiques bien définis et fermées. Dans ce cas l'auteur détermine la fonction potentielle U qui est, en un point O (x_0, y_0) intérieur à B, discontinue comme

$$\frac{1}{r}\cos\varphi = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

qui est uniforme sur tout le reste de la surface B et dont la dérivée normale est nulle tout le long de la frontière B.

Si, maintenant, B est la surface de Riemann la plus générale, même non *schlichtartig*, on peut la regarder comme la limite d'une suite de surfaces $B_1, B_2, B_3, \ldots$, satisfaisant aux conditions précédentes. *Les fonctions potentielles* $U_1, U_2, U_3, \ldots$, *correspondant à ces surfaces ont alors une limite* U *qui est la fonction potentielle cherchée correspondant à* B.

Pour démontrer ce théorème, l'auteur entoure le point O sur B d'une petite circonférence k_ρ de rayon ρ et de centre O. Soit K_ρ la surface de B limitée par cette circonférence; soient B_ρ la surface $B - K_\rho$ et $B_{n\rho}$ la surface $B_n - K_\rho$. On construit tout d'abord, en se donnant une suite déterminée de valeurs le long de k_ρ, la fonction potentielle u_n, uniforme en $B_{n\rho}$, qui prend sur k_ρ les valeurs données et qui, sur les autres contours qui limitent $B_{n\rho}$, satisfait à la condition que sa dérivée normale est nulle. La suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, est uniformément convergente. La fonction $u = \lim u_n$ est une fonction potentielle uniforme en B_ρ, prenant sur k_ρ les valeurs données et qui, au lieu de la condition d'avoir sa dérivée normale nulle le long des contours qui limitent la surface, condition qui, ici, n'a plus de sens, possède une propriété fondamentale de minimum qui suffit à la caractériser complètement, une fois connues les valeurs qu'elle doit prendre sur k_ρ. Le problème précédent étant résolu pour B_ρ, les principes de Schwarz-Neumann fournissent la fonction cherchée U. La propriété de minimum qui existe pour la fonction u se transmet à la fonction U.

Jung (*Heinrich W.-E.*). — Sur la transformation de Cremona dans le plan (255-318).

I. On n'a jusqu'à présent étudié les transformations de Cremona que dans le cas où il ne se présente aucune singularité particulière. Dans le cas général, il y a deux problèmes essentiels qui se posent. Le premier est le suivant :

Que devient dans la transformation un diviseur donné quelconque? L'auteur a résolu cette question dans un Mémoire précédent (*Rend. del Circ. mat. di Palermo*, t. XXVI, 1908, p. 113). Le deuxième problème se rapporte au symbole $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$ défini pour deux diviseurs quelconques et qui, lorsque ces deux diviseurs sont premiers, désigne le nombre des points d'intersection des courbes correspondantes. Le second problème qui se pose est le suivant : *Peut-on faire en sorte que, dans la tranformation, on ait* $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{U}', \mathfrak{B}')$, *si* $\mathfrak{U}'$ *et* $\mathfrak{B}'$ *sont les diviseurs transformés de* $\mathfrak{U}$ *et de* $\mathfrak{B}$?

Dans le présent Mémoire, l'auteur traite ces deux problèmes dans le cas simple des fonctions rationnelles de deux variables. Le résultat est très simple, à condition de considérer, outre les diviseurs premiers ordinaires ou de première espèce, de nouveaux diviseurs premiers, ou de deuxième espèce, qui, dans chacun des deux plans, correspondent aux points fondamentaux de la transformation de Cremona. Pour ces diviseurs premiers nouveaux, que l'auteur désigne par des lettres minuscules gothiques $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, le symbole $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ est défini, bien que d'une manière peu intuitive. On a alors les trois théorèmes suivants :

1° *Chaque diviseur, composé d'un nombre quelconque de diviseurs premiers de première et de deuxième espèce, est transformé, par la transformation de Cremona, en un diviseur bien déterminé;*

2° *Deux diviseurs* ÉQUIVALENTS, *c'est-à-dire dont le quotient est une fonction rationnelle, sont transformés en deux diviseurs équivalents;*

3° *Si* $\mathfrak{D}_1$ *et* $\mathfrak{D}_2$ *sont deux diviseurs quelconques,* $\mathfrak{D}'_1$ *et* $\mathfrak{D}'_2$ *les deux diviseurs transformés, on a*

$$(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = (\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2).$$

II. Dans l'étude des fonctions rationnelles de deux variables x, y, l'auteur ne se place pas au point de vue de la géométrie projective ; il regarde chacune des variables comme une variable complexe pour laquelle ∞ est une valeur particulière. L'ordre d'une fonction est défini par deux entiers (m, n), dont le premier désigne l'ordre par rapport à x, le second l'ordre par rapport à y : l'ordre (m, n) ne change pas et l'on effectue sur x et sur y deux transformations homographiques quelconques.

III. L'auteur fait correspondre à toute fonction irréductible rationnelle entière $A(x, y)$ un *diviseur premier* $\mathfrak{U}$, en ce sens qu'une fonction R sera dite divisible par $\mathfrak{U}^\alpha$ si $\frac{R}{A^\alpha}$ ne devient, pour $A = 0$, ni nul ni infini. Il fait aussi correspondre à $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ deux diviseurs premiers $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$, en ce sens qu'une fonction R est divisible par $\mathfrak{L}^\alpha$ si Rx^α, pour x infini et y arbitraire, n'est ni nul ni infini.

Toute fonction rationnelle de x, y peut, d'une manière et d'une seule, être décomposée en diviseurs premiers.

L'*ordre* de $\mathfrak{U}$ est par définition le même que celui de $A(x, y)$, l'ordre de $\mathfrak{L}$ est $(1, 0)$ et celui de $\mathfrak{M}$ est $(0, 1)$. L'ordre d'un *diviseur*, c'est-à-dire d'un produit d'un nombre quelconque de diviseurs premiers, chacun étant affecté d'un exposant entier positif ou négatif, est égal au produit des ordres des facteurs.

Deux diviseurs appartiennent à la même *classe* si leur quotient est une fonc

tion rationnelle de x, y ; pour que deux diviseurs appartiennent à la même classe, ou soient *équivalents*, il faut et il suffit qu'ils soient de même ordre.

Si $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sont deux diviseurs premiers, le nombre total des points d'intersection des courbes irréductibles correspondantes est désigné par le symbole $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$. Si les ordres de ces deux diviseurs premiers sont (a_1, a_2) et (b_1, b_2), on a

$$(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) = (\mathfrak{V}, \mathfrak{U}) = a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

Le symbole se généralise pour deux diviseurs quelconques de manière que la formule précédente reste toujours valable. On peut, par suite, dans le symbole $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ remplacer les deux diviseurs par des diviseurs équivalents.

IV. A chaque diviseur premier $\mathfrak{U}$ correspond un corps algébrique défini par l'équation $A(x, y) = 0$; ce corps algébrique jouit de la propriété que chaque fonction rationnelle de x, y correspond à une fonction du corps et que toute relation entre les fonctions rationnelles de x, y est vraie entre les fonctions correspondantes du corps. Il y a là un moyen de généraliser la définition des diviseurs premiers, chaque diviseur premier $\mathfrak{U}$, à ce nouveau point de vue, étant défini par un corps algébrique jouissant des propriétés précédentes.

V. Étant donné un diviseur premier $\mathfrak{U}$ défini de la manière précédente, deux cas peuvent se présenter. Ou bien, dans le corps algébrique $\mathfrak{U} = 0$ les fonctions qui correspondent à x et y ne sont pas toutes deux constantes ; dans ce cas, elles sont reliées par une relation algébrique $A(x, y) = 0$ et le diviseur premier $\mathfrak{U}$ peut être défini par cette équation ; on a un diviseur premier de première espèce.

Si x et y sont constants pour $\mathfrak{U} = 0$, par exemple $x = y = 0$, une fonction rationnelle $R = \frac{G(x, y)}{H(x, y)}$ qui ne reste pas constante pour $\mathfrak{U} = 0$ doit être telle que G et H s'annulent pour $x = y = 0$. On peut obtenir le corps $\mathfrak{U}$ de la manière suivante. On considère l'une des racines y de l'équation

$$G(x, y) - k H(x, y) = 0$$

qui tend vers 0 quand x tend vers 0, et le développement

$$y = a_1 x^{\varepsilon_1} + a_2 x^{\varepsilon_2} + \ldots$$

de cette racine, soit a_ν le premier coefficient qui dépend de k ; on pose

$$y = a_1 x^{\varepsilon_1} + a_2 x^{\varepsilon_2} + \ldots + a_{\nu-1} x^{\varepsilon_{\nu-1}} + t x^{\varepsilon_\nu}$$

dans chaque fonction du corps (x, y) et l'on fait, après réduction, $x = 0$ dans le résultat obtenu : on a ainsi transformé la fonction considérée en fonction rationnelle de t, c'est-à-dire en une fonction d'un corps algébrique. Ce corps algébrique définit un *diviseur premier de seconde espèce*.

VI. Soit $\mathfrak{a}$ un diviseur premier de seconde espèce défini par un développement

$$y = a_1 x^{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}} + a_2 x^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}} + \ldots + a_{\nu-1} x^{\frac{\varepsilon_{\nu-1}}{\varepsilon}} + t x^{\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon}},$$

où $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, sont des nombres entiers positifs tels que ε ait la plus petite valeur possible. Toute fonction rationnelle $F(x, y)$, quand on y remplace y

par le développement précédent, devient développable en une série procédant suivant les puissances croissantes de x,

$$F(x, y) = f_\alpha x^{\frac{\alpha}{\xi}} + f_1 x^{\frac{\alpha_1}{\xi}} + \ldots.$$

Si α est différent de zéro, on dit que F est divisible par x^α : il y a des fonctions divisibles par $\mathfrak{a}$ et pas par une puissance supérieure de $\mathfrak{a}$.

On peut de même définir la divisibilité d'un diviseur premier de première espèce par un diviseur premier de seconde espèce, ce qui n'a lieu que si la courbe correspondant au diviseur premier de première espèce passe par le point qui correspond au diviseur premier de seconde espèce. On définit enfin la puissance d'un diviseur premier de seconde espèce qui entre dans un diviseur quelconque formé de la composition d'un nombre quelconque de diviseurs premiers de première espèce.

On peut étendre la notion de diviseur en comparant un diviseur au moyen de diviseurs premiers des deux espèces ; deux diviseurs sont équivalents si leur quotient résulte de la décomposition d'une fonction rationnelle en ses diviseurs de première espèce. Deux diviseurs équivalents ont les mêmes diviseurs premiers de deuxième espèce.

VII. L'auteur considère maintenant une transformation birationnelle définie par les équations

$$x = \frac{F(\xi, \eta)}{F_1(\xi, \eta)}, \qquad y = \frac{G(\xi, \eta)}{G_1(\xi, \eta)};$$

$$\xi = \frac{H(x, y)}{H_1(x, y)}, \qquad \eta = \frac{K(x, y)}{K_1(x, y)}.$$

Par une telle transformation tout corps algébrique qui définit un diviseur premier du corps (x, y) définit aussi un diviseur premier du corps (ξ, η) ; il y a donc correspondance entre les diviseurs premiers des deux corps. Les diviseurs premiers du corps (x, y), auxquels correspondent des diviseurs premiers d'espèce différente du corps (ξ, η), sont dits *singuliers* et inversement on définit les diviseurs premiers singuliers du corps (ξ, η).

Les diviseurs premiers singuliers de deuxième espèce du corps (x, y) sont en nombre fini et l'on peut les déterminer comme il a été expliqué au paragraphe V; soient $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m$ ces diviseurs premiers auxquels correspondent dans le corps (ξ, η) les diviseurs premiers $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_m$. Le corps (ξ, η) admet, comme il sera démontré plus loin, le même nombre m de diviseurs premiers singuliers de deuxième espèce $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ auxquels correspondent dans le corps (x, y) les diviseurs premiers $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$. La seule transformation dans laquelle il n'existe pas de diviseur premier singulier est

$$\xi = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad \eta = \frac{a_1 y + b_1}{c_1 y + d_1}.$$

Chaque diviseur $\mathfrak{b}_i$ correspond à un point (x_0, y_0) qui se transforme dans la courbe $B_i(\xi, \eta) = 0$ qui définit $\mathfrak{B}_i$; le point (x_0, y_0) est un *point fondamental* et la courbe B_i une *courbe fondamentale* de la transformation. On obtient de même les points fondamentaux du plan des (ξ, η) et les courbes fondamentales du plan des (x, y).

VIII. Soit $\mathfrak{C}$ un diviseur quelconque d'un des corps (x, y) ou (ξ, η) ; l'au-

teur désigne par $s\mathfrak{Q}$ le produit des diviseurs premiers singuliers de seconde espèce qui entrent dans $\mathfrak{Q}$. Cela étant, l'auteur fait les conventions suivantes. Si $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ sont deux diviseurs premiers non singuliers correspondants du corps (x, y) et du corps (ξ, η), on pose

$$\frac{\mathfrak{p}}{s\mathfrak{p}} = \frac{\mathfrak{p}'}{s\mathfrak{p}'};$$

on pose de plus, pour les diviseurs premiers singuliers,

$$\frac{\mathfrak{U}_i}{s\mathfrak{U}_i} = \mathfrak{a}_i, \qquad \frac{\mathfrak{B}_i}{s\mathfrak{B}_i} = \mathfrak{b}_i.$$

Ces conventions permettent d'indiquer ce que devient, par la transformation considérée, tout diviseur du corps (x, y) ; par exemple si

$$s\mathfrak{p} = \mathfrak{b}_1^{\beta_1}\, \mathfrak{b}_2^{\beta_2}\, \mathfrak{b}_m^{\beta_m},$$

on a

$$\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{p}'}{s\mathfrak{p}'}\left(\frac{\mathfrak{B}_1}{s\mathfrak{B}_1}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\mathfrak{B}_m}{s\mathfrak{B}_m}\right)^{\beta_m}$$

et le second membre ne contient que des diviseurs du corps (ξ, η). Le diviseur premiers $\mathfrak{p}$ n'est donc pas *égal* au diviseur premier *correspondant* $\mathfrak{p}$.

Si $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ sont deux diviseurs quelconques du corps (x, y) et si par la transformation ces deux diviseurs deviennent $\mathfrak{Q}'_1$ et $\mathfrak{Q}'_2$, ces deux derniers diviseurs sont équivalents dans le cas et dans le cas seulement où $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ le sont.

IX. Le problème dont s'occupe maintenant l'auteur est l'extension du symbole $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ ou, ce qui revient au même, la définition des symboles $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{b}_k)$, $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$. Une convention toute naturelle est de donner la valeur zéro au premier de ces symboles.

X. Avant d'arriver à la définition du symbole $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$, l'auteur revient sur la définition des diviseurs $\mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{b}_i$. Supposons que pour les diviseurs $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\rho$, ξ et η prennent les valeurs fixes ξ_0 et η_0 : le diviseur $\mathfrak{a}_1$, par exemple, est défini par un développement de $v = \eta_i - \eta_0$ suivant les puissances de $u = \xi - \xi_0$, les exposants étant des multiples de $\frac{1}{\alpha}$. Les α développements conjugués $v'_1, v'_2, \ldots, v'_\alpha$ donnent le même diviseur $\mathfrak{a}_1$.

L'auteur considère le polynome entier

$$A_1(u, v; t) = (v - v'_1)(v - v'_2)\ldots(v - v'_\alpha)$$

et l'appelle la *fonction radicale* de $\mathfrak{a}_1$.

XI. Pour $\mathfrak{a}_1 = 0$, toutes les fonctions rationnelles de ξ, η sont des fonctions rationnelles d'une certaine puissance t^k de t, et t^k est une fonction du premier degré du corps algébrique correspondant.

XII. L'auteur introduit les entiers l_i, m_i qui joueront un rôle important dans la suite ; ils peuvent être définis par les formules

$$l_i = (\mathfrak{U}_i, \mathfrak{L}), \qquad m_i = (\mathfrak{U}_i, \mathfrak{M}).$$

XIII. Soit $\mathfrak{Q}$ un diviseur de première espèce du corps (x, y) et supposons que

par la transformation il devienne $\frac{\mathfrak{Q}^*}{\mathfrak{q}'}$, où $\mathfrak{Q}^*$ est un diviseur de première espèce et $\mathfrak{q}'$ un diviseur de deuxième espèce du corps (ξ, η) :

$$\mathfrak{q}' = \mathfrak{a}_1^{\gamma_1}\, \mathfrak{a}_2^{\gamma_2} \ldots \mathfrak{a}_m^{\gamma_m};$$

il s'agit de déterminer les coefficients $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$. Ces coefficients sont les mêmes pour deux diviseurs équivalents ; si $\mathfrak{Q}$ est d'ordre (a, b), ce sont les mêmes que pour $\mathfrak{L}^a \mathfrak{M}^b$. Tout revient donc à déterminer ces coefficients pour $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$. Au lieu de $\mathfrak{L}$, on peut prendre le numérateur $\mathfrak{L}_1$ de $x - k$ et supposer $s\mathfrak{L}_1 = 1$; soit alors

$$\mathfrak{L}_1 = \frac{\mathfrak{L}'_1}{\mathfrak{a}_1^{\sigma_1}\, \mathfrak{a}_2^{\sigma_2} \ldots \mathfrak{a}_m^{\sigma_m}}.$$

L'auteur introduit des symboles $[i, k]$ qui sont nuls si les diviseurs $\mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{a}_k$ correspondent à des points (ξ_0, η_0) différents et dont la valeur est égale au nombre de points d'intersection confondus en (ξ_0, η_0) des courbes $A_i(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, t_1) = 0$ et $A_k(\xi - \xi_0, \eta_0, t_2)$, si les diviseurs $\mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{a}_k$ correspondent au même point (ξ_0, η_0). On a alors

$$\sigma_k = l_1[k, 1] + l_2[k, 2] + \ldots + l_m[k, m] \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Le déterminant des $[i, k]$ est différent de zéro.

XIV. En se rappelant la définition des l_i, on voit que, pour un diviseur quelconque $\mathfrak{Q}$ de première espèce, on a

$$\gamma_i = (\mathfrak{U}_1, \mathfrak{Q})[1, i] + (\mathfrak{U}_2, \mathfrak{Q})[2, i] + \ldots + (\mathfrak{U}_m, \mathfrak{Q})[m, i] \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

XV. Soit $((i, k))$ la matrice réciproque de $([i, k])$; on a

$$(\mathfrak{U}_i, \mathfrak{L}) = (1, i)\sigma_1 + (2, i)\sigma_2 + \ldots + (m, i)\sigma_m.$$

Si l'on veut que le symbole $(\mathfrak{U}_i, \mathfrak{L})$ conserve sa valeur par la transformation, il faut écrire

$$(\mathfrak{U}_i, \mathfrak{L}) = \left(\frac{\mathfrak{U}_i}{s\mathfrak{U}_i}, \mathfrak{L}\right) = (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{L}^* \mathfrak{a}_1^{\sigma_1} \mathfrak{a}_2^{\sigma_2} \ldots \mathfrak{a}_m^{\sigma_m}) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k);$$

on est ainsi conduit à poser

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = (\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_i) = -(i, k).$$

On définit de même les $[i, k]'$, $(i, k)'$ et les $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$.

XVI. Les symboles $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ tels qu'ils viennent d'être définis peuvent être fractionnaires et aussi négatifs. Il faut maintenant démontrer le théorème fondamental suivant :

Si $\mathfrak{Q}_1$ *et* $\mathfrak{Q}_2$ *sont deux diviseurs quelconques du corps* (x, y) *qui sont transformés en* $\mathfrak{Q}_1^*$ *et* $\mathfrak{Q}_2^*$, *on a*

$$(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = (\mathfrak{Q}_1^*, \mathfrak{Q}_2^*).$$

L'auteur s'occupe d'abord du cas où les deux diviseurs considérés sont de

première espèce ; on peut les remplacer par des diviseurs équivalents, de sorte que dans ce cas tout revient à démontrer le théorème par les trois symboles $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{M})$, $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$; au lieu de $\mathfrak{c}$, on peut prendre le numérateur $\mathfrak{c}_1$ de $x - k$, où k est choisi de manière que $s\,\mathfrak{c}_1 = 1$.

La première formule à démontrer est

$$(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_1) = (\mathfrak{c}'_1 \mathfrak{a}_1^{\sigma_1} \mathfrak{a}_2^{\sigma_2} \ldots \mathfrak{a}_m^{\sigma_m}, \mathfrak{c}'_1 \mathfrak{a}_1^{\sigma_1} \mathfrak{a}_2^{\sigma_2} \ldots \mathfrak{a}_n^{\sigma_n})$$
$$- (\mathfrak{c}'_1, \mathfrak{c}'_1) + \sum_{\alpha, \beta}^{1, \ldots, m} \sigma_\alpha \sigma_\beta (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\beta).$$

L'auteur la démontre en se servant de l'équivalence des deux diviseurs

$$\mathfrak{c}_1 \mathfrak{U}_1^{\sigma_1} \ldots \mathfrak{U}_m^{\sigma_m} \quad \text{et} \quad A_1^{\alpha_1} M_1^{\beta_1}$$

où A_1 et M_1 sont les diviseurs premiers de première espèce du corps (x, y) qui correspondent aux numérateurs A'_1 et M'_1 de $\xi - \varkappa$, $\eta - \lambda$ ($\varkappa$ et λ étant des constantes) et où (α_1, β_1) désignent l'ordre de x considéré comme fonction rationnelle de (ξ, η) ; cette équivalence tient d'autre part à ce que le quotient de ces deux diviseurs est égal à la fonction rationnelle

$$R = \frac{F(\xi, \eta_1) - k F_1(\xi, \eta_1)}{(\xi - \varkappa)^{\alpha_1} (\eta_1 - \lambda)^{\beta_1}}.$$

Le théorème relatif à $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{M}_1)$ se démontre d'une manière analogue.

XVII. Le cas où $\mathfrak{O}_1$ est un diviseur de première espèce et $\mathfrak{O}_2$ un diviseur de seconde espèce se ramène au cas $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{b}_i)$; en posant

$$s\,\mathfrak{g}_i = \mathfrak{a}_1^{\beta_{i1}} \mathfrak{a}_2^{\beta_{i2}} \ldots \mathfrak{a}_m^{\beta_{im}},$$

la formule à démontrer est

$$\mathfrak{O} = (\mathfrak{c}_1, \mathfrak{b}_i) = \left(\mathfrak{c}'_1 \mathfrak{a}_1^{\sigma_1} \ldots \mathfrak{a}_m^{\sigma_m}, \frac{\mathfrak{g}_i}{s\,\mathfrak{g}_i}\right) = (\mathfrak{c}'_1, \mathfrak{g}_i) + \sum_{\lambda, \mu}^{1, \ldots, m} \sigma_\lambda \beta_{i\mu} (\mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{a}_\mu).$$

Soit $(b'_i\, b''_i)$ l'ordre de $\mathfrak{g}_i$; l'auteur arrive à la démonstration en se servant de l'équivalence des deux diviseurs :

$$\mathfrak{U}_1^{\beta_{i1}} \ldots \mathfrak{U}_2^{\beta_{im}} \quad \text{et} \quad A_1^{b'_i} M_2^{b''_i}.$$

XVIII. Il reste enfin à considérer le cas où dans le symbole $(\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2)$ les diviseurs sont tous les deux de deuxième espèce ; ce cas se ramène à celui de $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k)$. La formule à démontrer est

$$(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_k) = \left(\frac{\mathfrak{g}_i}{s\,\mathfrak{g}_i}, \frac{\mathfrak{g}_k}{s\,\mathfrak{g}_k}\right) = (\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_k) + \sum_{\lambda, \mu}^{1, \ldots, m} \beta_{i\lambda} \beta_{k\mu} (\mathfrak{a}_\lambda, \mathfrak{a}_\mu).$$

On démontre d'abord les relations

$$(s\,\mathfrak{g}_i, \mathfrak{b}_k) = (\mathfrak{g}_i, s\,\mathfrak{g}_k)$$

qui permettent de ramener la formule à démontrer aux formules

$$\sum_{\lambda} \alpha_{i\lambda} [i, \lambda] = \sum_{\lambda} \beta_{\lambda i} [k, \lambda]'.$$

Le théorème fondamental est ainsi complètement démontré.

XIX. Le théorème précédent permet d'obtenir un grand nombre de formules, importantes généralisations de celles données par Clebsch dans son Mémoire sur la transformation de Crémona (*Math. Ann.*, t. IV). Citons en particulier les formules

$$\sum_{\lambda} \alpha_{i\lambda} \beta_{\lambda k} = a'_i \sigma_k + a''_i \tau_k + \varepsilon_{ik}, \qquad \sum_{\lambda} \alpha_{k\lambda} \beta_{\lambda i} = b'_k \sigma'_i + b''_k \tau'_i + \varepsilon'_{ik},$$

où (a'_i, a''_i) est l'ordre de $\mathfrak{A}_i$, (b'_k, b''_k) l'ordre de $\mathfrak{B}_k$, et où les σ_k, τ_k, σ'_i, τ'_i sont les exposants de a_k et b_i dans $s\mathfrak{C}_1$, $s\mathfrak{A}_1$, sA_1, sM_1. De ces formules, on déduit immédiatement l'égalité du nombre des diviseurs premiers singuliers des deux corps (x, y) et (ξ, η).

L'auteur prouve encore que le produit des déterminants des α_{ik} et des β_{ik} est égal à $(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2$ où (a_1, b_1) est l'ordre de ξ, (a_2, b_2) l'ordre de η considérés comme fonctions rationnelles du corps (x, y).

XX. Clebsch énonce le théorème que deux courbes fondamentales ne se coupent qu'en des points fondamentaux : ce théorème n'est pas vrai en général ; ce qui est vrai c'est que sur chaque courbe fondamentale se trouve au moins un point fondamental et que par chaque point fondamental passe au moins une courbe fondamentale. Il serait juste d'ajouter que ces expressions n'ont pas tout à fait le même sens pour Clebsch et pour l'auteur, Clebsch se plaçant au point de vue de la géométrie projective qui n'est pas celui de M. Jung.

L'auteur rectifie d'autres propositions de Clebsch : l'une de celles-ci reste rigoureusement exacte ; les courbes fondamentales sont de genre zéro.

XXI. Le determinant fondamental $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \frac{\mathfrak{G} A^{\prime 2} M^{\prime 2}}{\mathfrak{C}^{\prime 2} \mathfrak{A}^{\prime 2}},$$

où $\mathfrak{G}$ est de la forme $\mathfrak{G}_1^{\beta_1} \mathfrak{G}_2^{\beta_2} \ldots \mathfrak{G}_m^{\beta_m}$, les exposants $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ étant positifs. En posant

$$\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{G}}{s\mathfrak{G}} = \mathfrak{b}_1^{\beta_1} \mathfrak{b}_2^{\beta_2} \ldots \mathfrak{b}_m^{\beta_m}; \qquad \mathfrak{a} = \frac{s\mathfrak{C}'^2 s\mathfrak{A}'^2}{s\mathfrak{G}} = \mathfrak{a}_1^{\alpha_1} \mathfrak{a}_2^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{a}_m^{\alpha_m},$$

on a

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \frac{A^{\prime 2} M^{\prime 2}}{\mathfrak{C}^{\prime 2} \mathfrak{A}^{\prime 2}}.$$

On a

$$\alpha_i = \alpha'_i + \alpha''_i - 1, \qquad \beta_i = \beta'_i + \beta''_i - 1,$$

en designant par (α'_i, α''_i) l'ordre de la fonction radicale A_i de a_i et par (β'_i, β''_i) l'ordre de la fonction radicale B_i de b_i.

Les deux classes différentielles

$$\mathfrak{M} \quad (\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}), \qquad \mathfrak{M}' \quad (\mathfrak{N}^{-2}\mathfrak{M}^{-2})$$

sont telles que le diviseur $\mathfrak{M}\mathfrak{b}$ est équivalent au diviseur $\mathfrak{M}\mathfrak{a}$: on a de plus

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}).$$

XXII. L'auteur traite un exemple numérique, celui qui est relatif à la transformation

$$x = \frac{\eta - \xi^2}{\xi^2}, \qquad y = \frac{(\eta - \xi^2)(\eta - \xi)}{\xi^3},$$

$$\xi = \frac{x + y}{x(x+1)}, \qquad \eta = \frac{(x+y)^2}{x^2(x+1)}.$$

E. Cartan.

MÉMORIE DELL'ACADEMIA DELLE SCIENZE DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA.

in-4°. 5e série (1), Tome IX, 1901, 1902.

Righi (*A.*). — [T 7 *c*]. Sur les champs électromagnétiques, et particulièrement sur ceux qui sont produits par des charges électriques ou des pôles magnétiques en mouvement (151-176).

Benetti (*J.*). — [S 4 *b a*]. Calcul des cheminées pour les générateurs de vapeur (435-455, 2 planches).

Donati (*L.*). — [T 7 *c*]. Sur les vecteurs électromagnétiques (477-489).

Pincherle (*S.*). — [C 1 *b*]. Sur les dérivées d'indice quelconque (755-758).

L'auteur cherche une opération A_s, définie dans un champ fonctionnel donné, et satisfaisant aux conditions

$$A_s(\varphi + \psi) = A_s(\varphi) + A_s(\psi),$$
$$DA_{s-1} = A_s,$$
$$A_s(x\varphi) = x A_s(\varphi) + s A_{s-1}(\varphi),$$

et qui pour s entier se réduise à la dérivation ordinaire D. Il trouve comme solution la plus générale, en indiquant cette opération par D^s, et s étant quelconque,

$$x^s D^s \varphi = \frac{s}{\Gamma(1-s)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(s-n)\,n!} D^n \varphi.$$

---

(1) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXX$_2$, p. 180.

Tome X, 1903, 1904.

Arzela (C). — [C 2 *g*]. Sur le second théorème de la moyenne pour les intégrales doubles (99-109).

Soit, dans un rectangle ABCD ayant les côtés parallèles aux axes, une fonction $\varphi(x, y)$ finie et ne décroissant pas (ou ne croissant pas) dans le sens positif des axes; soit $f(x, y)$ une fonction intégrale dans le champ considéré; il existe toujours une courbe continue, divisant le rectangle en deux parties T et R — T de manière à avoir

$$\int\int_{R} f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy = \varphi_A \int\int_{T} f(x, y)\,dx\,dy + \varphi_C \int\int_{R-T} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Benetti (*J.*). — [S 3 *c*]. Théorie fondamentale des turbines hydrauliques (149-190, 2 planches).

Benetti (*J.*). — [S 3 *c*]. Sur des nouvelles équations pour la théorie générale des turbines hydrauliques (479-502).

Razzaboni (*A.*). — [O 5 *l a*]. Sur les surfaces dans lesquelles un système de géodésiques est formé par des courbes de Bertrand. (539-548).

La recherche de ces surfaces dépend d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre. En connaissant une de ces surfaces, on peut, par une méthode de transformation, en obtenir une double infinité.

6e série, Tome I, 1904.

Rajna (*M.*). — [U]. Nouveau calcul de l'éphéméride du Soleil et des crépuscules pour l'horizon de Bologne (61-98, 1 planche).

Guarducci (*F.*). — [L² 12 *c*]. Sur la résolution des triangles formés par trois géodésiques de l'ellipsoïde de rotation à petit aplatissement (ellipsoïde terrestre) (99-105).

Benetti (*J.*). — [S 4 *b* 3]. Les principes scientifiques pour les turbines à vapeur (179-235).

Tome II, 1905.

Canevazzi (*S.*). — [T 2 *b*]. Sur la détermination de l'axe neutre ou de rotation dans les sections transversales d'un solide en maçonnerie, symétrique par rapport à un plan axial et soumis à des forces agissant dans le plan de symétrie (81-91, 1 planche).

Rajna (*M.*). — [U]. Table pour calculer le lever et le coucher de la Lune à Bologne, et pour réduire le lever et le coucher du Soleil et de la Lune, de Bologne à un autre lieu quelconque d'Italie (163-175).

Donati (*L.*). — [T 7 *c*]. Diagramme général pour des transformateurs à courants alternatifs, et moteurs asynchrones polyphasés (269-284).

Guarducci (*F.*). — [U 10]. La méridienne de l'église Saint Pétronius de Bologne, revue en 1904 (285-321, 1 planche).

Tome III, 1906.

Canevazzi (*S.*). — [T 2]. Sur l'ellipse des déplacements élastiques terminaux (91-102).

Arzelà (*C.*). — [H 7 *a*]. Existence des intégrales dans les équations aux dérivées partielles (117-141).

L'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{dz}{dy}\right)$$

a toujours une ou plusieurs (infinies) solutions $z = z(x, y)$ finies et continues ainsi que leurs dérivées p, q dans un certain champ, et qui pour $x = x_0$ se réduisent à des fonctions données $\varphi_0(y)$, sous les conditions suivantes :

Que $f(x, y, z, q)$ soit continue par rapport aux quatre variables; que la fonction donnée $\varphi_0(y)$ soit continue ainsi que sa dérivée $\varphi_0'(y)$, et qu'elle ait le rapport incrémental compris entre deux nombres finis.

Ce résultat est obtenu par la considération d'une succession de fonctions discontinues ayant pour limite une fonction continue.

Pincherle (*S.*). — [H 11 *c*]. Sur les équations fonctionnelles linéaires (143-171).

Relativement aux équations intégrales

$$\int \alpha(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x),$$

$$\varphi(x) - k \int \alpha(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x),$$

l'auteur indique les questions suivantes qu'on peut se proposer :

1. Pour quelles classes de fonctions φ les premiers membres ont une signification?

2. Quel ensemble correspond pour $f(x)$ à un ensemble donné pour $\varphi(x)$?

Cela porte naturellement à chercher les propriétés des opérations fonctionnelles représentées par les premiers membres, opérations qui rentrent respectivement dans les types généraux

$$(1) \qquad A(\varphi) = f,$$

$$\varphi - k\, A(\varphi) = f,$$

que l'auteur appelle *équations fonctionnelles linéaires*, et qui sont distributives par rapport à l'élément $\varphi(t)$. On a, de cette manière, une extension (au champ transcendant) des homographies d'un espace linéaire de n dimensions, et la résolution de l'équation (1) peut s'envisager comme une recherche de l'inverse de l'homographie A ; celle de (2) comme une recherche des inverses des homographies du faisceau $1 - k\,A$. Dans l'étude faite à ce point de vue, ont une importance particulière les éléments invariants de l'opération (points unis de l'homographie). Sous certaines conditions pour les nombres a_n, la série

$$S(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n(f)$$

est absolument et uniformément convergente, et la série

$$S_1(f) = \sum_{n=0} k^n A^n(f),$$

qui en est un cas particulier, donne une solution de l'équation

$$\varphi - k\, A(\varphi) = f.$$

Les propriétés que l'auteur trouve ensuite pour les opérations A, sont appliquées par lui d'abord au cas d'un ensemble linéaire à un nombre fini m de dimensions; puis au cas où l'ensemble est formé par les fonctions analytiques d'une variable réelle dans l'intervalle (0...1), limitées et intégrables, et où l'on a

$$A(f) = \int_0^1 \alpha(x, t)\, f(t)\, dt,$$

en retrouvant un résultat obtenu par M. Volterra (*Atti della R. Acc. di Torino*, t. XXXI, 1896); et enfin au cas de Fredhlom, dans lequel

$$A(f) = \int_0^1 f(t)\, \alpha(x, t)\, dt.$$

Righi (*A.*). — [T 7]. Sur la masse électromagnétique de l'électron (189-202).

Ruffini (*F.-P.*). — [L_1 2 *c*]. Sur les coniques conjuguées (217-223).

Coniques dont chacune est polaire réciproque de soi-même par rapport à l'autre.

Étant donnée une conique et deux de ses points, il y a, en général, une autre conique et une seule, conjuguée à la conique donnée et qui la touche aux deux points donnés. Dans un cas particulier il y en a trois.

Rajna (*M.*). — [U]. Examen d'un niveau défectueux, et méthode pour en corriger les indications (249-256).

Donati (*L.*). — [T 7]. Expériences sur la propagation des flux magnétiques alternatifs suivant un faisceau de fils de fer (347-352).

Guarducci (*F.*). — [U]. Sur une méthode à l'usage des voyageurs pour déterminer le temps, la latitude et la direction du méridien (353-358, 1 Table).

Guarducci (*F.*). — [U]. Sur les coefficients pratique de réfraction terrestre (361-372).

Tome IV, 1907.

Rajna (*M.*). — [U]. Sur les démonstrations de la formule de Cagnoli relative à la plus petite durée du crépuscule (63-68).

Canevazzi (*S.*). — [R 9 *a*]. Considérations sur la poussée des terres (87-96, 3 planches).

Guarducci (*F*). — [U]. Sur la détermination directe du zénith (279-285, 1 planche).

Donati (*L.*). — [T 7]. Graduateur de tension pour régler l'intensité lumineuse des lampes dans les distributions à courant alternés (451-453).

Tome V, 1908.

Canevazzi (*S*). — [R 9 *a*]. Considérations sur la théorie de la poussée des terres (21-28, 1 planche).

Rajna (*M.*). — [U]. Sur la démonstration des formules de la précession annuelle en ascension droite ou en déclinaison (221-224).

Razzaboni (*A.*). — [O 3 ref. Q 1]. Sur les courbes à double courbure en géométrie elliptique (225-240).

La courbure de l'espace elliptique est supposée $= 1$, et la courbe définie au moyen des coordonnées de Weierstrass, c'est-à-dire par quatre coordonnées satisfaisant à la relation

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

L'auteur établit les formules relatives à la courbure et à la torsion

$$\frac{1}{C} = \sqrt{\sum \left(\frac{d^2 x}{ds^2} - x_i\right)^2},$$

$$\frac{1}{T} = \pm \sqrt{\sum \left(\frac{d\xi_i}{ds}\right)^2},$$

les ξ étant les cosinus directeurs de la normale au plan osculateur; les formules analogues à celles de Frenet, déjà données par M. Bianchi [*Sulle sup. a curvature nulla in geom. ellittica* (*Annali di Matem.*, 1895)] et celles relatives à la sphère osculatrice, aux développées et aux développantes. Puis il résout le problème de déterminer les courbes ayant les normales principales communes, qui conduit à l'équation

$$\frac{\cos\sigma}{T} - \frac{\sin\sigma}{C} + \sin\sigma \cot K = 0,$$

ayant la même forme que dans l'espace ordinaire. Inversement, étant donnée une courbe satisfaisant à la relation

$$\frac{A}{T} + \frac{B}{C} + C = 0,$$

la courbe

$$x'_i = -\frac{C}{\sqrt{B^2 - C^2}} x_i + \frac{B}{\sqrt{B^2 - C^2}} \eta_i,$$

où

$$\eta_i = C\left(\frac{d^2 x_i}{ds^2} + x_i\right)$$

a la normale principale commune à la première.

Guarducci (*F.*). — [U]. Déterminations astronomiques rapides de latitude, faites à Bologne en 1908 (297-302).

Donati (*L.*). — [T 7]. Sur les vecteurs électromagnétiques (311-331).

Tome VI, 1909.

Guarducci (*F.*). — [U]. Déterminations astronomiques rapides de latitude, faites au Mont Cabria et au Mont Conero (47-50).

Canevazzi (*S.*). — [R 9 *a*]. Considérations sur la poussée des terres. Appendice II : contre-poussée (81-88, 1 planche).

Benetti (*J.*). — [S 3 *c*]. Considérations synthétiques sur le fonctionnement et sur l'effet utile des pompes centrifuges, et comparaisons avec les turbines motrices (157-182, 1 planche).

Donati (*L.*). — [T 7]. Sur la coordination des faits et des relations fondamentales de l'électromagnétisme (391-413).

ATTI DELLE R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO [1].

Tome XLIV, 1908-1909.

Bertini (*E*). — [Q 2 ref. M_1 2 *c*]. Sur les séries déterminées sur une courbe de l'hyperespace par ses surfaces adjointes et par toutes les hypersurfaces de l'hyperespace. (4-11).

Note faisant suite à celle du Tome précédent, p. 847. La série déterminée sur une courbe irréductible quelconque C par ses surfaces Φ_l adjointes est une série complète *non spéciale* lorsque

$$l \geq \Sigma n_i - r,$$

où l'on a supposé que C avec une autre courbe C′ constitue l'intersection de $r-1$ hypersurfaces des ordres $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$ respectivement.

---

[1] Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXXIV$_2$, p. 98.

Autres résultats et application des formules trouvées au cas où C est l'intersection complète de $r-1$ hypersurfaces. Dans ce cas :

1° Les ω points de l'adjonction de C ayant des points multiples quelconques des ordres $n_1, n_2, \ldots, n_r$ imposent aux Φ_l de S_r, quel que soit l'ordre $l \leqq \Sigma n_i - r - 1$, un même nombre $\omega' (\geqq \omega)$ de conditions;

2° Toutes les Φ_l d'un ordre donné $l \geqq \Sigma n_i - r$ déterminent sur C une série non spéciale, de déficience constante d' et de déficience $d'-1$ si $l = \Sigma n_i - r - 1$.

Bottasso (*M.*). — [$M_2$8]. Les caractères d'un plan multiple cyclique dont la courbe de diramation est irréductible et générale de son ordre. (12-37).

Un réseau de degré n d'une surface algébrique est mis en correspondance projective avec les droites d'un plan Π. A un point du plan (plan n-uple) correspond ainsi un groupe G_n de n points de la surface. La courbe D *de diramation* de Π est le lieu des points dont deux (au moins) des points correspondants coïncident, et la correspondance $(1, n)$ entre Π et la surface se réduit à une correspondance biunivoque entre cette dernière et la surface formée par n feuillets superposés, dont D est la courbe de passage de l'un à l'autre. Le plan multiple est appelé *cyclique* lorsque le groupe des n points de la surface, correspondant à un point variable du plan, engendre une transformation birationnelle cyclique, changeant la surface en elle-même.

L'auteur trouve d'abord que l'ordre m de la courbe de diramation est divisible par l'indice n du plan multiple. Puis il trouve, par voie géométrique, les caractères fondamentaux du plan multiple; par exemple, l'ordre des courbes canoniques est

$$N = n(nh - h - 3),$$

étant $m = nh$; le genre linéaire du plan cyclique (ou des courbes canoniques) est

$$p^{(1)} = n[(n-1)h - 3]^3 + 1,$$

le genre arithmétique est

$$P_a = \frac{1}{12} n(n-1)h(2nh - h - 9) + n - 1.$$

L'équation dont dépend la détermination des n points du groupe G_n doit être cyclique. Elle peut, par conséquent, se réduire rationnellement à la forme binomielle, ce qui donne pour la surface F le modèle projectif dans S_3

$$z^n = f(x, y),$$

$f(x, y) = 0$, représentant la courbe D de diramation.

Puis, dans le but de traiter analytiquement les courbes canoniques et les caractères du plan cyclique, l'auteur commence par décomposer (§ 3) les singularités des courbes $z^n = f(n)$, et trouve l'équation d'une courbe ayant des multiplicités données aux points singuliers de la courbe donnée; et ensuite l'équation des surfaces adjointes à la surface F.

Voir aussi la Note du même auteur à la page 225.

Balbi (*V.*). — [U]. Positions apparentes d'étoiles du catalogue de Newcomb pour 1909. (38-61).

Lignana (*G.*). — [T7*c*]. Sur certaines particularités présentées par les ondes de forme complexe dans les circuits triphasés. (108-119).

Chicca (*A.*). — [H11*c*]. Sur les équations intégrales de Fredholm à noyau symétrique. (151-159).

Solution de l'équation intégrale

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

par la série, absolument et uniformément convergente,

$$\varphi(s) = f^{(0)}(s) + \lambda f^{(1)}(s) + \lambda^2 f^{(2)}(s) + \ldots,$$

où

$$f^{(0)}(s) = f(s),$$

$$f^{(i)}(s) = \int_a^b K(s, t)\, f^{(i-1)}(t)\, dt.$$

La fonction φ est méromorphe dans tout le plan.

Valeurs exceptionnelles du paramètre λ.

Cas où la fonction $f(s)$ est de la forme

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\, \psi(t)\, dt.$$

Garbasso (*A.*) et *Fubini* (*G.*). — [T3*b*]. Sur le problème le plus général de l'optique. (159-170).

Propagation de la lumière dans un milieu non isotrope et non homogène.

Un tel milieu est obtenu par de la gélatine comprimée entre deux plaques et dans laquelle on a effectué une diffusion de chlorure de zinc. La compression lui donne les propriétés des cristaux (anisotropie) et la diffusion celle des milieux non homogènes. Les déplacements u, v, w, que l'on a dans les systèmes d'ondes satisfont aux équations, valables aussi pour les corps homogènes,

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x};$$

$$X = a^2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

$$Y = a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$$Z = a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Le principe de Fermat conserve sa validité dans ces milieux, c'est-à-dire que les rayons suivent le chemin qui peut être parcouru dans le moindre temps, et sont les géodésiques dans la métrique définie par l'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{a^2(dx^2 + dy^2) + c^2\,dz^2}{a^2\,c^2}.$$

Garbasso (*A.*). — [R1]. — Sur la composition des vibrations harmoniques. (223-232, une planche).

Bottasso (*M.*). — [$M_2$8]. Sur certaines singularités élémentaires d'un plan multiple cyclique dont la courbe de diramation est irréductible. (225-281).

Note faisant suite à celle du même auteur, insérée dans ce Tome à la page 12. Ici l'auteur donne les modifications apportées par l'hypothèse que, sur la courbe D de diramation, il y ait un point A qui soit s-uple, ordinaire ou associé à un autre point multiple infiniment rapproché. Diminution du genre linéaire $\mu^{(1)}$ du plan multiple cyclique Π_n. Diminution du genre géométrique P_g. Cas du plan cyclique triple, et modifications apportées dans ses caractères par l'existence sur D d'un point multiple A, auquel suivent d'autres points multiples en des directions distinctes.

Jadanza (*N.*). — [U10]. Un précurseur de Heyde dans la construction des théodolites à cercles dentés. (339-343).

Albenga (*G.*). — [T2]. Contribution à la théorie des solides à grande courbure. (344-349).

Colonnetti (*G.*). — [T2*b*]. Contribution à la tractation graphique de la poutre continue. (350-361).

Palatini (*F.*). — [Q2]. Sur les variétés algébriques pour lesquelles une ou plusieurs des variétés formées par des espaces sécants sont de dimension plus petite que d'ordinaire, sans qu'elles remplissent l'espace ambiant. (362-375).

Pannelli (M.). — [$M_2$8ref.Q2]. Sur le genre arithmétique d'une variété, intersection complète de formes. (443-468).

Soit F_s une variété de $s = r - h$ dimensions dans S_r, intersection complète de h formes des ordres $n_1, n_2, \ldots, n_h$. Soit $|V|$ le système des variétés V de $s-1$ dimensions, intersections de F_s avec toutes les formes d'ordre l de S_r; $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_{s-1}$ les caractères de ce système, c'est-à-dire : Π_0 le degré et Π_i ($i = 1, 2, \ldots, s-1$) le genre arithmétique de l'intersection de $s-i$ variétés V.

Alors la postulation $\chi(l, h, r)$ de la variété F_s pour une forme d'ordre l quelconque, est donnée par

$$\chi(l, h, r) + \delta = \Pi_0 - \Pi_1 + \Pi_2 - \ldots + (-1)^{s-1}\Pi_{s-1} + (-1)^s P_s + s,$$

où P_s est le genre arithmétique de F_s et δ la somme de tous ceux des symboles

$$\binom{l - n_i + r}{r}, \quad \binom{l - n_i - n_j + r}{r}, \quad \ldots, \quad \binom{l - n_1 - n_2 - \ldots - n_h + r}{r}$$

dans lesquels la quantité supérieure est négative.

Étant $|V'|$ le système adjoint à $|V|$, les caractères $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{s-1}$ du système $|V'-V|$ de la variété F_s, satisfont pour s pair à la relation

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_3 - \ldots - \Omega_{s-1} + s - 1 = 0,$$

et pour s impair à l'autre

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \ldots + \Omega_{s-1} + s - 1 = 2(P_s - 1).$$

Sannia (*G.*). — [O7*a*]. Nouvelles formules utiles pour l'étude des congruences rectilignes. (567-579).

Étant X, Y, Z les cosinus directeurs d'un rayon de la congruence et x, y, z les coordonnées du *point moyen*, le rayon est aussi déterminé par

$$X, \quad Y, \quad Z; \qquad l, \quad m, \quad n,$$

étant

$$l = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix};$$

réciproquement, étant données les deux formes

$$(1) \qquad \begin{cases} ds'^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ -\mu = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D'\,dv^2, \end{cases}$$

qui déterminent la congruence, on peut calculer X, Y, Z en fonction de u, v, au moyen d'une équation de Riccati, et l, m, n, au moyen d'un système aux dérivées partielles du deuxième ordre illimitativement intégrable. Ce système est employé par l'auteur dans la recherche de la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence déterminée par les deux formes (1) soit une congruence W.

Albenga (*G.*). [T2]. Sur le calcul analytique des arcs élastiques. (584-593).

Fano (*G.*). — [Q2]. Sur les variétés algébriques qui sont des intersections complètes de plusieurs formes. (633-648).

Dans un espace S_r, une variété algébrique de dimension $k \geq 2$, intersection

complète de $r-k$ formes (et, pour $k=2$, non rationnelle) ne renferme, en général, d'autres variétés M_{k-1} que celles qui sont des intersections complètes de la variété donnée avec une autre forme.

Gatti (*E.*). — [T3*a*]. Recherche sur un système télescopique particulier. (648-658).

Sibirani (*F.*). — [D2*e*]. Sur la représentation approchée des fonctions de plusieurs variables réelles et de leurs dérivées, par des polynomes trigonométriques. (659-683).

Pagliero (*G.*). — [O5*l*]. La géodésique sur une surface de révolution. (707-710).

Démonstration du théorème de Clairaut sans le secours du calcul des variations.

Abate-Daga (*G.*). — [U10]. Sur la compensation d'un point trigonométrique au moyen de la figure d'erreur. (725-743).

Chelli (*F.*). — [U]. Réduction trigonométrique des positions moyennes des étoiles fixes de 1850, $0+t$ à 1850, $0+t'$, en prenant comme écliptique fixe l'écliptique moyenne de 1850,0. (857-880).

Peyroleri (*M.*). — [H12]. Relations entre le calcul des différences et le calcul différentiel. (881-904).

Analogues au théorème de Rolle, à celui de la valeur moyenne, et autres. Applications à des sommes.

Giudice (*F.*). — [R1*e*]. — Sur l'inscriptibilité dans un cercle des polygones articulés. (905-910).

Panetti (*M.*). — [T2]. Sur le module d'élasticité de traction des câbles métalliques. (911-929).

Sforza (*G.*). — [Q1,2]. Corps ronds et barycentre dans la métrique projective. (957-981).

Se rattache aux : *Ricerche di estensionimetria negli Spazi metrico-projettivi* (*R. Acc. di Modena*, 1906-1907) du même auteur.

Cisotti (*U.*). — [L214]. Sur certaines propriétés intégrales des quadriques. (982-985).

La proposition évidente que, $e^{\alpha} e^{\beta}$ étant constant, $\alpha+\beta$ est aussi constant, peut se traduire ainsi :

Étant

$$xy = \text{const.},$$

on a

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = \text{const.}$$

De ce théorème relatif à l'hyperbole, l'auteur donne une extension aux quadriques.

Tome XLV, 1909-1910.

Burali-Forti (*C.*). — [O7*a*]. Sur la géométrie différentielle absolue des congruences et des complexes rectilignes. (4-22).

Étude faite par la méthode vectorielle.

Dell'Agnola (*C. A.*). — [J5*a*]. Sur le théorème de Borel (22-24).

Si tout point de l'intervalle (a, b) est intérieur au moins à un des intervalles d'un groupe E, il y a dans ce groupe un nombre fini d'intervalles par rapport auxquels l'intervalle $(a, b,)$ a la même propriété. Démonstration.

Sannia (*G.*). — [O7*a*]. Sur l'enveloppe moyenne d'une congruence de droites. (56-78).

Étant X, Y, Z les cosinus directeurs, fonctions de u, v, ds' l'angle de deux droites $g(u, v)$, $g'(u+du, v+dv)$ et μ leur moment, les deux formes quadratiques différentielles

$$ds'^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$\mu = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

dont la première a la courbure $+1$ (et le cas $EG - F^2 = 0$ est exclu), suffisent pour déterminer une congruence. Les coefficients de ces deux formes ne sont pas indépendants, mais ils satisfont à la relation

$$\frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{221}}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{112}}{\Delta}\right)\right\} = H,$$

étant

$$b_{112} = \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \left\{ {2 \atop 1} \right\} D + \left(\left\{ {1 \atop 1} \right\} - \left\{ {2 \atop 2} \right\} \right) D' + \left\{ {1 \atop 2} \right\} D'',$$

$$b_{221} = \frac{\partial D'}{\partial u} - \frac{\partial D''}{\partial v} + \left\{ {2 \atop 1} \right\} D + \left(\left\{ {2 \atop 2} \right\} - \left\{ {1 \atop 1} \right\} \right) D' - \left\{ {1 \atop 2} \right\} D'',$$

où les symboles sont formés avec les coefficients de la première forme, et H étant le *paramètre moyen* (somme du maximum et du minimum du paramètre distributeur des surfaces réglées passant par g). Ce paramètre moyen

s'exprime par

$$H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}.$$

Le produit du maximum et du minimum mentionnés est appelé *paramètre absolu*, et son expression est

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}.$$

Le *plan moyen* de g est le plan normal à g au point moyen. L'enveloppe des plans moyens est l'*enveloppe moyenne* (Ribaucour). Les congruences, dont l'enveloppe moyenne est une surface minima, sont définies par les formes

$$ds'^2 = \frac{4\,du\,du_0}{(uu_0 - 1)^2},$$

$$-\mu = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{2u_0}{uu_0 + 1}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - 2i\alpha\right)du^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial u_0}du\,du_0$$
$$+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_0^2} + \frac{2u}{uu_0 + 1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_0} + 2i\beta\right)du_0^2,$$

u, u_0 étant les paramètres des lignes de longueur nulle sur la sphère, et $\varphi(u, u_0)$, $\alpha(u)$, $\beta(u_0)$ des fonctions arbitraires. Conditions pour que ces congruences soient réelles. Cas des congruences isotropes. Les congruences à plans moyens concourants sont déterminées par la forme

$$-\mu = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{2u_0}{uu_0 + 1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial u_0}du\,du_0 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_0^2} + \frac{2u}{uu_0 + 1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}\right)du_0^2.$$

Congruences à paramètre moyen constant.

Scorza (*E.*). — [Q2]. Sur les variétés de Segre. (119-131).

Étant $S_{p_1}, \ldots, S_{p_n}$ des espaces linéaires et $x_0^i, \ldots, x_{p_i}^i$ les coordonnées d'un point de S_{p_i}, si l'on pose

$$X_{i_1, \ldots, i_n} = x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_n}^{(n)},$$

les X peuvent se regarder comme les coordonnées d'un point d'un espace $S_{(p_1+1)\ldots(p_n+1)-1}$, et l'on a une variété V de dimension $p_1 + \ldots + p_n$ (*variété de Segre*) d'espèce n avec les indices $p_1, \ldots, p_n$ qui est de l'ordre

$$\frac{(p_1 + \ldots + p_n)!}{p_1! \ldots p_n!}.$$

Cela posé, on a le théorème :

Si une variété $V_{p_1+\ldots+p_n+1}$ *de l'espace* $S_{(p_1+1)\ldots(p_n+1)}$ *est rencontrée par tout hyperplan en une variété de Segre, d'espèce n et avec les indices* $p_1, \ldots, p_n$, *elle est*

a. Un cône qui projette une variété de Segre, ou bien

b. On a $n = 2$ *et* $p_1 = p_2 = 1$, *et elle est une quadrique de l'espace* S_3.

Colonnetti (*G.*). — [T2]. Sur la tractation graphique de la poutre continue. (183-191, une planche).

Cicconetti (*G.*). — [U]. Latitude astronomique de l'Observatoire géodésique de l'Université Royale de Naples, déterminée en 1909. (231-240, une table).

Boggio (*T*). — [S2*a*]. Démonstration absolue des équations classiques de l'hydrodynamique. (241-253).

Par la méthode des homographies vectorielles.

Panetti (*M.*). — [T2]. Théorie et calcul des ressorts discoïdaux. (254-266).

Burali-Forti (*C*). — [B12*c*]. Gradient, rotation et divergence dans une surface. (388-400).

Modifications qui se présentent dans le calcul des homographies vectorielles, lorsque le point dont les vecteurs sont des fonctions varie sur une surface au lieu de varier dans un champ de trois dimensions.

Santangelo (*G. B.*). — [M, 8*g*]. Sur une extension du théorème de Habich. (400-406).

Gramegna (*M*[a]). — [H4]. Séries d'équations différentielles linéaires et équations intégro-différentielles. (469-491).

Extension de la méthode des intégrations successives au cas d'un nombre infini d'équations différentielles et de fonctions inconnues. Exposition par les notations du *Formulario Matematico* de M. Peano.

Jadanza (*N.*). — [U10]. Détermination des constantes dans une lunette distantiométrique. (503-508).

Gambèra (*P.*). — [T4]. Quelques conséquences déduites de l'hypothèse moderne sur la nature de la chaleur et de la température. (563-568).

Somigliana (*C.*). — [V9]. G. Morera. Commémoration (573-583). Avec la liste des travaux de G. Morera.

Guareschi (*I.*). — [S4*b*]. — Daniel Bernouilli et Amédée Avogadro et la théorie cinétique des gaz. (641-662).

Aimonetti (*G.*) — [U 10] Sur une nouvelle manière de construire les niveaux à lunette. (718-727).

S. Rindi.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

Tome CXXXIX; année 1911.

Schottky (*F.*). — Quatre lettres de Cayley. (1-6).

Schottky (*F.*). — Sur une formule de Cayley et son application au problème du dernier point d'intersection de deux courbes du troisième ordre. (7-12).

L'envoi à Cayley du livre de M. Schottky sur la théorie des fonctions abéliennes de trois variables fut l'occasion de quatre lettres écrites à l'auteur, en 1880 et 1881, par le géomètre anglais. Dans ces lettres, Cayley indique deux formes différentes de différentielles de première espèce attachées à une certaine équation homogène $L = 0$ entre trois variables x, y, z. $L = 0$ est la condition pour qu'il existe une cubique passant par sept points donnés et admettant en (x, y, z) un point double. L est encore le déterminant fonctionnel de trois fonctions X, Y, Z du troisième degré s'annulant aux sept points donnés. Cette équation $L = 0$, à laquelle conduit la théorie des relations thèta de genre 3, s'appelle l'équation d'Aronhold.

Les deux formes des différentielles de première espèce attachées à la courbe $L = 0$ sont :

$$\frac{H(x\,dy - y\,dx)}{\frac{\partial L}{\partial z}} \quad \text{et} \quad \frac{H(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)}{\sqrt{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6 H_7}},$$

où H est une fonction linéaire quelconque de X, Y, Z supposées vérifier l'identité

$$Xx + Yy + Zz = 0,$$

ce qui est toujours possible. $H_1, H_2, \ldots, H_7$ sont aussi des fonctions linéaires de X, Y, Z définies par la condition que la courbe $H_\alpha = 0$ admette le $\alpha^{\text{ième}}$ point donné comme point double.

Cayley pose

$$X = qz - ry, \qquad Y = rx - pz, \qquad Z = py - qx,$$

où p, q, r sont des formes du second degré, et il en déduit l'existence d'une identité de la forme

$$-\varphi = p\frac{\partial L}{\partial x} + q\frac{\partial L}{\partial y} + r\frac{\partial L}{\partial z} = K\sqrt[3]{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6 H_7},$$

où K est une constante.

M. Schottky montre comment cette fonction φ s'introduit dans le calcul des coordonnées du neuvième point d'intersection x', y', z' de deux cubiques passant par les sept points donnés et le point variable (x, y, z). Ces coordonnées sont des fonctions entières du huitième degré de x, y, z données par la formule

$$x' = \varphi x + 2Lp,$$
$$y' = \varphi y + 2Lq,$$
$$z' = \varphi z + 2Lr.$$

Les fonctions p, q, r peuvent d'ailleurs être calculées facilement par les formules

$$4p = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \qquad 4q = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad 4r = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Schottky (*F.*). — Sur un théorème qui se rapporte aux 4^p fonctions thèta. (13-15).

Haar (*Alfred*) et *König* (*Dénes*). — Sur les ensembles simplement ordonnés. (16-28).

L'un des buts de cet article est d'étendre à la théorie des ensembles simplement ordonnés les théorèmes fondamentaux de la théorie des ensembles de points sur une droite, en particulier les théorèmes de Bolzano-Weierstrass, de Heine-Borel et de Cantor-Bendixson. Chemin faisant, les auteurs résolvent un autre problème, qui est le suivant.

Cantor a démontré que le type d'ordre θ de l'ensemble de tous les nombres réels compris entre 0 et 1 (y compris 0 et 1) est complètement caractérisé par les propriétés suivantes :

α. θ est parfait.

β. θ contient un type d'ordre dénombrable partout dense en θ. Il résulte de là que les théorèmes généraux sur les ensembles de points d'une droite, qui sont des ensembles partiels de θ, devraient pouvoir se déduire des propriétés α et β seules; en particulier, leur démonstration doit pouvoir se passer de toute notion *métrique*, puisque un intervalle quelconque de θ ne peut posséder aucune propriété intrinseque que ne possède tout autre intervalle de θ. Les auteurs se proposent donc de déduire des seules propriétés α et β la démonstration des théorèmes fondamentaux de la théorie des ensembles linéaires de points.

Ils utilisent les définitions suivantes : D'abord ils emploient l'expression *ensemble* au lieu d'*ensemble simplement ordonné*. Un ensemble partiel d'un ensemble M, qui jouit de la propriété de contenir tous les éléments de M antérieurs à a, dès qu'il contient a, s'appelle un *Abschnitt* de M; de même un ensemble partiel de M, qui contient tous les éléments de M postérieurs à a, dès qu'il contient a, s'appelle un *Rest* de M. Ils désignent par $A(a)$ l'ensemble des éléments de M postérieurs à a, par (a, b) l'ensemble des éléments de M compris entre a et b. Les ensembles $A(a)$, $R(a)$, (a, b) sont des *intervalles* de M.

Un élément h de M, qui jouit de la propriété que la puissance de (h, a), pour tout élément a postérieur à h, est supérieure (et non égale) à $\mathfrak{m}$ est dit un *elément de condensation* à gauche d'ordre $\mathfrak{m}$; on définit de même un élément de condensation à droite d'ordre $\mathfrak{m}$.

Toute décomposition de M en un Abschnitt A et un Rest R est dite une *lacune* si A n'admet aucun dernier élément et si R n'admet aucun premier élément. La lacune est dite d'*ordre p* à gauche (ou à droite) si chaque Abschnitt de R (ou Rest de A) a une puissance supérieure à $\mathfrak{m}$.

Un ensemble est dit *fermé en soi* s'il ne possède aucune lacune.

Un ensemble partiel M' de M est dit *ferme en* M si chaque élément de condensation de M' en M est un élément de M'.

Un ensemble est dit *dense en soi* si chacun de ses éléments est un élément de condensation.

Un ensemble partiel M' de M, qui est dense en soi, est dit *parfait* s'il est fermé en soi et fermé en M.

Enfin, un ensemble partiel R de M, tel que tout intervalle de M contenant des éléments de M contienne aussi des éléments de R, est dit *partout dense en* M.

Le théorème de Weierstrass-Bolzano admet deux généralisations :

A. *Tout ensemble infini* M *possède ou bien un élément de condensation, ou bien une lacune;*

A_1. *Si la puissance* $\mathfrak{m}$ *de* M *est supérieure à* $\mathfrak{p}$ *et si* $\mathfrak{p} = \nu\,\mathfrak{p}$, *il existe dans* M *au moins une lacune ou un élément de condensation d'ordre* $\mathfrak{p}$.

Le théorème de Heine-Borel admet aussi deux généralisations :

B. *Soient* N *un ensemble fermé quelconque et* M *un ensemble partiel ferme en soi et en* N. *Si un ensemble déterminé d'intervalles i de* N *est tel que chaque élément de* M *soit contenu dans au moins un de ces intervalles, on peut, parmi ces intervalles, en choisir en nombre fini* $(i_1, i_2, \ldots, i_\nu)$ *de manière que chaque élément de* N *appartienne à l'un de ces* ν *intervalles.*

B_1. *Si un ensemble* I *d'intervalles i d'un ensemble* M *est tel que chaque élément et chaque lacune de* M *soit contenu dans au moins un de ces intervalles, on peut choisir dans* I *un nombre fini d'intervalles tels que chaque élément et chaque lacune de* M *appartiennent à l'un au moins de ces derniers intervalles.*

La généralisation du théorème de Cantor-Bendixson résulte enfin des lemmes suivants :

C. *L'ensemble des éléments de condensation d'ordre* $\mathfrak{m}$ *de l'ensemble fermé* M *est fermé.*

D. *L'ensemble précédent est fermé en* M.

E. *Soit* N *un ensemble contenant un ensemble partiel* R *partout dense en* N *et de puissance* $\aleph_\gamma$, *et soit* M *un ensemble partiel quelconque de* N *qui soit fermé en soi. La puissance de l'ensemble* $D = M - (^{\aleph}{}_{\gamma})$ *des éléments de* M *qui ne sont pas des éléments de condensation d'ordre* $\aleph_\gamma$ *de* M, *est inférieure ou égale à* $\aleph_\gamma$.

F. *L'ensemble* $M\,(^{\aleph}{}_{\gamma})$ *est dense en soi.*

G. *Soit* N *un ensemble contenant un ensemble partiel partout dense en* N *et de puissance* $\aleph_\gamma$. *Tout ensemble partiel fermé* M *de* N *peut se decomposer en deux parties, l'une* (P) *parfaite, l'autre* (D) *de puissance inférieure ou égale à* $\aleph_\gamma$. *La partie parfaite est formée des éléments de condensation d'ordre* $\aleph_\gamma$ *de* M *en* M.

Thomé (L. Wilhelm). — Sur une application de la théorie des équations différentielles linéaires simultanées aux systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et aux systèmes d'équations aux différentielles totales linéaires. (29-51).

Cet article se rattache à l'article publié par le même auteur dans le Tome CXXXVIII du même journal.

Dans les paragraphes 1 et 2, il part d'une fonction

$$f(t, q_1, q_2, \ldots, q_m, v_1, v_2, \ldots, v_n, p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

rationnelle entière par rapport aux q, p, v, de degré au plus égal à 2 par rapport aux q et aux p, les coefficients étant des fonctions uniformes et continues de t dans un domaine simplement connexe T.

L'intégration de l'équation

$$\frac{\partial W}{\partial t} + f\left(t, q_1, \ldots, q_m, v_1, \ldots, v_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = 0$$

est alors ramenée à celle d'un système d'équations différentielles linéaires simultanées

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Dans le cas particulier où f est linéaire et homogène par rapport aux p, il suffit d'intégrer le système linéaire

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Dans les paragraphes 3-7, l'auteur s'occupe du système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial t} + a_{01}\frac{\partial z}{\partial q_1} + \ldots + a_{0m}\frac{\partial z}{\partial q_m} = 0,\\
&\frac{\partial z}{\partial x_1} + a_{11}\frac{\partial z}{\partial q_1} + \ldots + a_{1m}\frac{\partial z}{\partial q_m} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial z}{\partial x_n} + a_{n1}\frac{\partial z}{\partial q_1} + \ldots + a_{nm}\frac{\partial z}{\partial q_m} = 0
\end{aligned}$$

et du système correspondant d'équations aux différentielles totales

$$\begin{aligned}
dq_1 &= a_{01}\,dt + a_{11}\,dx_1 + \ldots + a_{n1}\,dx_n,\\
dq_2 &= a_{02}\,dt + a_{12}\,dx_1 + \ldots + a_{n2}\,dx_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
dq_m &= a_{0m}\,dt + a_{1m}\,dx_1 + \ldots + a_{nm}\,dx_n,
\end{aligned}$$

où les coefficients a sont linéaires par rapport aux q, rationnels entiers par rapport aux x, analytiques et continus par rapport à t dans un domaine simplement connexe T.

Après avoir établi la condition d'intégrabilité du dernier système, il montre comment l'application de la méthode d'intégration de Mayer conduit à un système d'équations différentielles ordinaires linéaires. Il montre enfin comment l'intégrale z du système d'équations aux dérivées partielles peut être prolongée analytiquement dans tout le domaine T.

Müntz (*Ch.*). — Sur le problème aux limites de l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima. (52-79).

Après un court résumé historique sur le problème de Plateau, l'auteur indique qu'il a appliqué à ce problème la méthode des approximations successives. Il se place dans le cas d'une courbe gauche fermée représentée par les équations

$$x^* = x(t), \qquad y^* = y(t), \qquad z^* = \varepsilon z(t),$$

où $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont des fonctions analytiques de leur argument t, telles que l'on ait, pour chaque valeur de t,

$$\text{(B)} \qquad \left(\frac{dx^*}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy^*}{dt}\right)^2 \neq 0,$$

où enfin ε est un facteur constant qu'on pourra supposer aussi petit qu'on voudra. On peut alors, pour des valeurs suffisamment petites de ε, trouver par approximations successives l'équation de la surface minima régulière qui passe par cette courbe gauche. On arrive au même résultat si les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, *ainsi que leurs deux premières dérivées seulement*, sont uniformes, finies et continues, satisfont à la condition (B) et enfin sont telles que chacune de leurs dérivées secondes, supposée désignée par $\psi(t)$, satisfait à l'inégalité

$$|\psi(t+\tau) - \psi(t)| \leq C\tau^\lambda \qquad (\tau \leq \tau_0;\ 0 < \lambda \leq 1),$$

où C, τ_0, λ sont des constantes.

Première Partie. — Soit T la surface d'un cercle de rayon 1 et ayant l'origine pour centre, et soit $f(x,y)$ une fonction finie et continue à l'intérieur de T satisfaisant à la condition de Lipschitz

$$|f(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\sin\alpha) - f(x,y)| \leq C_0\rho^\lambda \qquad (0 \leq \rho \leq \rho_0;\ 0 < \lambda \leq 1).$$

On peut alors définir la fonction pour les points (x,y) du contour de T sans qu'elle cesse d'être finie et continue sur ce contour. On peut aussi supposer, en changeant la constante C_0, $\rho_0 = 2$ et $\lambda < 1$. On aura alors, C désignant une constante convenable,

$$|f(x,y)| < C, \qquad |f(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\sin\alpha) - f(x,y)| < C\rho^\lambda$$
$$(\rho \geq 0;\ 0 < \lambda < 1).$$

Il existe une fonction $V(x,y)$ régulière à l'intérieur de T, s'annulant sur le contour et satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f(x,y).$$

Cette fonction, en désignant par $G(x, y; \xi, \eta)$ la fonction de Green relative à la circonférence qui limite T, est donnée par la formule

$$V = -\frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\, G\, d\xi\, d\eta,$$

et l'on a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\frac{\partial G}{\partial x}\, d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\frac{\partial G}{\partial y}\, d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = -\frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\frac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial y}\, d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{2} f(x, y) - \frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\, d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{2} f(x, y) - \frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\, d\xi\, d\eta.$$

En se servant des propriétés de la fonction de Green, l'auteur démontre les théorèmes suivants :

I. *La fonction* V *et ses dérivées partielles des deux premiers ordres sont finies et continues dans tout le domaine T, contour compris.*

II. *La fonction* V *et ses dérivées premières satisfont à une condition de Lipschitz à exposant* 1, *ses dérivées secondes à une condition de Lipschitz à exposant* λ.

III. Soient

$$V(x, y) = V, \qquad V(x + \rho\cos\alpha, y + \rho\sin\alpha) = V^{(1)}, \qquad V^{(1)} - V = \Phi.$$

On peut déterminer une constante m ne dépendant que de λ *et telle que la fonction* V *et chacune de ses dérivées partielles des deux premiers ordres soient constamment inférieures en valeur absolue à mc, la fonction* Φ *et chacune de ses dérivées partielles du premier ordre soient inférieures en valeur absolue à* $2\,mc\rho$, *chacune des dérivées partielles du second ordre de la fonction* Φ *soit inférieure en valeur absolue à* $2\,mc\rho^{\lambda}$.

On peut prendre pour m la valeur $1 + \frac{112}{1-\lambda} + \frac{8}{\lambda}$.

Les conclusions précédentes s'étendent à tout domaine qui se déduit de T par une représentation conforme

$$X = X(x, y), \qquad Y = Y(x, y),$$

à condition que les fonctions X et Y ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres soient régulières sur le contour, que leurs dérivées partielles du premier ordre ne s'annulent pas toutes à la fois et que leurs dérivées du second ordre satisfassent à une condition de Lipschitz. Il en est ainsi du domaine limité par une courbe analytique fermée; la constante m dépend alors de ce contour.

Deuxième Partie. — La résolution du problème de Plateau, relatif à la courbe gauche indiquée plus haut, revient à la recherche de l'intégrale de

l'équation

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] = 0,$$

qui se réduit sur le contour

$$x^* = x(t), \qquad y^* = y(t),$$

à

$$z^* = z(t).$$

L'auteur part de la fonction potentielle z_0 qui, sur le contour, prend les mêmes valeurs que z^*. Si l'on pose

$$\zeta_0 = z_0(x + \rho \cos\alpha, y_0 + \rho \sin\alpha) - z_0(x, y),$$

on a

$$|z_0| < M_0, \qquad |z_0'| < M_0, \qquad |z_0''| < M_0;$$
$$|\zeta_0| < 2 M_0 \rho, \qquad |\zeta_0'| < 2 M_0 \rho, \qquad |\zeta_0''| < 2 M_0 \rho^\lambda \qquad (0 < \lambda < 1),$$

en désignant par M_0 une constante convenablement choisie, par l'indice ′ une dérivée quelconque du premier ordre, par l'indice ″ une dérivée quelconque du second ordre.

Cela étant, on détermine pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, la solution $z_{\nu+1}$ de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_{\nu+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_{\nu+1}}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z_\nu}{\partial x} \frac{\partial z_\nu}{\partial y} \frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z_\nu}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z_\nu}{\partial y^2} \right] = 0$$

qui sur le contour prend la valeur z^*.

L'auteur démontre successivement, en s'appuyant sur les résultats de la première partie, les trois théorèmes suivants, valables pour des valeurs suffisamment petites de ε :

I. *Les fonctions $z_{\nu+1}$, ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, sont finies et continues.*

II. *Les séries infinies*

$$z = z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_{n+1} - z_n) + \ldots$$
$$\dot{z}' = z_0' + (z_1' - z_0') + (z_2' - z_1') + \ldots + (z_{n+1}' - z_n') + \ldots$$
$$\ddot{z}' = z_0'' + (z_1'' - z_0'') + (z_2'' - z_1'') + \ldots + (z_{n+1}'' - z_n'') + \ldots$$

sont absolument convergentes et l'on a

$$\dot{z} = z', \qquad \ddot{z} = z.$$

III. *La fonction z est la solution cherchée du problème de Plateau. Cette fonction, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, est finie et continue pour tout le domaine limité par la courbe (x^*, y^*), cette courbe comprise. Toutes ces fonctions sont développables suivant les puissances croissantes de ε.*

Ces théorèmes sont vrais tant que l'on a

$$m \varepsilon^2 \tfrac{1}{10} M_0^2 < \frac{1}{27}.$$

La méthode de l'auteur est susceptible de s'étendre à des équations plus générales de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varepsilon F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Miller (*G.-A.*). — Note sur l'équation $s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2$, s_1 et s_2 étant des opérations d'un groupe fini. (80-84).

Dans un article paru dans le même Journal (t. CXXVIII), M. Netto a montré que si les opérateurs s_1, s_2 d'un groupe fini satisfont à la condition $s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2$, les ordres de ces deux opérateurs sont égaux, ou bien l'ordre de l'un d'eux est impair, l'ordre de l'autre étant le double de ce nombre impair. Il a de plus déterminé les ordres de quatre groupes obtenus en assignant les valeurs les plus simples aux ordres de s_1 et de s_2.

Dans cette Note, l'auteur détermine complètement ces groupes particuliers, supposant que s_1 et s_2 ne sont pas échangeables.

D'abord, si l'on a

$$s_1^3 = s_2^4 = 1, \qquad s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2,$$

on obtient le groupe tétraédral.

Si

$$s_1^3 = 1, \qquad s_2^2 = 1, \qquad s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2,$$

les opérateurs $s_1 s_2$ et $s_2 s_1$ engendrent un groupe quaternion qui est laissé invariant par l'opérateur s_1. On a donc le groupe d'ordre 24 qui n'admet aucun sous-groupe d'ordre 12.

Si l'on a

$$s_1^4 = 1, \qquad s_2^5 = 1, \qquad s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2,$$

l'opérateur $s_1 s_2$ engendre un groupe cyclique d'ordre 5 qui est laissé invariant par l'opérateur s_1. On a donc le groupe métacyclique d'ordre 20.

Si l'on a

$$s_1^5 = s_2^3 = 1, \qquad s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2,$$

l'opérateur $s_1 s_2$ engendre un groupe cyclique d'ordre 11 qui est laissé invariant par l'opérateur s_1. On a donc le groupe semi-métacyclique d'ordre 55.

Il peut arriver que plusieurs groupes différents contiennent deux opérateurs $s_1 s_2$ satisfaisant à la condition $s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2$. Cela arrive, par exemple, si l'on a

$$s_1^3 = s_2^3 = 1.$$

Steinbacher (*Friedrich*). — Corps abéliens considérés comme corps de la division du cercle. (85-100).

Le théorème de Kronecker, d'après lequel tout corps abélien résulte de la division du cercle, a été démontré pour la première fois par M. Weber, puis par MM. Hilbert et Mertens, enfin de nouveau par M. Weber. La dernière démonstration repose sur un raisonnement par induction complète et se décompose naturellement en deux parties : on démontre d'abord que tout corps cyclique de degré p, où p est un nombre premier naturel, est identique à un corps de la division du cercle; on démontre ensuite que tout corps abélien de

degré supérieur est aussi un corps de la division du cercle. Dans les deux parties de la démonstration, il est avantageux de s'appuyer sur les recherches de M. Hilbert sur la décomposition d'un nombre premier dans un corps quelconque, en particulier sur la notion fondamentale de groupe d'inertie d'un idéal premier.

La nouvelle démonstration, donnée par l'auteur, du théorème de Kronecker fait en effet jouer à cette notion un rôle important, ainsi qu'au théorème de Minkowski sur le discriminant des corps algébriques.

1. *Le discriminant des corps abéliens.* — L'auteur rappelle la définition du groupe d'inertie $\mathfrak{G}$ d'un idéal premier d'un corps abélien P, du groupe de ramification $\mathfrak{T}$ et le théorème d'après lequel le groupe $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{T}$ est cyclique. Au groupe d'inertie correspond, dans le sens de l'algèbre, un diviseur de P qu'on appelle le corps d'inertie du nombre premier naturel p dans lequel entre l'idéal premier considéré. *Le corps d'inertie de p est le plus grand diviseur de* P *qui possède le plus grand discriminant non divisible par p.*

2. *Il n'y a pas de corps cyclique de discriminant* ± 1. — L'auteur donne une démonstration simple du théorème de Minkowski dans le cas des corps abéliens. Il part d'un corps cyclique A de degré premier p; son groupe se compose des puissances d'une substitution S d'ordre p. Kummer a indiqué une généralisation intéressante de la résolvante de Lagrange: en partant d'une unité ε différente de ± 1 (le corps A en possède si $p > 2$) et d'un nombre entier ω du corps, on forme le nombre

$$\alpha = \omega + \omega^S \varepsilon + \omega^{S^2} \varepsilon \varepsilon^S + \ldots + \omega^{S^{p-1}} \varepsilon \varepsilon^S \varepsilon^{S^2} \ldots \varepsilon^{S^{p-2}};$$

ce nombre α satisfait à la relation

$$\alpha = \varepsilon \alpha^S.$$

On peut choisir ω de manière que α ne soit pas nul et *ne soit pas une unité.* Si $p = 2$, on démontre de même l'existence d'un nombre α qui ne soit pas une unité, et tel que l'on ait

$$\alpha = -\alpha^S.$$

Cela étant, α doit contenir au moins un diviseur idéal premier $\mathfrak{a}$ et l'on démontre facilement que si q est le nombre premier naturel qui contient $\mathfrak{a}$, on a $q = \mathfrak{a}^p$ et, par suite, *le discriminant de* A *contient le facteur premier* q. La conclusion s'étend naturellement au discriminant d'un corps abélien quelconque.

3. *Corps cycliques dont le discriminant ne contient qu'un nombre premier.* — Soit un corps cyclique P_1 de degré p^a dont le discriminant ne contient qu'un nombre premier q, supposé d'abord différent de p. L'auteur démontre d'abord, d'une manière très simple, que $q - 1$ est divisible par p^a. Il y a un corps cyclique P résultant de la division du cercle, de degré p^a et dont le discriminant est une puissance de q.

Cela étant, si P et P_1 n'étaient pas identiques, leur produit serait un corps *abélien, non cyclique,* de degré $p^b (b > a)$; le groupe de ce corps serait le groupe d'inertie de q, et comme son ordre n'est pas divisible par q, le groupe de ramification de q se réduirait à la substitution identique; le groupe d'inertie serait donc cyclique, contrairement à l'hypothèse.

Tout corps cyclique de degré p^a, dont le discriminant ne contient qu'un nombre premier q différent de p est donc un corps de la division du cercle.

4. *Le corps cyclique de degré p et de discriminant p^a.* — Le cas où le discriminant est une puissance de p est le plus difficile. L'auteur utilise une relation entre le corps cyclique et le corps de degré $p-1$ formé des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité; cette relation est fournie par les résolvantes de Lagrange. Le produit des deux corps est un corps abélien de degré $p(p-1)$ qui joue un rôle important dans la démonstration. L'auteur démontre qu'il n'y a qu'un corps cyclique de degré p dont le discriminant est une puissance de p, et c'est un corps de la division du cercle. Plus généralement *les corps cycliques de degré p^a, dont le discriminant ne contient que le facteur premier p, contiennent toujours $(a > 1)$ un corps de la division du cercle de degré p* : ce corps est réel.

5. *Produits de corps cycliques et de corps de la division du cercle.* — L'auteur démontre un premier lemme :

Si deux corps cycliques A_1 et A_2 de degré p^a ont un plus grand commun diviseur A', leur produit A est aussi le produit de A_1 et d'un corps abélien premier avec A_1 de degré inférieur à p^a.

Ce lemme, quand on prend pour A_1 le corps cyclique de la division du cercle dont le degré est p^a et dont le discriminant ne contient que le facteur premier p, et pour A_2 un corps cyclique quelconque de degré p^a et dont le discriminant est aussi une puissance de p, montre l'identité de A_1 et A_2; *le théorème de Kronecker est ainsi démontré pour les corps cycliques dont le degré et le discriminant sont chacun une puissance d'un nombre premier.*

Le cas général est traité en s'appuyant sur un deuxième lemme :

Si le corps cyclique A_1 de degré p^a jouit de la propriété que le discriminant de son diviseur de degré p contient le nombre premier q, et si l'on désigne par P_q le corps cyclique de la division du cercle de degré p^a et qui jouit de la même propriété que A_1, le produit de A_1 et de P_q est égal au produit de P_q et d'un corps abélien de degré non supérieur dont le discriminant n'est plus divisible par q.

6. *Le corps abélien général.* — Les théorèmes précédents démontrent que tout corps cyclique de degré p^a est diviseur d'un corps abélien formé d'un corps de la division du cercle et d'un autre corps abélien de nature plus simple. Un procédé de réductions successives ramène à des corps de degré p qui sont tous des corps de la division du cercle. Le théorème est ainsi complètement démontré.

Grosschmid (*L.-V.*). — Sur la représentation explicite de toutes les solutions rationnelles d'une congruence quadratique binome à l'aide des facteurs idéaux du module. (101-105).

On sait qu'un nombre rationnel premier impair p (supposé premier avec D) conserve dans le corps $\Omega\left(\frac{D+\sqrt{D}}{2}\right)$ son caractère premier ou bien est le produit dans ce corps de deux idéaux premiers conjugués du premier degré.

suivant que le symbole de Legendre $\left(\frac{D}{p}\right)$ est égal à -1 ou à $+1$. Si de plus on a $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$ et si l'on connaît les deux racines rationnelles de la congruence

$$x^2 \equiv D \pmod{p},$$

on en peut déduire les deux diviseurs idéaux de p. L'auteur montre de quelle manière la connaissance de tous les idéaux premiers de chaque corps quadratique conduit à la représentation de toutes les solutions rationnelles d'une congruence binome quelconque du second degré.

Meyer (*W.-Fr.*). — Sur les plus courtes distances et la généralisation de la notion de courbure dans la théorie des courbes gauches et des surfaces. (106-117).

Si l'on fait correspondre à tout point P d'une courbe gauche réelle c une droite dirigée g passant par P, cette droite engendre une surface réglée. A chaque point P on peut faire correspondre un trièdre trirectangle dont l'un des axes est g; le second axe est la perpendiculaire à g menée dans le *plan osculateur relatif à g*, c'est-à-dire dans le plan limite du plan mené par g parallèlement à la droite g infiniment voisine : ce deuxième axe est la *normale principale relative à g*. Enfin, le troisième axe perpendiculaire aux deux premiers est la *binormale relative à g*.

Il existe des formules analogues aux formules de Frenet et qui permettent de définir la *courbure* Υ_g et la *torsion* ρ_g *relatives à g*.

Si Q est le point de c infiniment voisin de P, l'auteur calcule la plus courte distance δ_g de g et de la droite infiniment voisine passant par Q, la distance e_g du point P au pied de la perpendiculaire commune à g, enfin la distance ε_g de Q au *plan normal relatif à g*. Un certain nombre de tableaux indiquent les valeurs de ces trois quantités dans le cas général, dans le cas particulier où g est la tangente, la normale principale ou la binormale ordinaire de c, enfin dans le cas où c est une courbe (ligne de courbure, ligne asymptotique, ligne géodésique) tracée sur une surface donnée et où g est la normale à la surface en chaque point de c.

Noether (*Emmy*). — Sur la théorie des invariants des formes de n variables. (118-154).

Dans la théorie des invariants projectifs des formes de n variables, les questions qui se rapportent au problème fondamental, la démonstration du nombre fini des formes fondamentales, sont à peine traitées quand on sort du domaine binaire et ternaire. Il s'agit surtout des questions relatives à la dépendance réciproque des formes et des méthodes propres à mettre en évidence cette dépendance. Ces méthodes reposent essentiellement, comme cela a été démontré complètement dans le domaine binaire et ternaire, sur deux théorèmes désignés par M. Study sous le nom de *théorèmes fondamentaux de la méthode symbolique*, à savoir le théorème de la représentation symbolique des formes et le théorème des identités symboliques. Ce dernier théorème exprime que toutes es relations qui existent entre les formes invariantes entre elles peuvent être obtenues par l'application successive d'un petit nombre d'identités symboliques,

que, par suite, la méthode symbolique fait connaître toutes les relations mutuelles des formes sans sortir du domaine des invariants.

M. Gordan a déjà attiré l'attention, dans son Programme d'Erlangen, sur les difficultés qui se présentent dans le passage à n variables; ces difficultés tiennent à ce que le premier théorème de la méthode symbolique tombe en défaut dans le cas général. Il entre dans le domaine n-aire des séries de variables de degré supérieur p_ρ et de séries de symboles analogues S^ρ; on arrive à ces séries soit, comme le faisait autrefois Clebsch, en partant de formes à un nombre quelconque de séries p_ρ, soit, comme F. Deruyts et A. Capelli, en partant de formes qui ne contiennent qu'un certain nombre de séries congrédientes x. Mais il n'existe aucune représentation symbolique contenant explicitement les séries p_ρ, S^ρ; on est obligé de remplacer les p_ρ et les S^ρ par leurs expressions au moyen des x et des variables contragrédients s et de répartir les x et les s dans différents déterminants. On peut, il est vrai, vérifier, au moyen de certaines relations différentielles, qu'un agrégat donné de déterminants possède la propriété de ne dépendre que des séries p_ρ, S^ρ; mais on n'obtient ainsi aucune vue d'ensemble sur les formations invariantes et leurs procédés de génération.

L'auteur montre, dans les paragraphes 2 et 6, comment l'application du *théorème des matrices correspondantes* permet de retrouver dans toute sa généralité le premier théorème fondamental, en remplaçant la représentation au moyen de *produits de matrices*. Dans le paragraphe 2, elle montre que chaque produit de matrice, contenant explicitement les séries S^ρ, p_ρ, est une formation invariante de la forme fondamentale; la réciproque est démontrée au paragraphe 6, par application du deuxième théorème fondamental (3-5).

Ce théorème est connu pour les formes qui ne contiennent que des séries de variables x. Le problème général consistant à établir l'ensemble des identités indécomposables par lesquelles toutes les séries S^ρ, p_ρ sont regardées comme indécomposables, a été formulé par M. Study : celui-ci regarde en même temps le nombre de ces identités comme une mesure de la difficulté des méthodes dans le domaine n-aire. En rassemblant en une seule formule l'ensemble de ces identités, l'auteur réduit cette difficulté à son minimum.

Toute la théorie peut se construire facilement sur les deux théorèmes fondamentaux. Le premier théorème donne directement les procédés de génération des formes, le procédé symbolique de repliement (*Faltungsprocess*) et les procédés non symboliques de différentiation; l'identité de décomposition permet de discerner parmi tous ces procédés ceux qui sont équivalents entre eux. La connaissance des procédés de différentiation permet, en outre, d'étendre la notion de forme normale au domaine n-aire et, grâce à un procédé de démonstration indiqué par M. Mertens pour le domaine quaternaire, de démontrer que tout système de formations invariantes peut se remplacer par un système équivalent de formes normales (§ 7). Dans sa Thèse (même Journal, t. CXXXIV), l'auteur avait montré que le procédé de repliement ternaire peut être obtenu par l'application successive de deux repliements fondamentaux, ce qui lui avait permis, en s'appuyant sur la théorie du développement en série et en introduisant la notion de *série de formes*, de développer les théorèmes de réduction les plus importants pour les systèmes de formes. De même, dans le domaine n-aire, le procédé de repliement résulte de $n-1$ repliements fondamentaux (§ 8). Enfin, l'article se termine par les théorèmes de réduction (§ 9).

A la fin de l'Introduction, l'auteur signale les analogies de ses procédés d calcul avec ceux de l'Ausdehnungslehre de Grassmann.

Schur (*J.*). Sur la représentation du groupe symétrique et du groupe alterné par des substitutions linéaires fractionnaires. (155-250).

Dans ce Mémoire, l'auteur détermine tous les groupes finis de transformations homographiques holoédriquement isomorphes au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ ou au groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ de n lettres; il ne considère d'ailleurs que les groupes *irréductibles* (non décomposables) et ne regarde pas comme distincts deux groupes *équivalents*, c'est-dire transformables l'un dans l'autre par une transformation projective.

Ceux d'entre les groupes cherchés qui peuvent être regardés comme des groupes de n' $\left(\text{ou } \frac{n'}{2}\right)$ substitutions linéaires et homogènes (entières) ont déjà été déterminés, par M. Frobenius d'abord, grâce à la détermination des caractères des groupes $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$, par l'auteur ensuite. Ce sont les groupes restants, pour lesquels le caractère fractionnaire des substitutions est essentiel, qui font l'objet des développements du Mémoire. Ils n'existent que pour $n \geqq 4$. Leur nombre, pour $\mathfrak{S}_n$, est égal au nombre v_n des décompositions de n en une somme d'entiers distincts

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m \qquad (\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_m > 0);$$

le groupe correspondant à l'une de ces décompositions est le degré

$$f_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} = 2^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{n!}{\nu_1! \nu_2! \ldots \nu_m!} \prod_{\alpha > \beta} \frac{\nu_\alpha - \nu_\beta}{\nu_\alpha + \nu_\beta};$$

le *degré* d'un groupe irréductible est le nombre, augmenté de 1, des variables transformés par le groupe.

A la décomposition $n = n$ correspond un groupe important de degré $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ déjà considéré par M. A. Wiman; l'auteur indique un procédé, relativement simple, de formation de ce groupe.

Pour le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$, il existe le même nombre v_n de groupes homographiques irréductibles non équivalents; leur degré est $f_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ si $n - m$ est impair, $\frac{1}{2} f_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ si $n - m$ est pair.

Il y a des exceptions à signaler si $n = 6$ ou 7; pour $n = 6$, il y a $v_6 + 6$; pour $n = 7$, il y a $v_7 + 11$ groupes irréductibles isomorphes à $\mathfrak{A}_n$; mais parmi les $v_6 = 4$ groupes qui rentrent dans la règle générale, deux doivent être regardés comme identiques.

Chacun des groupes homographiques isomorphes à $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ peut s'écrire comme un groupe de $2n!$ et $2\frac{n!}{2}$ substitutions linéaires et homogènes. Il y a exception pour les groupes exceptionnels correspondant à $n = 6$ et $n = 7$ qui peuvent s'écrire comme groupes de $3\frac{n!}{2}$ ou $6\frac{n!}{2}$ substitutions linéaires et homogènes. Deux des groupes précédents de degré 6, correspondant à $n = 7$, ont déjà été considérés par M. Wiman.

L'auteur se sert des méthodes exposées dans son Mémoire: *Sur la représentation des groupes finis par des substitutions linéaires fractionnaires* (même

Journal, t. CXXVII, p. 20). Cette méthode consiste à déterminer les groupes de représentation de $\mathfrak{S}_n$ et de $\mathfrak{A}_n$ et à calculer leurs caractères. Les groupes de représentation s'obtiennent facilement, la détermination de leurs caractères est beaucoup plus difficile.

I. *Les groupes de représentation des groupes $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$.* — A toute transformation homographique correspond une matrice, définie à un facteur de proportionnalité près. Un groupe de h transformations homographiques, définies par les matrices (A), (B), ..., constitue une *représentation* d'un groupe fini $\mathfrak{G}$ d'ordre h si, A et B étant deux éléments quelconques du groupe, (A), (B) les matrices des transformations homographiques correspondantes, on a

$$(A)(B) = r_{AB}(AB),$$

où r_{AB} est une certaine constante. On peut choisir les facteurs de proportionnalité des matrices de manière que toutes les constantes r_{AB} soient égales à 1, les matrices (A), (B), ..., définissent une représentation du groupe par des substitutions linéaires et homogènes *entières*.

Un groupe fini $\mathfrak{A}$, qui contient un sous-groupe $\mathfrak{M}$ formé d'éléments invariants de $\mathfrak{A}$, et tel que le groupe $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{M}}$ soit isomorphe holoédrique de $\mathfrak{G}$, s'appelle un groupe complété de $\mathfrak{G}$ par le groupe $\mathfrak{M}$. A toute représentation Δ de $\mathfrak{A}$ par des matrices, telle qu'à chaque élément de $\mathfrak{M}$ corresponde une matrice ne différant de la matrice unité que par un facteur de proportionnalité, correspond une représentation de $\mathfrak{G}$ par des substitutions linéaires fractionnaires.

On peut toujours choisir le groupe $\mathfrak{A}$ de manière à obtenir ainsi toutes les représentations possibles de $\mathfrak{G}$; le groupe $\mathfrak{A}$ est dit alors un groupe suffisamment complété de $\mathfrak{G}$; si l'ordre d'un tel groupe est le plus petit possible, il est dit un groupe de représentation de $\mathfrak{G}$; pour qu'il en soit ainsi, *il faut et il suffit que le commutateur de $\mathfrak{A}$ contienne tous les éléments du groupe $\mathfrak{M}$.* Un groupe $\mathfrak{G}$, pour lequel le sous-groupe $\mathfrak{M}$ est d'ordre 1, est dit un groupe *fermé*.

On peut définir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, comme groupe abstrait, par les $n-1$ transpositions

$$S_1 = (1, 2), \qquad S_2 = (2, 3), \qquad \ldots, \qquad S_{n-1} = (n-1, n)$$

qui satisfont aux relations

$$S_\alpha^2 = E, \quad (S_\beta S_{\beta+1})^3 = E, \quad S_\gamma S_\delta = S_\delta S_\gamma \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, n-1; \beta = 1, 2, \ldots, n-2 \\ \gamma = 1, 2, \ldots, n-3; \delta = 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on a une représentation de ce groupe par des substitutions homographiques, on peut choisir les facteurs de proportionnalité des matrices C_1, $C_2, \ldots, C_{n-1}$ qui correspondent à $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ de manière à avoir les relations

$$C_\alpha^2 = E, \qquad (C_\beta C_{\beta+1})^3 = E, \qquad C_\gamma C_\delta = j\, C_\delta C_\gamma,$$

où j est égal à $+1$ ou à -1.

On déduit facilement de là l'existence de deux groupes de représentation de $\mathfrak{S}_n$. L'un $\mathfrak{T}_n$ est défini par les relations

$$J^2 = E, \qquad T_\alpha^2 = J, \qquad (T_\beta T_{\beta+1})^3 = J, \qquad T_\gamma T_\delta = T_\delta T_\gamma;$$

l'autre $\mathfrak{T}'_n$ par les relations

$$J^2 = = E, \qquad T'^2_\alpha = E, \qquad (T'_\beta T'_{\beta+1})^3 = E, \qquad T'_\gamma T'_\delta = JT'_\delta T'_\gamma, \qquad JT'_\alpha = T'_\alpha J.$$

Dans chacun de ces groupes, $\mathfrak{M}$ contient l'élément unité E et l'élément J; ils sont tous les deux des groupes suffisamment complétés de $\mathfrak{S}_n$ et, pour $n \geqq 4$, J fait partie de leur commutateur : ce sont donc bien, pour $n \geqq 4$, des groupes de représentation de $\mathfrak{S}_n$.

Les deux groupes $\mathfrak{T}_n$ et $\mathfrak{T}'_n$ ne sont isomorphes que pour $n = 6$.

Des considérations analogues conduisent au groupe de représentation $\mathfrak{A}_n$ de $\mathfrak{A}_n$. Si n est supérieur à 3 et différent de 6 et de 7, le groupe de représentation est d'ordre $2 . \frac{n!}{2}$; il est isomorphe holoédrique du commutateur de $\mathfrak{T}_n$ ou de $\mathfrak{T}'_n$: il peut être regardé comme engendré par les éléments

$$B_1 = T_2 T_1, \quad C_2 = T_3 T_1, \quad \ldots, \quad B_{n-2} = T_{n-1} T_1.$$

Si $n = 6$ ou 7, les groupes de représentation de $\mathfrak{U}_n$ sont d'ordre $6 . \frac{n!}{2}$.

II. *Sur la répartition des éléments des groupes $\mathfrak{T}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ en classes d'éléments conjugués.* — A toute permutation P de $\mathfrak{S}_n$ correspondent dans $\mathfrak{T}_n$ deux éléments P′ et JP′, qui peuvent être ou non éléments conjugués de $\mathfrak{T}_n$. Dans le premier cas, la permutation P est dite *de première espèce;* dans le second cas, *de seconde espèce.* On démontre facilement le théorème suivant :

Une permutation paire est de première espèce si elle contient au moins un cycle d'ordre pair, de seconde espèce si tous ses cycles sont d'ordre impair. Une permutation impaire est de première espèce si elle contient au moins deux cycles de même ordre, de seconde espèce si les ordres de ses cycles sont tous différents.

Le nombre k'_n des classes d'éléments conjugués de $\mathfrak{T}_n$ se déduit de ce qui précède. Considérons les décompositions de n en une somme d'entiers positifs; une telle décomposition est dite *paire* ou *impaire* suivant que le nombre des termes pairs de la somme est pair ou impair. Soient alors k_n le nombre de toutes les décompositions possibles distinctes, g_n et u_n les nombres des décompositions paires et impaires en une somme d'entiers tous différents. Soit enfin v_n le nombre des décompositions de n en une somme d'entiers impairs, différents ou non; v_n est aussi le nombre des décompositions de n en une somme d'entiers tous différents, c'est-à-dire que v_n est égal à $g_n + u_n$.

D'après cela, on a la formule

$$k'_n = k_n + v_n + u_n = k_n + g_n + 2u_n.$$

On traite de même le groupe $\mathfrak{A}_n$. Si P est une permutation paire de seconde espèce, il est évident que P′ et JP′ ne sont pas conjugués dans $\mathfrak{A}_n$. *Si* P *est une permutation paire de première espèce, pour que* P′ *et* JP′ *soient conjugués, il faut et il suffit que* P *contienne au moins deux cycles de même ordre.* Il résulte de là que si l_n est le nombre des classes d'éléments conjugués de $\mathfrak{U}_n$, l'_n le nombre des classes d'éléments conjugués de $\mathfrak{A}_n$, on a :

$$l'_n = l_n + 2g_n + u_n.$$

L'auteur appelle enfin *permutations de troisième espèce* les permutations paires dont les cycles ont des ordres tous différents. Ce n'est que pour deux permutations P et Q de troisième espèce que P′ et Q′ peuvent être conjugués dans $\mathfrak{T}_n$ sans l'être dans $\mathfrak{G}_n$: s'il en est ainsi, P′ et Q′ sont dits les *éléments adjoints* de $\mathfrak{G}_n$. Deux permutations de $\mathfrak{U}_n$ conjuguées en $\mathfrak{S}_n$, mais non en $\mathfrak{U}_n$, sont dites de même *permutations adjointes*.

III. *Sur la correspondance des groupes $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{T}_n$.* — L'auteur montre que, parmi les deux éléments de $\mathfrak{T}_n$ qui correspondent à un même élément donné quelconque P de $\mathfrak{S}_n$, on peut en choisir un, qu'on appellera P′, de manière que si P et Q sont deux permutations conjuguées en $\mathfrak{S}_n$ ou en $\mathfrak{U}_n$, P′ et Q′ soient des éléments conjugués en $\mathfrak{G}_n$.

IV. *Propriétés générales des caractères des groupes $\mathfrak{T}_n$ et $\mathfrak{G}_n$.* — Si l'on considère une représentation quelconque d'un groupe fini $\mathfrak{G}$ par des substitutions linéaires homogènes à f variables, et si $\chi(\mathrm{R})$ désigne la trace, c'est-à-dire la somme des éléments de la diagonale principale, de la matrice qui correspond à l'élément R, l'ensemble des nombres $\chi(\mathrm{R})$ constitue ce que M. Frobenius appelle un *caractère de degré f du groupe $\mathfrak{G}$*. Le caractère est dit *simple* si la représentation est irréductible. Pour que deux représentations soient équivalentes, il faut et il suffit qu'elles aient le même caractère. Le nombre des caractères simples $\chi^{(0)}(\mathrm{R})$, $\chi^{(1)}(\mathrm{R})$, ... est égal au nombre des classes d'éléments conjugués de $\mathfrak{G}$, et l'on a entre ces caractères les relations

$$\sum_{\mathrm{R}} \chi^{(\alpha)}(\mathrm{R})\,\chi^{(\alpha)}(\mathrm{R}^{-1}) = h, \qquad \sum_{\alpha} \chi^{(\alpha)}(\mathrm{R})\,\chi^{(\alpha)}(\mathrm{R}^{-1}) = 0,$$

h étant l'ordre du groupe.

On obtient un caractère *composé* en prenant le système des nombres

$$r_0\chi^{(0)}(\mathrm{R}) + r_1\chi^{(1)}(\mathrm{R}) + \ldots,$$

où $r_0, r_1, \ldots$, sont des entiers; le caractère composé est dit *propre* si les entiers r sont positifs.

Un caractère $\chi(\mathrm{R})$ de $\mathfrak{T}_n$ ou $\mathfrak{G}_n$ est dit de *première espèce* si l'on a

$$\chi(\mathrm{J}) = \chi(\mathrm{E}),$$

de *seconde espèce* si l'on a

$$\chi(\mathrm{J}) = -\chi(\mathrm{E});$$

on a alors, suivant les cas, pour tout élément R,

$$\chi(\mathrm{JR}) = \pm\chi(\mathrm{R}).$$

Le nombre des caractères simples de seconde espèce est :

Pour le groupe $\mathfrak{T}_n$, égal à $k'_n - k_n = g_n + 2u_n = v_n + u_n$;
Pour le groupe $\mathfrak{G}_n$, égal à $l'_n - l_n = 2g_n + u_n = v_n + g_n$.

L'auteur ne s'occupe que de la détermination des caractères de seconde espèce, ceux de première espèce ayant été déterminés par M. Frobenius.

Deux caractères $\chi(\mathrm{T})$ et $\chi'(\mathrm{T})$ de $\mathfrak{T}_n$ sont dits *associés* si l'on a

$$\chi'(\mathrm{T}) = (-1)^{\tau}\chi(\mathrm{T}),$$

où τ est égal à 1 ou à -1 suivant que T appartient à $\mathfrak{G}_n$ ou non. Si $\chi(T)$ est son propre associé, il est dit *ambige*.

Si le caractère simple $\chi(T)$ n'est pas ambige, l'ensemble des nombres $\chi(B)$, où B est un élément quelconque de $\mathfrak{G}_n$, constitue un caractère simple de $\mathfrak{G}_n$. Si, au contraire, $\chi(T)$ est ambige, on a

$$\chi(B) = \psi(B) + \overline{\psi}(B),$$

où $\psi(B)$ et $\overline{\psi}(B)$ sont deux caractères simples différents de $\mathfrak{G}_n$. La différence $\psi(B) - \overline{\psi}(B)$ s'appelle le *complément* de $\chi(T)$.

Le nombre des caractères simples ambiges de seconde espèce de $\mathfrak{T}_n$ est égal à φ_n, c'est-à-dire au nombre des décompositions paires de n en une somme d'entiers distincts.

Si $\mathfrak{D}(B)$ est un caractère quelconque de $\mathfrak{G}_n$ et si C désigne un élément quelconque de $\mathfrak{T}_n$ n'entrant pas dans $\mathfrak{G}_n$, l'ensemble des nombres

$$\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}(C^{-1}BC)$$

constitue encore un caractère de $\mathfrak{G}_n$ qui est dit *adjoint* du premier. Les deux caractères $\psi(B)$ et $\overline{\psi}(B)$, qui proviennent d'un caractère simple ambige $\chi(T)$ de $\mathfrak{T}_n$, sont adjoints. Si l'on connaît une représentation Δ appartenant au caractère $\chi(T)$ et si H est une matrice dont le carré est égal à la matrice unité et qui satisfait aux relations

$$H^{-1}TH = (-1)^{\tau}T,$$

le complément $\psi(B) - \overline{\psi}(B)$ du caractère $\chi(T)$ n'est autre que la trace de la matrice HB.

Le complément $\mathfrak{D}(B)$ n'est différent de zéro que pour les éléments B qui correspondent dans $\mathfrak{U}_n$ à des permutations de troisième espèce.

Si $\chi(T)$ est un caractère de seconde espèce de $\mathfrak{C}_n$, les nombres $\chi(P')$ ne sont différents de zéro que pour les éléments P' qui correspondent à des permutations P de $\mathfrak{U}_n$ qui sont de seconde espèce; $\chi(P')$ ne dépend que de la classe des permutations conjuguées de $\mathfrak{U}_n$ à laquelle appartient P.

Parmi ces classes de permutations conjuguées, il y en a qui vont jouer un rôle plus spécialement important. L'auteur désigne par $[\alpha]$ une classe dont les permutations se décomposent en cycles tous d'ordre impair. S'il y a α_1 cycles d'ordre 1, α_3 d'ordre 3, etc., il pose

$$[\alpha] = [\alpha_1, \alpha_3, \ldots] \quad \text{et} \quad \chi(P') = \chi_\alpha = \chi_{\alpha_1, \alpha_3, \ldots}.$$

Une telle classe contient

$$h_\alpha = \frac{n!}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\,3^{\alpha_3}\alpha_3!\ldots}$$

permutations et le groupe $\mathfrak{T}$ contient le même nombre d'éléments conjugués de P'. *Les nombres χ_α sont tous réels.*

L'auteur désigne par

$$(\nu) = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m),$$

une classe de permutations se décomposant en cycles d'ordres tous différents. Le nombre des classes (ν) est φ_n. Si $\chi(T)$ est ambige, le complément $\delta(B)$ est désigné par $\delta_{(\nu)}$ si B correspond à une permutation paire de la classe (ν).

V. *Sur les groupes homographiques qui appartiennent aux caractères des groupes* $\mathfrak{T}_n$ *et* $\mathfrak{S}_n$. — Le groupe homographique qui appartient à un caractère de seconde espèce de l'un des groupes $\mathfrak{T}_n$, $\mathfrak{S}_n$ est toujours isomorphe *holoédrique* du groupe correspondant $\mathfrak{S}_n$ ou $\mathfrak{U}_n$.

Pour que deux caractères de $\mathfrak{T}_n$ donnent naissance à deux groupes homographiques équivalents, il faut et il suffit que ces deux caractères soient associés. Si n est supérieur à 4, pour que deux caractères de $\mathfrak{S}_n$ donnent naissance à deux groupes homographiques équivalents, il faut et il suffit que ces caractères soient adjoints.

Il résulte de là que *si n est supérieur à 3 et différent de 6, le nombre des groupes homographiques irréductibles essentiellement distincts qui sont isomorphes au groupe* $\mathfrak{S}_n$ *et qui ne peuvent pas être écrits comme groupes de $n!$ substitutions linéaires homogènes, est égal à* ν_n. *Si n est supérieur à 4 et différent de 6 et de 7, le nombre correspondant pour* $\mathfrak{U}_n$ *est aussi égal à* ν_n.

VI. *La représentation principale de seconde espèce du groupe* $\mathfrak{T}_n$. — L'auteur construit de la manière suivante un groupe homographique de degré $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ isomorphe de $\mathfrak{T}_n$.

Soient

$$A = (a_{\varkappa\lambda}) \qquad \text{et} \qquad B = (b_{\mu\nu})$$

deux matrices de degré p et q; il pose

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1p}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2p}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \dots & a_{pp}B \end{pmatrix};$$

$A \times B$ est ainsi une matrice de degré pq. Si C est une matrice de degré r, les deux matrices de degré pqr

$$(A \times B) \times C, \qquad A \times (B \times C)$$

sont égales et on les désigne par $A \times B \times C$. On peut continuer ainsi pour un nombre quelconque m de matrices. Si ces m matrices sont égales à A, on pose

$$A \times A \times \dots \times A = \Pi_m A.$$

On a enfin, dans le cas où A_i et B_i sont de même degré,

$$(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m)(B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m) = A_1B_1 \times A_2B_2 \times \dots \times A_mB_m.$$

L'auteur considère alors les quatre matrices

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et les matrices suivantes de degré 2^m :

$$M_1 = \Pi_m A, \qquad M_2 = \Pi_{m-1} A \times B, \qquad M_3 = \Pi_{m-1} A \times C, \qquad \dots,$$
$$M_{2\nu} = \Pi_{m-\nu} A \times B \times \Pi_{\nu-1} F, \qquad M_{2\nu+1} = \Pi_{m-\nu} A \times C \times \Pi_{\nu-1} F, \qquad \dots,$$
$$M_{2m} = B \times \Pi_{m-1} F, \qquad M_{2m+1} = C \times \Pi_{m-1} F.$$

On a entre ces matrices les relations

$$M_{2\nu}^2 = -E, \qquad M_{2\nu+1}^2 = E,$$
$$M_\varkappa M_\lambda = -M_\lambda M_\varkappa,$$
$$M_{2m+1} M_{2m} \ldots M_2 M_1 = E.$$

Cela étant, on prend $m = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ et l'on pose

$$T_\lambda = a_{\lambda-1} M_{\lambda-1} + b_\lambda M_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1),$$

où les coefficients a_λ, b_λ satisfont aux formules de récurrence

$$a_0 = 1, \qquad b_\lambda^2 - a_{\lambda-1}^2 = (-1)^\lambda, \qquad a_\lambda b_\lambda = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{2}.$$

Les matrices T satisfont alors aux relations

$$T_\alpha^2 = -E, \qquad (T_\beta T_{\beta+1})^4 = -E, \qquad T_\gamma T_\delta = -T_\delta T_\gamma \qquad (\delta \geqq \gamma + 2).$$

En posant enfin

$$J = -E,$$

les matrices J, $T_1, \ldots, T_n$ satisfont aux relations fondamentales qui définissent le groupe $\mathfrak{T}_n$. On a donc obtenu une représentation de seconde espèce de degré $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ du groupe $\mathfrak{S}_n$: c'est la *représentation principale* Δ_n. Elle est irréductible.

Le caractère $\chi(T)$ correspondant à la représentation principale se détermine grâce aux propriétés des matrices M_i.

Pour toute classe $[\alpha]$ *de permutations de* $\mathfrak{S}_n$ *se décomposant en* σ_α *cycles d'ordre impair, on a*

$$\chi_\alpha = 2^{\left[\frac{\sigma_\alpha - 1}{2}\right]}.$$

Si, de plus, n est pair, le caractère $\chi(T)$ *n'est pas ambige et il n'est différent de zéro que pour les classes* $[\alpha]$ *et pour la classe* (n) *des cycles d'ordre n : on a*

$$\chi(n) = \sqrt{(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2}}.$$

Si, au contraire, n est impair, le caractère $\chi(T)$ *est ambige; il n'est différent de zéro que pour les classes* $[\alpha]$ *et son complément* $\delta(B)$ *n'est différent de zéro que pour la classe paire* (n) *des cycles d'ordre n; on a*

$$\delta_{(n)} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}.$$

VII. *Sur le groupe* $\mathfrak{T}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$. — On peut, à l'aide du caractère qui vient d'être calculé, déterminer tous les autres caractères de seconde espèce du groupe $\mathfrak{T}_n$. L'auteur se sert pour cela de la considération de certains sous-groupes de $\mathfrak{T}_n$.

Soient $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ des entiers positifs dont la somme est égale à n. Soit S_α une permutation de $\mathfrak{S}_n$ n'échangeant que les chiffres

$$\nu_1 + \ldots + \nu_{\alpha-1} + 1, \quad \nu_1 + \ldots + \nu_{\alpha-1} + 2, \quad \ldots, \quad \nu_1 + \ldots + \nu_{\alpha-1} + \nu_\alpha.$$

Les $\nu_1!, \nu_2!, \ldots, \nu_m!$ permutations de la forme $S_1 S_2 \ldots S_m$ forment un sous-groupe $\mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ de $\mathfrak{S}_n$; celles d'entre elles qui sont paires forment un sous-groupe $\mathfrak{A}_{\nu_1, \ldots, \nu_m}$ d'ordre $\frac{1}{2}\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_m!$ A ces deux sous-groupes correspondent deux sous-groupes $\mathfrak{T}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ et $\mathfrak{B}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ de $\mathfrak{T}_n$ et de $\mathfrak{B}_n$; nous les désignerons pour abréger par les lettres $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{B}$; un élément quelconque de $\mathfrak{B}$ sera désigné par B et un élément de $\mathfrak{T}$ non contenu dans $\mathfrak{B}$ par C.

L'auteur démontre qu'on peut déterminer une représentation irréductible de seconde espèce de $\mathfrak{T}$ dès que l'on connaît une représentation $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ de chacun des groupes $\mathfrak{T}_{\nu_1}, \mathfrak{T}_{\nu_2}, \ldots, \mathfrak{T}_{\nu_m}$ qui engendrent $\mathfrak{T}$.

Supposons que parmi les m représentations Δ_α il y en ait r ambiges et $m - r = s$ non ambiges; on peut supposer que les r premières sont ambiges. Soient alors $\chi^{(\alpha)}$ le caractère correspondant à Δ_α et, pour $\alpha \leqq r$, $\delta^{(\alpha)}$ le complément de $\chi^{(\alpha)}$.

Cela étant, si s est impair, le caractère $\zeta(R)$ correspondant à la représentation considérée de $\mathfrak{T}$ n'est différent de zéro que si R est de la forme $B_1 B_2 \ldots B_m$ ou $B_1 \ldots B_r C_{r+1} \ldots C_{r+s}$. On a

$$\zeta(B_1 B_2 \ldots B_m) = 2^{\frac{s-1}{2}} \chi^{(1)}(B_1)\chi^{(2)}(B_2)\ldots\chi^{(m)}(B_m),$$

$$\zeta(B_1 \ldots B_r C_{r+1} \ldots C_{r+s}) = (2i)^{\frac{s-1}{2}} \delta^{(1)}(B_1)\ldots\delta^{(r)}(B_r)\chi^{(r+1)}(C_{r+1})\ldots\chi^{(r+s)}(C_{r+s}).$$

Si, au contraire, s est pair, $\zeta(R)$ n'est différent de zéro que si R a la forme $B_1 B_2 \ldots B_m$ et l'on a

$$\zeta(B_1 B_2 \ldots B_m) = 2^{\frac{s}{2}} \chi^{(1)}(B_1)\chi^{(2)}(B_2)\ldots\chi^{(m)}(B_m);$$

de plus le caractère $\zeta(R)$ est ambige, son complément $\tau_i(B)$ n'est différent de zéro que pour les éléments de la forme $B_1 \ldots B_r C_{r+1} \ldots C_{r+s}$ et l'on a

$$\tau_i(B_1 \ldots B_r C_{r+1} \ldots C_{r+s}) = (2i)^{\frac{s}{2}} \delta^{(1)}(B_1)\ldots\delta^{(r)}(B_r)\chi^{(r+1)}(C_{r+1})\ldots\chi^{(r+s)}(C_{r+s}).$$

L'auteur indique ce que deviennent ces résultats généraux quand on prend pour Δ_α la représentation principale de seconde espèce du groupe $\mathfrak{T}_\alpha$. Désignons par μ le nombre 0 ou 1, suivant que s ou, ce qui revient au même, $n - m$ est pair ou impair. On a alors, pour toute permutation P de $\mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ qui se décompose en σ cycles d'ordre impair,

$$\zeta(P) = 2^{\frac{\sigma - m + \mu}{2}}.$$

Si, de plus, les nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ ne sont pas tous distincts et si Q est une permutation de $\mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ qui se décompose en cycles d'ordres tous distincts, on a $\zeta(Q) = 0$, dans le cas où Q est impair et $\tau_i(Q) = 0$ dans le cas où $\mu = 0$ et Q est pair. Si, au contraire, les nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ sont tous distincts, les résultats précédents souffrent une exception dans le cas où la permutation Q se décompose en m cycles d'ordres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$; on a alors, pour $\mu = 1$ et

Q impair,

$$\zeta(Q') = \sqrt{(-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_m}{2}};$$

pour $\mu = 0$ et Q pair,

$$\eta(Q') = \pm \sqrt{(-1)^{\frac{n-m}{2}} \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_m}.$$

VIII. *Introduction de la notion de caractéristique.* — Le caractère $\zeta(R)$ de $\mathfrak{T}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ qui vient d'être déterminé permet de calculer un caractère de seconde espèce $\xi(T)$ de $\mathfrak{T}_n$. Il suffit pour cela d'appliquer un théorème de M. Frobenius qui permet de déduire de tout caractère simple d'un sous-groupe de $\mathfrak{G}$ un caractère de $\mathfrak{G}$. En appliquant ici ce théorème, on arrive aux résultats suivants :

Si la permutation P appartient à la classe

$$[\alpha] = [\alpha_1, \alpha_3, \ldots],$$

on a

$$\xi(P') = c_\alpha 2^{\frac{\sigma_\alpha - m + \mu}{2}} \qquad (\sigma_\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots),$$

où μ est égal à 0 ou à 1 suivant que $n - m$ est pair ou impair, et où c_α désigne le nombre

$$c_\alpha = \sum \frac{\alpha_1!}{\alpha_{11}!\,\alpha_{12}!\ldots} \frac{\alpha_3!}{\alpha_{31}!\,\alpha_{32}!\ldots}, \qquad \ldots.$$

La sommation est étendue à toutes les solutions des équations

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{11} + \alpha_{12} + \ldots, & \alpha_3 &= \alpha_{31} + \alpha_{32} + \ldots, & &\ldots, \\ \nu_1 &= \alpha_{11} + 3\alpha_{31} + \ldots, & \nu_2 &= \alpha_{12} + 3\alpha_{32} + \ldots, & &\ldots, \end{aligned}$$

si ces équations n'admettent pas de solution, c_α est nul. Si, de plus, μ est nul ou si $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ ne sont pas distincts, $\xi(P')$ est nul pour toutes les permutations impaires. Si, au contraire, $\mu = 1$ et si en outre $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ sont tous distincts, on a, pour la classe $(\nu) = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$,

$$\xi_{(\nu)} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_m}{2}};$$

pour toutes les autres classes impaires $\xi_{(\lambda)}$ est nul.

Si $\mu = 0$ le caractère $\xi(T)$ est ambige. Son complément $\delta(B)$ est nul pour tous les éléments B si $\nu_1, \nu, \ldots, \nu_m$ ne sont pas tous distincts. Si, au contraire, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ sont tous distincts, il y a exception pour la classe paire $(\nu) = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$: on a

$$\delta_{(\nu)} = \pm \sqrt{(-1)^{\frac{n-m}{2}} \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_m}.$$

L'auteur introduit ici une notion nouvelle, celle de *caractéristique*. Soit $\chi(T)$ un caractère quelconque de seconde espèce de $\mathfrak{T}_n$, et soit la somme

$$\Phi = \sum \frac{\chi(\alpha_1, \alpha_1, \ldots)}{1^{\alpha_1} \alpha_1!\, 3^{\alpha_3} \alpha_3! \ldots} 2^{\frac{\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots}{2}} s_1^{\alpha_1} s_3^{\alpha_3} \ldots,$$

étendue à toutes les classes $[\alpha]$ de $\mathfrak{S}_n$, s_i désignant la somme des puissances $i^{\text{èmes}}$ de $r \geq n$ variables auxiliaires $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Cette fonction symétrique de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ s'appelle la *caractéristique* correspondant au caractère $\chi(T)$; la caractéristique est simple si le caractère est simple.

Le *complément* de la caractéristique Φ est le système de nombres $\chi_{(\nu)}$ si le caractère n'est pas ambige, le système de nombres $\delta_{(\nu)}$ si le caractère est ambige.

Les caractéristiques des caractères $\xi(T)$, précédemment déterminés, prennent une forme particulièrement simple si l'on introduit certaines fonctions symétriques q_α des x, définies par l'identité en z

$$\frac{(1+x_1 z)(1+x_2 z)\ldots(1+x_r z)}{(1-x_1 z)(1-x_2 z)\ldots(1-x_r z)} = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots \qquad (q_0 = 1).$$

En désignant par ε le nombre 0 ou le nombre 1 suivant que n est impair ou pair, la caractéristique correspondant au caractère principal est alors $2^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} q_n$. De même la caractéristique correspondant au caractère $\xi(T)$ fourni par la considération du groupe $\mathfrak{A}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ est

$$2^{-\frac{m+\mu}{2}} q_{\nu_1} q_{\nu_2} \ldots q_{\nu_m}.$$

Il existe exactement v_n caractéristiques simples de $\mathfrak{A}_n$, soit

$$\Phi^{(1)}, \quad \Phi^{(2)}, \quad \ldots, \quad \Phi^{(v_n)}.$$

Désignons par $\Phi_1^{(\rho)}$ ce que devient la caractéristique $\Phi^{(\rho)}$ quand on y remplace $x_1, \ldots, x_r$ par r nouvelles variables $x'_1, \ldots, x'_r$. Soit enfin $\varepsilon_\rho = 0$ ou 1 suivant que $\chi^{(\rho)}(T)$ est ambige ou non. On a la relation remarquable

$$\sum_\rho 2^{\varepsilon_\rho} \Phi^{(\rho)} \Phi_1^{(\rho)} = q_n(xx').$$

Réciproquement, si l'on a v_n caractéristiques (non nulles) $\Psi^{(\rho)}$, simples ou composées, du groupe $\mathfrak{A}_n$ et si l'on a la relation

$$\sum_\rho 2^{\eta_\rho} \Psi^{(\rho)} \Psi_1^{(\rho)} = q_n(xx'),$$

où η_ρ est égal à 0 ou à 1 suivant que la caractéristique $\Psi^{(\rho)}$ est ambige ou non; les fonctions $\Phi^{(\rho)}$ coïncident, au signe près et abstraction faite de leur ordre, avec les caractéristiques simples $\Phi^{(\rho)}$.

IX. *Sur les fonctions* $Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$. — Entre les quantités q_i introduites précédemment existent les relations

$$q_\nu - q_1 q_{\nu-1} + q_2 q_{\nu-2} - \ldots + (-1)^\nu q_\nu = 0,$$

valables pour toutes les valeurs positives de ν. L'auteur pose

$$Q_{\varkappa,\lambda} = -Q_{\lambda\varkappa} = q_\varkappa q_\lambda - 2 q_{\varkappa+1} q_{\lambda-1} + 2 q_{\varkappa+2} q_{\lambda-2} - \ldots + (-1)^\lambda 2 q_{\varkappa+\lambda}$$

et introduit les quantités $Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ définies, pour m pair, par les formules

$$Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} = Q_{\nu_1, \nu_2} Q_{\nu_3, \nu_4, \ldots, \nu_m} - Q_{\nu_1, \nu_3} Q_{\nu_2, \nu_4, \ldots, \nu_m} + \ldots + Q_{\nu_1, \nu_m} Q_{\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{m-1}};$$

pour m impair, par les formules

$$Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} = q_{\nu_1} Q_{\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_m} - q_{\nu_2} Q_{\nu_1, \nu_3, \ldots, \nu_m} + \ldots + q_{\nu_m} Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{m-1}};$$

il pose enfin

$$Q_{\nu_1} = q_{\nu_1}.$$

L'expression $Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ est une fonction symétrique entière des variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$, homogène et de degré $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m$. On peut la mettre sous la forme

$$Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} = 2^m \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}^{r} \frac{x_{\alpha_1}^{\nu_1} x_{\alpha_2}^{\nu_2} \ldots x_{\alpha_m}^{\nu_m}}{p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \ldots p_{\alpha_m}} A(x_{\alpha_m}, x_{\alpha_{m-1}}, \ldots, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_1}),$$

où l'on a posé

$$p_\alpha = \frac{(x_\alpha - x_1) \ldots (x_\alpha - x_{\alpha-1})(x_\alpha - x_{\alpha+1}) \ldots (x_\alpha - x_r)}{(x_\alpha + x_1) \ldots (x_\alpha + x_{\alpha-1})(x_\alpha + x_{\alpha+1}) \ldots (x_\alpha + x_r)}$$

et

$$A(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \prod_{\varkappa \quad \lambda} \frac{u_\varkappa - u_\lambda}{u_\varkappa + u_\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

A chaque décomposition de n en une somme d'entiers tous distincts,

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m,$$

l'auteur fait correspondre la fonction $Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$. Soient $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \ldots, Q^{(\nu_n)}$ les ν_n fonctions ainsi obtenues; $m_1, m_2, \ldots, m_{\nu_n}$ les valeurs correspondantes du nombre m. On a la relation importante

$$q_n(xx') = \frac{1}{2^{m_1}} Q^{(1)} Q_1^{(1)} + \frac{1}{2^{m_2}} Q^{(2)} Q_1^{(2)} + \ldots + \frac{1}{2^{m_{\nu_n}}} Q^{(\nu_n)} Q_1^{(\nu_n)}.$$

X. *Détermination des caractères simples des groupes* $\mathfrak{C}_n$ *et* $\mathfrak{G}_n$. — A la $\nu^{\text{ième}}$ décomposition de n en une somme d'entiers tous distincts, l'auteur fait correspondre la fonction

$$\Psi^{(\nu)} = \frac{1}{2^{\frac{m+\mu}{2}}} Q^{(\nu)},$$

où μ est égal à 0 ou à 1 suivant que $n - m$ est pair ou impair. Il démontre que cette fonction est une caractéristique de $\mathfrak{C}_n$. En posant alors $\mu = \eta_\nu$, on a la relation

$$q_n(xx') = \sum_{\nu=1}^{\nu_n} 2^{\eta_\nu} \Psi^{(\nu)} \Psi_1^{(\nu)},$$

qui montre que les ν_n expressions $\Psi^{(\nu)}$, abstraction faite de leurs signes, coïncident avec les ν_n caractéristiques simples $\Phi^{(\nu)}$ de $\mathfrak{C}_n$. La considération du coefficient de s_1^n, qui est positif dans $\Psi^{(\nu)}$ ainsi que dans $\Phi^{(\nu)}$, montre que les $\Psi^{(\nu)}$ sont identiques aux $\Phi^{(\nu)}$. La manière dont ces fonctions sont construites

montre de plus que les χ_α *sont des nombres entiers rationnels*. On voit de plus que les caractères ainsi obtenus coïncident avec les caractères précédemment déterminés par la considération des groupes $\mathfrak{C}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ où l'on suppose $\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_m$.

En définitive, à chaque décomposition

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m \qquad (\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_m > 0)$$

du nombre n en une somme d'entiers tous distincts correspond un caractère simple de seconde espèce $\mathfrak{C}_n$. Le degré de ce caractère est

$$f_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} = 2^{\frac{n-m}{2}} \frac{n!}{\nu_1! \, \nu_2! \ldots \nu_m!} \prod_{\alpha > \beta} \frac{\nu_\alpha - \nu_\beta}{\nu_\alpha + \nu_\beta}.$$

A chaque décomposition considérée correspond une représentation de $\mathfrak{U}_n$ par un groupe homographique de degré $\frac{1}{2} f_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ si $n - m$ est pair, de degré $f_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ si $n - m$ est impair.

Les degrés f sont donnés, pour les valeurs les plus faibles de n par le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll} n = 4, & f_4 = 2, & f_{31} = 4; & \\ n = 5, & f_5 = 4, & f_{41} = 6, & f_{32} = 4; \\ n = 6, & f_6 = 4, & f_{51} = 6, & f_{42} = 20, \quad f_{321} = 4. \end{array}$$

Pour $n > 6$, le plus petit des degrés est $f_n = 2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ et chaque autre degré est supérieur à $2 f_n$. Le plus petit degré du groupe linéaire et homogène qui représente $\mathfrak{C}_n$ est au contraire $n - 1$ et tous les autres sont, si $n > 6$, supérieurs à $2(n-1)$.

Si $n = 4$, les deux groupes homographiques de degrés $f_4 = 2$ et $\frac{1}{2} f_{31} = 2$ qui représentent $\mathfrak{U}_n$ sont identiques. Pour $n = 6$, les deux groupes homographiques de degré $f_6 = 4$ et $f_{321} = 4$ sont aussi identiques.

XI. *Les groupes alternés de six et de sept lettres.* — Dans le cas des groupes $\mathfrak{U}_6$ et $\mathfrak{U}_7$, les groupes de représentation ne sont plus les groupes $\mathfrak{O}_6$ et $\mathfrak{O}_7$.

Le groupe de représentation $\mathfrak{S}_6$ du groupe $\mathfrak{U}_6$ est d'ordre 6.360 et est défini par les relations

$$C_1^4 = C_2^2 = C_3^2 = C_4^2 = (C_1 C_2)^3 = (C_1 C_3)^2 = (C_2 C_3)^3 = (C_3 C_4)^3 = K^3,$$
$$(C_1 C_4)^2 = K, \qquad C_2 C_4 = K^3 C_4 C_2, \qquad K C_\alpha = C_\alpha K, \qquad K^6 = E.$$

Les éléments C_1, C_2, C_3, C_4 correspondent respectivement aux permutations

$$A_1 = (123), \qquad A_2 = (12)(34), \qquad A_3 = (12)(45), \qquad A_4 = (12)(56).$$

Les 360 permutations de $\mathfrak{U}_6$ se décomposent en 7 classes d'éléments conjugués, représentées par les permutations

$$E, \qquad A = A_1 = (123), \qquad B = A_1 A_4 A_3 = (123)(456), \qquad C = A_2 = (12)(34),$$
$$D = A_3 A_3 A_2 = (12)(3456), \qquad F = A_3 A_2 A_1 = (12345) \qquad F^2 = (13524).$$

Quant aux 6.360 éléments de $\mathfrak{S}_6$, ils se partagent en 31 classes d'éléments conjugués

$$K^\alpha,\quad (A^\alpha),\quad (KA^\alpha),\quad (B^\alpha),\quad (KB^\alpha),\quad (C^\alpha),\quad (KC^\alpha),\quad (K^2C^\alpha),\quad (K^\alpha D^\alpha),$$
$$(K^\alpha F^\alpha),\quad (K^\alpha F^{\alpha 2}),$$

où α prend toutes les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Pour chaque caractère simple de $\mathfrak{S}_6$, on a

$$\chi(K^\alpha R) = \sigma^{\alpha\gamma}\chi(R) \qquad \left(\sigma = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Si l'on désigne par l_γ le nombre des caractères simples pour lesquels $\chi(K) = \sigma^\gamma\chi(E)$, on trouve

$$l_0 = 7,\quad l_1 = l_4 = 4,\quad l_2 = l_5 = 5,\quad l_3 = 6.$$

L'auteur indique ces différents caractères.

Le groupe alterné $\mathfrak{A}_7$ admet de même un groupe de représentation $\mathfrak{S}_3$ d'ordre 6. $\frac{7!}{2}$ qui peut être défini par les relations

$$C_1^4 = C_2^2 = C_3^2 = C_4^2 = C_5^2 = K^3,\qquad K^6 = E,\qquad KC_\alpha = C_\alpha K,$$
$$(C_1C_2)^3 = (C_1C_3)^2 = (C_1C_4)^2 = (C_2C_3)^3 = (C_3C_4)^3 = (C_4C_5)^3 = K^3,$$
$$(C_1C_5)^2 = K,\qquad C_2C_4 = K^3C_4C_2,\qquad C_2C_5 = K^3C_5C_2,\qquad C_3C_5 = K^3C_5C_3.$$

Ce groupe comprend 40 classes d'éléments conjugués. Si l'on désigne par l_γ le nombre de ceux des 40 caractères simples pour lesquels $\chi(K) = \sigma^\gamma\chi(E)$, on trouve

$$l_0 = 9,\quad l_1 = l_4 = 5,\quad l_2 = l_5 = 7,\quad l_3 = 7.$$

La détermination des caractères de $\mathfrak{A}_6$ et de $\mathfrak{A}_7$, une fois effectuée, entraîne la connaissance des groupes homographiques qui leur sont isomorphes :

Tout groupe homographique isomorphe de $\mathfrak{A}_\nu$ ($\nu = 6, 7$) peut s'écrire comme groupe de $m\frac{\nu!}{2}$ substitutions linéaires et homogènes, où m est un des nombres 1, 2, 3, 6. *Parmi les groupes irréductibles, il n'y en a que* 13, *pour $\nu = 6$, et* 23, *pour $\nu = 7$, essentiellement différents. Les degrés de ces groupes homographiques sont indiqués dans le Tableau suivant :*

Groupe $\mathfrak{A}_6$.

$m = 1$.	$m = 2$.	$m = 3$.	$m = 6$.
5, 8, 9, 10	4, 8, 10	3, 6, 9, 15	6, 12

Groupe $\mathfrak{A}_7$.

$m = 1$.	$m = 2$.	$m = 3$.	$m = 6$.
6, 10, 14, 15, 21, 35	4, 14, 20, 20, 36	6, 15, 15, 21, 24, 24	6, 24, 24, 36

Le groupe homographique isomorphe de $\mathfrak{A}_6$ de degré 3, pour lequel $m = 3$, est le groupe de Valentiner. L'auteur indique explicitement les deux groupes de degré 6 isomorphes de $\mathfrak{A}_7$ et pour lesquels $m = 3$ et $m = 6$.

Koebe (Paul). — Sur l'uniformisation des courbes analytiques quelconques. — Deuxième Partie : Les problèmes centraux d'uniformisation. (251-292).

La première Partie de ce Mémoire a paru dans le même Journal (t. CXXVIII). Dans cette seconde Partie, l'auteur, en s'appuyant sur le principe général d'uniformisation, établi précédemment, se propose de déterminer les transcendantes d'uniformisation $t(x, y)$ appartenant à une courbe analytique quelconque (x, y), pour lesquelles les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions uniformes automorphes possédant un cercle limite ou un cercle de symétrie; on peut alors, en réduisant ce cercle à l'axe réel, faire en sorte que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ restent invariantes par un groupe de substitutions linéaires réelles : ce sont les fonctions *fuchsoïdes* de M. Poincaré. Au fond, l'auteur a pour but d'établir, sur des bases plus précises, les théorèmes généraux d'uniformisation énoncés dans sa première Communication : *Sur l'uniformisation des courbes analytiques quelconques* (*Göttinger Nachrichten*, 1907), théorèmes qui se rapportent en partie à des courbes analytiques *réelles ou complexes* quelconques, en partie à des courbes analytiques exclusivement *réelles*. Ces théorèmes constituent une extension des théorèmes d'uniformisation des courbes analytiques établies dans son Mémoire des *Math. Ann.* (t. LXVII, 1909), en particulier du théorème fondamental, du cercle limite découvert par M. Klein et M. Poincaré.

D'une manière plus précise, les problèmes qui font l'objet du présent Mémoire sont les problèmes d'uniformisation pour lesquels les groupes de substitutions linéaires proprement discontinus peuvent être regardés comme des groupes de mouvement discontinus de la Géométrie absolue (riemannienne, euclidienne, Jobatschefskyenne). Inversement, l'uniformisation donne un moyen de déterminer tous les groupes de mouvement discontinus de la Géométrie non euclidienne.

1. *Énoncé des problèmes de l'uniformisation centrale.* — Soit (x, y) une courbe analytique quelconque, réelle ou complexe, F la surface de Riemann correspondant à la fonction analytique $y(x)$. Soit $\tau(x, y)$ une fonction définie en tous les points (x, y) de F et ayant en chaque point le caractère d'une fonction rationnelle de x, y; une telle fonction est en général, par rapport à F, infiniment multiforme. Le premier problème, dont l'auteur s'occupe, est le suivant :

Problème A. — *Déterminer une fonction $t(x, y)$ jouissant des propriétés suivantes : La fonction $t(x, y)$ doit appartenir à la classe des fonctions $\tau(x, y)$; de plus, chaque fonction $\tau(x, y)$ doit être une fonction uniforme de t; en particulier, x et y doivent être des fonctions uniformes de t.*

Pour arriver à l'énoncé du second problème, l'auteur imagine, marqués sur la surface F, une infinité de points (*singuliers*) n'ayant aucun point limite à l'intérieur de F et formant, par conséquent, un ensemble dénombrable M. Soit $\tau'(x, y)$ une fonction définie sur F, possédant en tous les points de F, qui ne font pas partie de M, le caractère d'une fonction rationnelle de x, y, pouvant, au contraire, en chaque point de M, être ramifiée, l'ordre de ramification étant donné à l'avance. Le second problème est alors le suivant :

PROBLÈME B. — *Déterminer une fonction $t'(x, y)$ appartenant à la classe des fonctions $\tau'(x,y)$ et telle que chaque fonction $\tau'(x,y)$ soit une fonction uniforme de t'.*

Considérons maintenant une courbe analytique *réelle* (x, y). Une telle courbe possède un certain nombre, fini ou infini, de branches réelles, en partie ouvertes, en partie fermées. Soit F_s la surface de Riemann correspondante : elle admet l'axe réel comme axe de symétrie. Aux branches réelles de la courbe (x,y) correspondent sur la surface F_s certaines lignes, en partie ouvertes, en partie fermées, que nous désignerons sous le nom de *lignes de symétrie* de la surface. Considérons alors la classe de toutes les fonctions $\tau_s(x, y)$ qui appartiennent à la classe des fonctions $\tau(x, y)$ et qui, de plus, ne prennent que des valeurs *réelles* sur les lignes de symétrie de F_s.

L'auteur énonce alors le problème suivant :

PROBLÈME C. — *Déterminer une fonction $t_s(x, y)$ appartenant à la classe des fonctions τ_s et telle que toute fonction τ_s soit une fonction uniforme de t_s.*

Si l'on se donne maintenant sur la surface F_s un ensemble M de points, deux à deux conjugués, avec des nombres de ramification égaux pour deux points conjugués, on arrive au

PROBLÈME D. — *Déterminer une fonction $t'_s(x,y)$ appartenant à la classe des fonctions τ'_s et telle que toute fonction τ'_s soit une fonction uniforme de t'_s.*

Enfin on peut, parmi toutes les lignes de symétrie de F_s, en considérer seulement une partie qui constituera l'ensemble des *lignes de réalité* de F_s. Ces lignes seront choisies de manière qu'aucun point intérieur d'une ligne de symétrie de F_s ne soit un point limite des lignes de réalité : une ligne de symétrie fermée ne peut ainsi contenir qu'un nombre fini de lignes de réalité différentes. Soit $\tau''_s(x,y)$ une fonction appartenant à la classe des fonctions τ' et ne prenant que des valeurs réelles sur chaque ligne de F_s. Il faut ici supposer qu'aucun point de l'ensemble M ne soit sur une ligne de réalité, à moins d'être à l'extrémité d'une de ces lignes; dans ce cas, l'ordre de ramification correspondant devra être égal à 2. On arrive alors au

PROBLÈME E. — *Déterminer une fonction $\tau''_s(x, y)$ appartenant à la classe des fonctions τ''_s et telle que toutes les fonctions τ''_s soient des fonctions uniformes de t''_s.*

2. *La nature des surfaces de recouvrement Φ, Φ', Φ_s, Φ'_s, Φ''_s et le théorème d'unité.* — L'auteur commence par démontrer que les surfaces de recouvrement Φ, Φ' qui correspondent aux fonctions t, t' sont *simplement connexes;* que, de plus, les surfaces Φ_s, Φ'_s, Φ''_s qui correspondent aux fonctions t_s, t'_s, t''_s, se *décomposent en deux moitiés simplement connexes symétriques* si on les imagine découpées suivant leurs lignes de réalité.

La fonction $t(x, y)$ est alors complètement déterminée par ses propriétés, à une réduction près à une forme normale. Pour opérer cette réduction, il suffit de réduire à une forme normale le domaine T (à un seul feuillet) de l'ensemble des valeurs de t. Deux cas sont à distinguer :

a. Le domaine T est formé de tout le plan, à l'exclusion d'un point et un seul. Dans ce cas, on a le domaine T normal en rejetant le point exclu à l'infini.

b. Le domaine T est limité par une ligne connexe. Dans ce cas, on obtient le domaine T normal en ramenant le contour à être une circonférence (surface d'un cercle) ou l'axe réel (demi-plan supérieur).

Les deux cas précédents peuvent être désignés sous le nom de :

a. Cas euclidien;
b. Cas non euclidien.

Le domaine T ayant ainsi été ramené à une forme normale, la fonction t n'est pas encore complètement déterminée. Dans le cas euclidien, on peut prendre à la place de t toute fonction linéaire entière de t. Dans le cas non euclidien, on peut prendre à la place de t toute fonction linéaire de t qui laisse invariante la surface du cercle, ou qui laisse invariant le demi-plan supérieur; dans ce dernier cas, on peut remplacer t par une fonction linéaire réelle de t.

En particulier, deux branches de la fonction $t(x, y)$ sont reliées entre elles par une substitution linéaire laissant invariant le domaine normal T.

Les résultats précédents peuvent s'étendre à la fonction t'. La fonction de Riemann correspondante Φ' (relative à F) est simplement connexe. Elle a en chacun des points singuliers de l'ensemble M, et dans tous ses feuillets relatifs, des points de ramification d'ordre $n-1$, si n est le nombre de ramification correspondant. La fonction $t'(x, y)$ est complètement déterminée à une substitution linéaire près, après réduction du domaine T' à une forme normale. En particulier, deux branches de t' sont reliées entre elles par une substitution linéaire.

En ce qui concerne la surface Φ_s, l'auteur commence par démontrer que la surface F_s, après avoir été découpée le long de ses lignes de symétrie, ou bien est décomposée en deux moitiés simplement connexes, ou bien reste connexe dans son ensemble; autrement dit, elle est, d'après les dénominations dues à M. Klein, ou bien *orthosymétrique,* ou bien *diasymétrique.* La surface Φ_s se compose alors de deux moitiés symétriques simplement connexes $\Phi_{s,1}$ et $\Phi_{s,2}$. La fonction $t_s(x, y)$ est déterminée à une substitution linéaire près, après réduction du domaine T_s à une forme normale.

Des théorèmes analogues existent pour les surfaces Φ'_s et Φ''_s, pour les fonctions t'_s et t''_s.

3. *Construction des surfaces* Φ, Φ', Φ_s, Φ'_s, Φ''_s. — L'auteur se sert d'un procédé analogue à celui dont il s'est servi au paragraphe 2 de la première Partie, en considérant la surface F comme limite de surfaces F_n à un nombre fini de feuillets et d'un ordre fini de connexions. Ce procédé est un peu modifié pour pouvoir arriver à une surface Φ simplement connexe.

4. *Existence des transcendantes d'uniformisation cherchées. Groupe correspondant.* — L'existence des fonctions t, t', résulte des théorèmes généraux établis dans la première Partie. L'ensemble des substitutions linéaires qui transforment entre elles les différentes branches de ces fonctions forme un groupe proprement discontinu dans le domaine T. On peut indiquer pour ce groupe un domaine fondamental, à chaque couple de côtés duquel correspond

une substitution génératrice déterminée du groupe. On obtient ainsi un système de substitutions génératrices indépendantes.

Les groupes correspondant aux fonctions t_s, t'_s, t''_s, sont formés de substitutions linéaires réelles. Ces groupes contiennent des substitutions à déterminant négatif : pour t_s et t'_s, si la surface F_s est diasymétrique; pour t''_s lorsque la substitution elliptique correspond à une extrémité d'une ligne de réalité a un déterminant négatif.

5. *L'alternative du cas euclidien et non euclidien.* — Si la surface F est simplement connexe, la surface Φ est identique à F. La question de savoir si une surface *simplement connexe* B admet une représentation conforme sur le plan entier ou sur un cercle, peut être résolue dans certains cas particuliers. Si, par exemple, le domaine B admet comme frontière une portion de ligne telle que B puisse être imaginée prolongée au delà de cette portion de ligne en une surface $\overline{B}$ simplement connexe, B admet toujours une représentation conforme sur la surface d'un cercle. Il en est de même pour une aire simplement connexe, pouvant avoir une infinité de feuillets, mais laissant à découvert une portion à deux dimensions du plan. Il en est de même encore, comme M. Poincaré l'a démontré, lorsque la surface laisse à découvert au moins trois points du plan.

Si la surface F est doublement connexe, on peut d'abord en faire une représentation conforme sur un anneau circulaire à un seul feuillet. Si les deux cercles frontières sont des points, on peut faire la représentation conforme de Φ sur le plan tout entier (à l'exclusion du point ∞), sinon sur la surface d'un cercle.

Si la connexion de F est supérieure à 2, c'est toujours le cas non euclidien qui se présente.

Il existe pour t' des théorèmes analogues. En particulier, le cas non euclidien se présente toujours si F est de connexion supérieure ou égale à trois.

6. *Le cas des courbes algébriques : construction des surfaces Φ; l'alternative du cas euclidien et du cas non euclidien.* — Les théories précédentes supposaient la surface F ouverte et ne s'appliquent donc pas immédiatement à la théorie de l'uniformisation des courbes algébriques. L'auteur indique les modifications qu'il faut faire dans ce cas subir à la théorie générale. Si l'on fait abstraction des cas bien connus pour lesquels la fonction t (ou t') est élémentaire ou est l'intégrale elliptique de première espèce, ou est une fonction s de Schwarz, on est toujours pour $t\,(p \geqq 2)$ et pour $t'\,(p \geqq 0)$ dans le cas non euclidien. On retrouve ainsi le théorème du cercle limite dû à MM. Klein et Poincaré.

7. *Relations des problèmes d'uniformisation centrale avec les groupes de mouvement discontinus non euclidiens.* — L'auteur démontre que tout groupe de mouvement discontinu de la Géométrie absolue peut être obtenu en partant d'un problème d'uniformisation. La démonstration est d'ailleurs immédiate dans le cas de la Géométrie riemannienne.

Remak (*R.*). — Sur la décomposition des groupes finis en facteurs non directement décomposables. (293-308).

Le produit de deux sous-groupes d'un groupe fini est dit *direct* si chaque élément de l'un des groupes est échangeable avec chaque élément de l'autre et si les deux groupes ne contiennent d'autre élément commun que l'élément unité E. Un groupe est dit non directement décomposable lorsqu'il ne peut pas être regardé comme le produit direct de deux facteurs différents de E. L'auteur se propose de démontrer que la décomposition d'un groupe en un produit direct de facteurs n'est possible que d'une seule manière, à l'isomorphisme près des facteurs; mais il s'agit ici d'un isomorphisme particulier.

L'auteur dit que deux sous-groupes A et B de H ont un *isomorphisme central* en H si à tout élément de A correspond un élément et un seul de B et réciproquement, et si de plus tout élément de A est le produit de l'élément correspondant de B par un élément invariant de H, c'est-à-dire par un élément appartenant au *centre* H_i de H. L'isomorphisme central de H avec lui-même est dit *automorphisme central* de H. Le théorème que l'auteur démontre est alors le suivant :

Si un groupe fini H *est décomposé de deux manières différentes en un produit direct de facteurs non directement décomposables, il existe un automorphisme central de* H *qui fait correspondre à chaque facteur de la première décomposition un facteur et un seul de la seconde.*

Ce théorème a déjà été démontré, pour les groupes commutatifs, par MM. Frobenius et Stickelberger.

Dans le paragraphe 1, l'auteur démontre certains théorèmes préliminaires. Le théorème lui-même est démontré dans le paragraphe 2. Dans le paragraphe 3, l'auteur énonce et démontre le théorème complémentaire suivant :

Dans une décomposition d'un groupe en facteurs non directement décomposables, on peut remplacer le produit de tous les facteurs commutatifs par le produit correspondant d'une autre décomposition; on peut aussi remplacer tout facteur non commutatif par celui des facteurs d'une autre décomposition qui lui est isomorphe central.

Mirimanoff (*P*). — Sur le dernier théorème de Fermat. (309-324).

Le grand théorème de Fermat a été abordé depuis quelque temps par des côtés nouveaux. Outre les remarquables recherches de M. E. Dickson, publiées dans le *Messenger of Mathematics* (mai et juin 1908) et le *Quarterly Journal* (octobre 1908), il faut citer celles de M. A. Wieferich qui a découvert un théorème important (même Journal, t. CXXXVI). Voici l'énoncé du théorème de M. Wieferich :

Si l'équation

$$x^p + y^p + z^p = 0 \tag{1}$$

est possible en nombres entiers premiers à p, le quotient de Fermat

$$q(2) = \frac{2^{p-1} - 1}{p}$$

est divisible par p.

Était-il possible de simplifier le résultat obtenu par M. Wieferich? Il importait avant tout de simplifier la démonstration du géomètre allemand. Ce

premier pas a été fait par M. Frobenius (même Journal, t. CXXXVII). Il restait à généraliser les principes de ces démonstrations.

Or, toutes les recherches se rattachant au théorème de M. Wieferich sont basées sur un criterium donné par Kummer et qui est le suivant :

Posons

$$\varphi_i(t) = t - 2^{i-1}t^2 + 3^{i-1}t^3 - \ldots - (p-1)^{i-1}t^{p-1},$$

et supposons que l'équation (1) admette une solution x, y, z première à p. Chacun des six rapports

$$(2) \qquad \frac{x}{y}, \quad \frac{z}{y}, \quad \frac{x}{z}, \quad \frac{y}{x}, \quad \frac{y}{z}, \quad \frac{z}{x}$$

vérifie alors le système des $\frac{p-1}{2}$ congruences

$$(3) \qquad \begin{cases} B_i\varphi_{p-i}(t) \equiv 0 \pmod{p} & \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{p-3}{2}\right), \\ \varphi_{p-1}(t) \equiv 0 \pmod{p}, \end{cases}$$

B_i étant le $i^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli.

Les six rapports (2) annulent donc $(\bmod p)$ tout polynome $F(t)$ qu'on peut mettre sous la forme

$$\sum_i X_{p-i}B_i\varphi_{p-i}(t) + X_{p-1}\varphi_{p-1}(t),$$

les coefficients X étant des fonctions entières de t à coefficients entiers $(\bmod p)$.

Et le résultat principal, obtenu par M. Wieferich, se résume en ceci : on peut choisir les polynomes X de telle manière que le polynome $F(t)$ se réduise, abstraction faite de facteurs qu'on a le droit d'écarter, à $2q(2) \pmod{p}$.

L'auteur a cherché à généraliser ce résultat. Dans une Note insérée dans les *Comptes rendus* (24 janvier 1910), il a montré en partant du développement de $\frac{x}{e^x - 1}$ qu'à tout entier m premier à p on pouvait faire correspondre un polynome du type $F(t)$ de degré $m-2$ et se réduisant, pour $t = -1$, à $(-1)^m mq(m) \pmod{p}$. Le criterium de M. Wieferich s'en déduit en faisant $m = 2$, et l'on obtient le nouveau criterium $q(3) \equiv 0$ en faisant $m = 3$. Mais les critères deviennent moins simples pour $m > 3$.

M. Frobenius a montré tout récemment qu'on pouvait arriver aux mêmes résultats par une voie plus élémentaire. L'auteur pense cependant qu'il n'est pas inutile de revenir sur les résultats de son travail en indiquant quelques-unes des conséquences qu'il avait dû laisser de côté dans sa Note des *Comptes rendus*.

1. *Transformation du système* (3). — En désignant par τ le rapport $\frac{x}{y}$, les six rapports (2) s'écrivent

$$\tau, \quad -1 - \tau, \quad -\frac{\tau}{1+\tau}, \quad \frac{1}{\tau}, \quad -\frac{1}{1+\tau}, \quad -1 - \frac{1}{\tau};$$

ils se réduisent à deux si τ est racine de

$$t^2 + t + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

à trois si τ est l'un des nombres $1, -2, -\frac{1}{2} \pmod{p}$.

En posant

$$\psi_i(t) = \varphi_i(-1-t),$$

on a

$$\psi_{p-1}(t) \equiv \varphi_{p-1}(t) \pmod{p}.$$

Le polynome $\varphi_{p-1}(t)$ ou $\psi_{p-1}(t)$ peut s'obtenir en prenant les $p-1$ premiers termes de la série

$$l(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots;$$

la série $l^{\varkappa}(1+t)$ arrêtée au terme en t^{p-1}, donne, si $\varkappa < p-1$, un polynome congru à $\varkappa!\,\psi_{p-\varkappa}(t)$.

2. *Principe fondamental.* — Il résulte de la propriété précédente le théorème suivant. Soit une fonction $f(x, e^x)$ développable suivant les puissances de x au voisinage de $x = 0$:

$$f(x, e^x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i + \ldots.$$

Supposons que pour $i < p-1$, les a_i soient rationnels et que leurs dénominateurs ne soient pas divisibles par p. Posons alors

$$e^x = 1 + t,$$

d'où

$$x = l(1+t).$$

Le développement de $f(x, e^x)$, arrêté au terme en t^{p-1}, fournit un polynome $P(t)$. On a la congruence

$$P(t) \equiv a_0 + a_1 \psi_{p-1}(t) + 2!\, a_2 \psi_{p-2}(t) + \ldots + (p-2)!\, a_{p-2} \psi_2(t) + a_{p-1} t^{p-1}.$$

En particulier, on peut partir de la fonction $\frac{x}{e^x - 1}$ dont le développement est

$$(4) \qquad \frac{x}{e^x - 2} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{i=1}^{i=\infty} (-1)^{i-1} \frac{B_i}{2i!} x^{2i}.$$

3. *Première série de relations déduites de* (4). — Le principe fondamental, appliqué à la formule (4), donne

$$\frac{\psi_{p-1}(t)}{t} + \frac{t^{p-1}}{p} \equiv 1 - \frac{\psi_{p-1}(t)}{2} + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} (-1)^{i-1} B_i \psi_{p-2i}(t) + (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu!} t_{p-1},$$

en posant $\nu = \frac{p-1}{2}$.

En faisant $t = -1$, il vient la relation connue

$$(-1)^{\nu} \frac{B_\nu}{2\nu!} + \frac{1}{p} \equiv 1 \pmod{p}.$$

En multipliant (4) par x^{n-1}, n étant un entier supérieur à 1 et inférieur

à p, on obtient

$$\varphi_n(t)\,\varphi_{p-n}(t) \equiv 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Or, on a la relation

$$\sum_{n=1}^{n=p-1} \varphi_n(t)\,\varphi_{p-n}(t) \equiv \varphi_{p-1}(-t^2).$$

Il résulte de là que si τ est l'un des rapports (2), on a

$$\varphi_{p-1}(-\tau^2) \equiv 0,$$

d'où l'on déduit facilement

$$\varphi_{p-1}(-\tau) \equiv 0.$$

C'est là une propriété curieuse du polynome $\varphi_{p-1}(t)$.

4. *Deuxième série de relations déduites de* (4). — On déduit facilement de la relation (4) la suivante :

$$x\left(\frac{m}{e^{mx}-1} - \frac{1}{e^x-1}\right) = -\frac{m-1}{2}x + \sum_{i=1}^{i=\infty} (-1)^{i-1}(m^{2i}-1)\frac{B_i}{2i!}x^{2i},$$

dont le premier membre peut être mis sous la forme

$$x \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{\alpha_i}{e^x - \alpha_i},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ sont les racines de $\dfrac{z^m-1}{z-1} = 0$.

En appliquant le principe fondamental et posant

$$B_i = \frac{\varphi_{p-1}(-1+\alpha_i)}{(-1+\alpha_i)^{p-1}} = \frac{\varphi_{p-1}(-\alpha_i)}{(1-\alpha_i)^{p-1}},$$

on obtient

$$(5) \qquad -\varphi_{p-1}(t) \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{\alpha_i}{t+\alpha_i} + (1+t)^{p-1} \sum_{i=1}^{i=m-1} \left(\frac{\alpha_i R_i}{t+\alpha_i} + \frac{\alpha_i R_i}{1-\alpha_i}\right)$$

$$= -\frac{m-1}{2}\varphi_{p-1}(t) + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} (-1)^{i-1}(m^{2i}-1)B_i\,\varphi_{p-2i}(t)$$

$$+ (-1)^{\nu-1}(m^{p-1}-1)\frac{B_\nu}{(p-1)}(1+t)^{p-1}.$$

En faisant $t = 0$, on obtient

$$q(m) = \frac{m^{p-1}-1}{p} - \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{R_i}{1-\alpha_i}.$$

Si l'on multiplie maintenant la relation (5) par le produit $\prod_{i=1}^{i=m-1} (t+\alpha_i)$,

et si l'on prend pour t l'un des rapports (2), on obtient

$$(6) \qquad \prod_{i=1}^{i=m-1} (t+\alpha_i) \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{R_i}{t+\alpha_i} \equiv 0.$$

Le premier membre de (6) est un polynome à coefficients entiers (mod p), de degré $m-2$, qui se réduit, pour $t=-1$, à $(-1)^m m q(m)$.

De là résulte en particulier les critères

$$q(2) \equiv 0, \qquad q(3) \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, p).$$

5. *Autres critères particuliers.* — Pour $m=5$, le degré de la congruence (6) est égal à trois et cette congruence est, par suite, une identité si les six rapports (2) sont distincts. Sinon, le premier membre est de la forme

$$c(-1)(t+2)(2t+t)$$

ou de la forme $c(t^3-1)$. Introduisons les sommes

$$C_k = \sum_i \frac{1}{5i-k} \qquad \left[i = 1, 2, \ldots, \left(\frac{p+k-1}{5}\right)\right],$$

et soit $p = 5n+\varepsilon$.

1° $p \equiv 2$ (mod 3). Si $q(5)$ n'est pas divisible par p, on a pour $\varepsilon = 1$ ou 4, la condition

$$5q(5) \equiv 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n};$$

pour $\varepsilon = 2$ ou 3, on a l'une des conditions

$$5C_0 - 3C_1 \equiv 0,$$
$$5C_2 - 3C_3 \equiv 0.$$

2° $p \equiv 1$ (mod 3). Pour $\varepsilon = 1$ ou 4, on a l'une des conditions

$$5q(5) \equiv 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$
$$5q(5) \equiv -2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right);$$

pour $\varepsilon = 2$ ou 3, on a l'une des conditions

$$5C_0 - 3C_1 \equiv 0,$$
$$5C_2 - 3C_3 \equiv 0,$$
$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \equiv 0.$$

On arriverait à des résultats analogues pour $m=7$.

6. *Simplification du criterium* (6) *dans le cas où m est un nombre composé.* — Dans ce cas, on peut, dans le premier nombre de (6), ne conserver que les racines primitives de $2^m - 1 = 0$. On peut ainsi arriver à de nouveaux critères analogues aux précédents.

7. *Remarques sur le quotient de Fermat.* — La formule obtenue plus haut

$$q(m) = \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{R_i}{1-\alpha_i}$$

permet facilement d'obtenir la formule de M. Lerch

$$q(m) = -\sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{f'_{p-1}(\alpha_i)}{1-\alpha_i^p},$$

où

$$f_{p-1}(t) \equiv -\varphi_{p-1}(-t) \equiv t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots + \frac{t^{p-1}}{p-1}.$$

De là, on peut déduire les formules de Sylvester

$$q(m) = \sum_{i=1}^{n=p-1} \frac{x_n}{p-n},$$

en posant

$$x_n = \frac{n}{p} \pmod{m} \qquad (0 < x_n \leqq m).$$

E. Cartan.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA
diretti dal prof. F. Brioschi.

2e série. Tome XVII. 1889-1890 (1).

Vivanti (*G.*) [J 5 *a*]. — Fondements de la théorie des types ordonnés. (1-35).

Définitions : ensemble ordonné suivant n directions; ensembles semblables. On en déduit la notion de *type ordonné* (Ordnungstypus) à n dimensions. La considération d'un *ensemble bien ordonné* amène la notion de *nombre ordinal*, puis de *nombre transfini* (Cantor). L'auteur expose brièvement la définition des opérations (addition, multiplication, élévation aux puissances) sur les nombres transfinis et la définition des nombres transfinis des divers ordres. Définition du *nombre cardinal* correspondant à un ensemble et des opérations qu'on peut faire sur les types (addition, multiplication) : il est à remarquer que ces opérations ne sont pas commutatives. De la notion de multiplication des types, on déduit celle de *type premier;* définition des *types conjugués*, *types associés*, *classes de types*.

Après avoir défini les *types connexes* et la représentation géométrique des types dans l'espace à n dimensions qui conduit à la notion de parallélépipède

(1) Voir *Bulletin*, 2e série, t. XXX_2, 1906, p. 96.

circonscrit, l'auteur étudie particulièrement les types finis et un certain nombre de problèmes qui se posent à leur sujet.

1° *Déterminer le nombre de types finis à n dimensions ayant un nombre cardinal donné m* : $\varphi(n, m)$.

Exposé de la méthode de Cantor, puis de celle de Schwarz; on retrouve en passant la formule de Goldscheider, qui permet de mettre sous une forme remarquable la formule qui donne $\varphi(n, m)$; la méthode de Wiener est simplement indiquée dans son principe;

2° *Nombre des types connexes.* — Ce problème sert de base à la solution du problème précédent donnée par Schwarz; Cantor en a donné aussi une solution qui est exposée ici dans le cas $n = 2$, pour simplifier;

3° *La condition nécessaire et suffisante pour que tous les types de m éléments inscrits dans un parallélépipède de dimensions $s_1, s_2, \ldots, s_n$ soient tous connexes est*

$$\prod_{i=1}^{n} (s_i - 1) < m - 1;$$

4° *La condition nécessaire et suffisante pour que les types précédents soient tous non connexes est*

$$\sum_{i=1}^{n} (s_i - 1) > m - 1;$$

5° *Déterminer le nombre de types simples de m éléments :* $Q(m)$.

Le Mémoire se termine par l'examen du problème :

Déterminer le nombre des classes en lesquelles se divise un type d'un nombre donné d'éléments; ce problème n'est pas résolu et l'auteur expose quelques recherches personnelles, dans le cas de deux dimensions seulement, qui sont un premier pas vers la solution générale.

Somigliana (*C.*). [T 2 *a*]. — Sur les équations de l'élasticité. (37-64).

L'auteur se propose de montrer que l'on peut établir, pour les fonctions qui représentent les intégrales des équations de l'élasticité dans le cas de l'équilibre isotrope, une théorie analogue sous beaucoup de rapports à celle des fonctions potentielles et qui en constitue, en quelque sorte, une extension. Betti a déjà démontré un théorème qui joue, dans cette théorie, le rôle du théorème de Green pour les fonctions potentielles.

L'auteur donne quelques formules qui correspondent à celle de Green et qui servent à représenter les déplacements des divers points du corps au moyen :

1° Des forces qui agissent sur toute la masse;
2° Des forces qui agissent sur la surface;
3° Des déplacements des points de la surface.

Au moyen de ces formules, beaucoup de méthodes usitées dans l'étude des fonctions potentielles peuvent être appliquées aux intégrales des équations de

l'élasticité. L'auteur en déduit, en particulier, certaines relations qui doivent subsister entre les valeurs que prennent, à la surface d'un corps en équilibre, les forces extérieures et les déplacements. Il en déduit aussi les développements en séries par lesquels on peut représenter les déplacements d'une déformation autour d'un point (déformation d'une sphère dont le centre est en ce point et de rayon assez petit pour qu'elle soit tout entière à l'intérieur du corps). Ces développements correspondent aux développements par fonctions harmoniques (selon Thomson et Tait) qui ont lieu pour les intégrales de l'équation $\Delta_2 = 0$.

Si le corps s'étend à l'infini dans toutes les directions, on a des développements analogues pour la portion S′ extérieure à une sphère, en supposant que le corps occupe tout l'espace S′.

Les considérations précédentes peuvent s'étendre à certains systèmes de n équations différentielles entre n fonctions de n variables, lesquels pour $n = 3$ se réduisent précisément aux équations de l'élasticité.

Pirondini (*G.*). [O3*d*]. — Sur le problème de trouver une courbe dont on connaît le lieu des centres de courbure. (65-79).

J.-A. Serret a étudié les deux problèmes de la recherche d'une courbe dont on connaît : 1° le lieu des centres des sphères osculatrices; 2° le lieu des centres de courbure.

Le premier a été ramené par Serret à l'intégration d'une équation du second ordre, l'auteur de ce Mémoire l'a réduit à des quadratures.

Le deuxième problème a été ramené par Serret à l'intégration d'une équation du troisième ordre, de forme très compliquée, qu'on ne peut intégrer même dans les cas particuliers simples. L'auteur expose une méthode qui conduit à une équation différentielle plus simple et qui permet de trouver la solution dans les cas particuliers suivants :

1° Le lieu L des centres de courbure de la courbe L_1 est une géodésique de la surface polaire de L_1;

2° Les rayons de courbure de L_1 se projettent sur les tangentes de la ligne L suivant un segment de longueur constante;

3° Le lieu L est une trajectoire isogonale des génératrices de la développable polaire de L_1;

4° Les plans osculateurs de L forment avec les plans tangents de la développable polaire de L_1 un angle constant;

5° La ligne L est une trajectoire isogonale des droites polaires de L_1 et les plans osculateurs de L coupent la développable polaire de L_1 sous un angle constant.

Pascal (*E.*). [G3*i*]. — Sur le développement des fonctions σ abéliennes, impaires, de genre 3. (81-111).

Premier Mémoire sur la théorie des fonctions σ abéliennes découvertes par F. Klein. L'auteur expose d'abord la théorie de Klein pour les fonctions σ, les propriétés caractéristiques et l'existence de covariants irrationnels ; puis il aborde la question qui est le but de ce Mémoire : trouver l'expression du terme

du troisième ordre de la fonction σ abélienne, impaire, correspondant à une courbe du quatrième ordre de genre 3.

L'auteur indique en terminant quelques recherches sur un système d'équations aux dérivées partielles auquel doivent satisfaire les termes du développement de σ.

Dans un autre Mémoire, l'auteur donnera une formule de récurrence pour les termes suivant le troisième.

Predella (*P.*). [P² 1]. — Les homographies dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. (113-159).

La cause essentielle de la difficulté de l'étude analytique des homographies est que plusieurs espaces fondamentaux venant à se superposer (en appelant superposés deux espaces situés l'un à l'intérieur de l'autre), ils se confondent avec un espace fondamental à un nombre plus grand de dimensions. En considérant ces espaces superposés comme infiniment voisins, on peut réduire l'étude de toutes les homographies à celle de l'homographie générale; une homographie est alors complètement caractérisée par les nombres h qui expriment les dimensions de ses espaces fondamentaux, distincts ou superposés. Il s'ensuit une classification simple des homographies, dégénérées ou non.

Segre a démontré qu'étant données deux homographies appartenant à une même sous-classe, l'une dans l'espace S_n, l'autre dans S'_n, on peut établir entre S_n et S'_n une correspondance homographique. Mais cette correspondance est-elle déterminée ou peut-on se donner arbitrairement quelques éléments correspondants? Cette question est résolue : on peut, par exemple, fixer un couple de points correspondants et, en outre, un certain nombre d'espaces correspondants.

Les coefficients des relations homographiques, par lesquelles on passe d'une homographie à une autre appartenant à la même sous-classe, satisfont à un système d'équations linéaires, et l'on peut, parmi eux, en choisir arbitrairement $n+\Sigma h(h-1)$, les nombres $(h-1)$ étant les dimensions des espaces fondamentaux, distincts ou superposés, de l'une ou l'autre des homographies.

Gerbaldi (*F.*). [L 18]. — Sur le système de deux coniques. (161-196).

Étant données deux coniques, on dit qu'elles sont *involutives* si chacune d'elles est à la fois harmoniquement inscrite et circonscrite à l'autre. Dans un faisceau de coniques, il y a toujours deux coniques involutives. Soit R le discriminant de l'équation du troisième degré qui donne les paramètres des coniques du faisceau dégénérées en droites : les coniques involutives sont réelles si $R>0$, imaginaires si $R<0$. Si $R=0$, les coniques données sont tangentes et les coniques involutives coïncident avec la conique formée par la tangente commune et la deuxième sécante.

Dans un réseau, il y a aussi deux coniques involutives. Il y a une conique Γ harmoniquement circonscrite à toutes les coniques du faisceau défini par deux coniques C_1 et C_2; il y a aussi une conique Γ' harmoniquement inscrite à toutes les coniques du réseau C_1C_2. Les tangentes à Γ coupent harmoniquement les deux coniques involutives du faisceau et les tangentes à ces coniques,

issues d'un point de Γ, forment un faisceau harmonique. Il en est de même pour la conique Γ' et les coniques involutives du réseau.

Étant données deux coniques, C_1, C_2, il y a quatre coniques par rapport auxquelles C_1 et C_2 sont polaires réciproques. Ces quatre coniques sont deux à deux bitangentes.

Représentation géométrique des coniques invariantes de C_1 *et* C_2. — Toute conique invariante a une équation de la forme

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + l_3 X_3 = 0.$$

On peut prendre l_1, l_2, l_3 comme coordonnées trilinéaires d'un point dans un plan π; de même, au point de vue tangentiel, on pourra représenter les coniques invariantes par un point d'un plan π'. On en déduit diverses propriétés : les coniques du système, qui sont harmoniquement circonscrites à une conique S, forment un faisceau représenté dans le plan π par la droite polaire du point S par rapport au triangle fondamental, et dans le plan π' par les points de la conique polaire de S' par rapport au triangle fondamental.

On a des résultats analogues pour les coniques harmoniquement inscrites à une conique R.

A deux coniques bitangentes correspondent dans les plans π ou π' deux points en ligne droite avec l'un des sommets du triangle fondamental.

On a également des représentations simples pour les coniques conjuguées et les coniques polaires réciproques.

Cette représentation permet de discuter complètement la réalité des coniques invariantes; en particulier, pour les quatre coniques par rapport auxquelles C_1 et C_2 sont polaires réciproques, on a les résultats suivants :

1° Deux réelles et deux imaginaires (à coefficients imaginaires) si C_1 et C_2 ont seulement deux points réels communs;

2° Toutes imaginaires si C_1 et C_2 ont quatre points communs réels, les quatre tangentes communes étant imaginaires, ou quatre points communs imaginaires et quatre tangentes communes réelles, ou encore si l'une des coniques est réelle et l'autre imaginaire;

3° Trois réelles et une imaginaire (à coefficients réels) si C_1 et C_2 ont les quatre points communs et les quatre tangentes communes, tous réels ou tous imaginaires;

4° Deux confondues, si C_1 et C_2 sont tangentes.

Pascal (*E.*). [G 3 *i*]. — Sur les formules de récurrence pour le développement des fonctions σ abéliennes impaires, à trois arguments. (Deuxième Mémoire.) (197-224).

Ce Mémoire complète le premier (même Volume) pour l'étude du développement des fonctions σ abéliennes, impaires, de genre 3. Les formules de récurrence sont basées sur une transformation de l'équation de Wiltheiss à laquelle satisfont les fonctions σ en question.

Pirondini (*G.*). [O 6 *s*]. — Sur les surfaces de translation. (225-255).

Bianchi a considéré les surfaces de translation engendrées par une courbe plane C qui se meut par translation, l'un de ses points décrivant une courbe C' située dans un plan perpendiculaire à celui de C. Ces surfaces présentent une grande analogie avec les surfaces de révolution; en particulier, elles peuvent être déformées d'une infinité de manières en conservant le caractère de leur génération. A tout théorème relatif à la déformation d'une surface de révolution correspond un théorème analogue pour les surfaces de translation.

L'auteur considère des surfaces plus générales engendrées par la translation d'une ligne quelconque à double courbure (génératrice) dont un point décrit une ligne quelconque (directrice). Il étend à ces surfaces quelques théorèmes de Bianchi; en particulier, la directrice et la génératrice peuvent être échangées; les directrices et les génératrices sont des courbes conjuguées sur la surface; la courbure géodésique des directrices $\sigma = \text{const.}$) et celle des génératrices ($s = \text{const.}$) satisfont à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{R_s}\right) = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{1}{R_\sigma}\right).$$

Si, sur une telle surface, l'une des directrices ou l'une des génératrices est géodésique, la courbure totale de la surface tout le long de cette ligne est nulle.

En un point d'une surface de translation, le rapport des rayons de courbure géodésique des lignes L et A (directrice et génératrice) à ceux de leurs trajectoires orthogonales sont égaux tous les deux à la cotangente de l'angle formé en ce point par les lignes L et A.

L'auteur étudie ensuite et résout le problème de la déformation des surfaces de translation en surfaces de même espèce; on peut se donner les lignes L_1 et A_1 qui correspondent à L et A et la solution dépend, suivant les cas, de constantes ou de fonctions arbitraires. Il applique enfin ces résultats à quelques cas particuliers.

Pascal (*E.*). [G3*b*]. — Sur la théorie des fonctions σ hyperelliptiques, paires et impaires, de genre 3. (Troisième Mémoire.) (257-305).

Quand on fait sur les fonctions ϑ de Jacobi une transformation linéaire des périodes, les fonctions sont multipliées par un certain facteur exponentiel; Klein a montré qu'on peut substituer aux ϑ d'autres fonctions qui se permutent simplement entre elles, sans l'introduction de facteurs. Ces nouvelles fonctions sont appelées fonctions σ : elles avaient été considérées par Weierstrass dans le cas elliptique. Elles peuvent être définies indépendamment des fonctions ϑ. On peut démontrer qu'elles ne deviennent jamais infinies en aucun point de la surface de Riemann et s'annulent en certains points qui sont les zéros d'une fonction connue.

Dans le cas des fonctions de genre 3, il y a :

1° 28 fonctions σ impaires;

2° 35 fonctions σ paires qui ne s'annulent pas quand les arguments sont nuls on les dit de première espèce;

3° Une seule fonction σ paire qui s'annule avec les arguments : on la dit de deuxième espèce.

Ces fonctions hyperelliptiques satisfont aux équations de Wiltheiss, linéaires et du deuxième ordre; et l'équation différentielle que vérifie la fonction elliptique σ en est un cas particulier.

L'auteur donne une méthode pour calculer le deuxième terme du développement de ces fonctions σ, d'abord dans le cas des 28 fonctions impaires, puis dans le cas des 35 fonctions paires de première espèce; il indique aussi le calcul des autres termes au moyen de formules de récurrence. Un dernier Chapitre est consacré à la fonction paire de deuxième espèce.

Les fonctions abéliennes impaires de genre 3 ayant été étudiées dans deux Mémoires précédents (même Volume), l'auteur annonce un quatrième Mémoire, consacré aux fonctions abéliennes paires.

Klein (*F.*). — Considérations comparatives sur les recherches géométriques récentes. (307-343).

Traduit de l'allemand en italien par G. Fano. Il a été depuis publié une traduction française de la même étude par M. Padé (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. VIII, 1891, p. 87-102 et 173-199) avec des Notes.

2e série, Tome XVIII.

Pascal (*E.*). [G3*b*]. — Sur la théorie des fonctions σ, abéliennes, paires, à trois arguments. (1-58).

Ce Mémoire est le quatrième d'une série consacrée aux fonctions abéliennes σ (*voir* t. XVII); l'auteur résout ici, pour les fonctions impaires, le problème résolu dans le premier Mémoire pour les fonctions paires, c'est-à-dire la recherche du deuxième terme du développement de σ suivant les puissances croissantes des intégrales de première espèce; les deux cas sont très différents et c'est une idée de Klein qui a permis de passer de la considération des formes quaternaires à celle des formes ternaires. L'auteur a cru utile de rappeler les principes fondamentaux de la construction des fonctions σ en développant d'autres points de la théorie que ceux qui avaient servi dans les Mémoires précédents; par exemple, il étudie en détail la théorie des courbes de contact.

Somigliana (*C.*). [H10*e*]. — Sur une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre. (59-92).

Divers problèmes de Physique mathématique conduisent, lorsqu'on suppose les divers corps homogènes et isotropes, à l'équation de Laplace $\Delta_2 V = 0$, ou à d'autres équations analogues de degré supérieur comme $\Delta_2 \Delta_2 V = 0$; ces mêmes problèmes se ramènent, lorsqu'il s'agit de corps cristallins homogènes, à des équations plus générales, mais qui sont encore homogènes, linéaires, à coefficients constants. Est-il possible d'étendre à ces équations les méthodes employées dans l'étude de l'équation de Laplace? Dans ce Mémoire, l'auteur a essayé cette extension dans le cas d'une équation linéaire, homogène et à coefficients constants, du quatrième ordre et à deux variables indépendantes.

D'ailleurs, quelques-unes de ces considérations seraient applicables aux équations d'ordre supérieur, ou dans le cas où le nombre de variables indépendantes est supérieur à deux.

On sait qu'il existe une relation remarquable entre la théorie des formes différentielles quadratiques et celle de l'équation de Laplace; on peut de même associer à l'étude d'une équation d'ordre supérieur celle de la forme différentielle d'ordre égal à celui de l'équation et ayant les mêmes variables indépendantes; en particulier, pour l'équation qui fait l'objet de ce Mémoire, si on l'écrit

$$c_0 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + 4c_1 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 6c_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4c_3 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1 \partial x_2^3} + c_4 \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} = 0,$$

le premier membre peut être considéré comme le paramètre différentiel $\Delta_4 U$ relatif à la forme différentielle

$$\varphi = \frac{c_4 dx_1^4 - 4c_3 dx_1^3 dx_2 + 6c_2 dx_1^2 dx_2^2 - 4c_1 dx_1 dx_2^3 + c_0 dx_2^4}{c_0 c_4 - 4c_1 c_3 + 3c_2^2}.$$

C'est là l'analogie fondamentale; on en déduit la notion des paramètres différentiels de divers ordres lesquels interviennent naturellement quand on veut faire un changement de variables dans l'équation en U.

L'auteur résout ensuite plusieurs problèmes relatifs à l'intégration et, en particulier, celui de la recherche des intégrales qui satisfont à des conditions aux limites données.

Paolis (*R. de*). [J 5 *b*]. — Sur les correspondances $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ continues qu'on peut établir entre les points de r groupes. (93-117).

Il faut entendre ici le mot *groupe* dans le sens *ensemble*. L'auteur se propose d'étudier, au moyen de considérations géométriques simples, certaines correspondances continues qu'on peut établir entre les points de plusieurs groupes.

Après avoir défini les variétés et leurs éléments, les groupes et les groupes composés ou groupes de groupes (*aggrupamenti*), il considère les exemples qu'on peut en trouver dans l'espace et ses éléments géométriques. Il étudie en détail les groupes géométriques continus; on pourra établir une représentation géométrique d'un groupe quelconque et, par suite, étudier les propriétés de ce groupe en se servant des résultats précédents dès qu'on saura établir une correspondance continue entre deux ou plusieurs groupes. Si l'on considère deux groupes G^m et G^n, tels que chaque élément M du premier détermine n éléments correspondants N du deuxième, tandis que chaque élément N correspond à m éléments M (et m seulement), on dira qu'il y a une correspondance $[m, n]$ entre les deux groupes.

L'auteur étudie en détail ces correspondances et leurs propriétés; il généralise ensuite la définition et les propriétés aux correspondances entre r groupes, désignées par $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$.

Castelnuovo (*G.*). [M¹ 4 *e*]. — Dimension maximum des systèmes linéaires de courbes planes de genre donné. (119-130).

Le problème de la recherche d'une limite supérieure de la dimension d'un système linéaire de courbes planes, de genre donné p, a été étudié par Jung [*Recherches sur les systèmes de courbes planes algébriques* (*Annali di Matematica*, 2e série, t. XV et XVI)], qui donna comme limite $5p+3$ $(p>1)$; mais on peut voir facilement que cette limite n'est jamais atteinte; il restait donc à déterminer la valeur maximum *atteinte* de cette dimension en fonction de p. Ce problème est résolu par le théorème suivant :

Dans un système linéaire de courbes de genre p $(p>1)$, la dimension ne peut dépasser $3p+5$ et le degré $4p+4$, en appelant degré le nombre des intersections variables de deux courbes du système. Ces deux maxima peuvent être atteints quel que soit p; en effet, ainsi que Jung l'avait vu d'ailleurs, pour un système d'ordre n ayant un point $(n-2)$-uple et un nombre quelconque de points doubles, la dimension est égale à $3p+5$ et le degré à $4p+4$.

Ce n'est d'ailleurs pas le seul cas où le maximum soit atteint et l'on peut énoncer le résultat suivant :

Un système linéaire de courbes de genre donné $p>1$, qui a la dimension maximum $3p+5$ (ou le degré maximum $4p+4$) se compose de courbes hyperelliptiques, ou peut se réduire au système des quartiques planes ($p=3$). Dans le premier cas, le système peut, par une transformation birationnelle, se ramener, quel que soit p, à l'un des systèmes minima suivants :

1° Courbes d'ordre $p+3$ avec un point fondamental multiple (ordinaire) d'ordre $p+1$ et un point double;

2° Courbes d'ordre $p+2+\mu$ $(\mu=0,1,\ldots,p)$ avec un point fondamental multiple d'ordre $p+\mu$ et μ points doubles infiniment voisins de celui-ci.

Jung (*G*). [M¹ 4*e*]. — Une remarque sur le degré maximum des systèmes linéaires de courbes planes algébriques. (129-130).

Pascal (*E.*). [G 3*i*]. — Sur les fonctions hyperelliptiques de première espèce (erster Stufe) pour $p=2$. (131-164).

Cinquième Mémoire sur les fonctions abéliennes (*voir* même Volume, p. 1).

Étant donnée une fonction hyperelliptique, elle n'est pas en général entière par rapport aux arguments w (intégrales de première espèce): mais elle est toujours, et c'est là un point essentiel, le quotient de fonctions entières qu'on appellera *fonctions jacobiennes*.

L'auteur adopte d'ailleurs et expose la classification des fonctions hyperelliptiques établie par Klein, en les considérant comme des fonctions appartenant au groupe des substitutions abéliennes ou à l'un de ses sous-groupes; il s'ensuit une classification correspondante pour les fonctions jacobiennes; celles de deuxième espèce sont précisément les fonctions ϑ de Jacobi, ou encore les fonctions σ de Klein.

Celles de première espèce font l'objet de ce Mémoire. On peut montrer facilement que ces dernières (appelées Σ par Klein) peuvent s'exprimer linéairement au moyen des carrés des σ; plusieurs auteurs (Brioschi, Wiltheiss) ont déduit de là une méthode pour étudier ces fonctions, en se servant des déve-

loppements connus pour les σ; mais, à cause de la dissymétrie de ces calculs, l'auteur préfère abandonner cette idée et étudier les Σ directement.

On peut définir les fonctions Σ indépendamment des fonctions hyperelliptiques, et le quotient de deux de ces fonctions est alors une fonction hyperelliptique de première espèce; on peut démontrer qu'il existe un système complet de fonctions hyperelliptiques de première espèce, c'est-à-dire un système tel que toute autre fonction de même nature s'exprime rationnellement au moyen de celles-ci, et ces fonctions s'expriment elles-mêmes au moyen de cinq fonctions Σ, dont quatre paires et une impaire.

L'auteur étudie ensuite les développements de ces fonctions par rapport aux arguments w; il donne le moyen de calculer les quatre premiers termes pour les fonctions paires et les cinq premiers pour la fonction impaire.

Pirondini (*G.*). [O'6*a*]. — Sur la théorie des surfaces de révolution. (165-212).

La surface engendrée par la rotation autour de Oz de la courbe

$$x = x_1(u), \qquad y = y_1(u), \qquad z = U(u)$$

a pour méridienne $x = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ $z = U(u)$. Donc toutes les courbes qui ont pour équations, en posant $R(u) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$,

$$x = R\cos f(u), \qquad y = R\sin f(u), \qquad z = U(u)$$

sont tracées sur cette même surface; réciproquement, les coordonnées de toute courbe de la surface peuvent s'écrire sous la forme précédente : elle est caractérisée par la fonction $f(u)$.

Toute propriété géométrique d'une courbe de la surface sera exprimée par une équation différentielle

$$\theta(f, R, U, f', R', U', \ldots) = 0.$$

Si l'on intègre cette équation par rapport à f, on aura

$$f = \varphi(R, U, R', U', \ldots);$$

la courbe génératrice (et celles qui s'en déduisent par rotation) jouira de cette propriété si la fonction U vérifie l'équation

$$u = \varphi(R, U, R', U', \ldots);$$

on peut tirer U de cette équation et l'on a ainsi les courbes qui engendrent par rotation une surface sur laquelle elles vérifient une certaine propriété géométrique. L'auteur détermine ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que la courbe génératrice soit géodésique, loxodromie, etc. de la surface. Les formules trouvées se prêtent facilement à la résolution de quelques problèmes :

La seule surface de révolution dont une géodésique est aussi géodésique principale d'un hélicoïde de même axe, est l'hyperboloïde à une nappe, et la géodésique considérée est l'une quelconque des génératrices rectilignes;

Si une loxodromie d'une surface de révolution a pour projection équatoriale une spirale logarithmique ou une spirale d'Archimède, toutes les autres loxodromies de la surface ont la même propriété;

Parmi les loxodromies d'une surface de révolution, celles qui sont aussi géodésiques principales de l'hélicoïde qu'elles engendrent en tournant hélicoïdalement autour de l'axe de révolution, sont tracées sur une sphère; entre le rayon r de la sphère, le paramètre p du mouvement hélicoïdal et l'angle constant i sous lequel ces loxodromies coupent les méridiennes, il existe la relation

$$r = p \cot i;$$

Les géodésiques principales d'hélicoïdes, tracées sur un cône de révolution, se projettent sur le plan équateur suivant des spirales hyperboliques.

L'auteur donne ensuite les formules relatives aux lignes d'ombre et démontre à leur sujet quelques propriétés géométriques intéressantes; il généralise un théorème de La Gournerie en démontrant que les seules surfaces de révolution qui, relativement à des rayons concourants, admettent une ligne d'ombre plane sont celles du second degré.

Il existe d'ailleurs entre les lignes d'ombre de deux surfaces de révolution des correspondances remarquables : Si deux surfaces S et S′ sont telles que, en éclairant la première par des rayons parallèles et la deuxième par des rayons concourants, il existe sur ces surfaces respectivement deux lignes d'ombre qui aient même projection équatoriale à toute ligne d'ombre de l'une des surfaces, on pourra faire correspondre une ligne d'ombre de l'autre ayant même projection équatoriale. Si θ est l'angle des rayons parallèles avec l'axe de S et d la distance du point lumineux à l'axe de S′, pour tous les couples de lignes d'ombre on aura

$$d \times \cot\theta = \text{const.}$$

La même méthode s'applique aux lignes conjuguées et à l'étude des lignes conjuguées égales; on peut l'appliquer également à l'étude de la déformation des surfaces de révolution; elle permet de former l'équation des surfaces de révolution engendrées par deux lignes L et L′ telles que les surfaces soient applicables avec correspondance entre les deux génératrices; on en déduit en particulier que si, en déformant une surface de révolution de manière qu'elle reste de révolution, une hélice tracée sur cette surface et appartenant à un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe se transforme en une courbe de même nature, la surface donnée est nécessairement un cône ou un cylindre.

On peut aussi, toujours par la même méthode, trouver l'équation des surfaces de révolution telles qu'une déformation n'altérant pas leur nature, permette de transformer une ligne donnée en ligne asymptotique. L'auteur termine par l'étude des lignes d'ombre dans les déformations de la surface.

Klein (*Benno*). [L 16 *a*]. — Théorie des triades d'éléments de domaines élémentaires de premier rang. (213-226).

Pascal (*E.*). [M² 4 *k*]. — L'équation rationnelle de la surface de Kummer. (227-263).

Sixième Mémoire sur les fonctions abéliennes (*voir* même Volume, p. 1 et 131). La surface de Kummer est du quatrième ordre avec 16 points nodaux et 16 points singuliers; ses coordonnées peuvent s'exprimer rationnellement au

moyen des fonctions θ de Jacobi à deux arguments. Or, les quatre fonctions jacobiennes Σ paires, étudiées dans le Mémoire précédent, s'expriment linéairement au moyen des carrés des fonctions θ; on pourra donc prendre les Σ comme coordonnées homogènes d'un point de la surface de Kummer. Il existe plusieurs relations remarquables entre la surface de Kummer et une sextique binaire f, dont quelques-unes ont été mises en évidence par Klein; la relation qui existe entre les quatre fonctions Σ paires n'est autre que l'équation de la surface de Kummer, les coefficients de cette équation étant des invariants rationnels de cette sextique f.

L'auteur étudie d'abord la surface de Kummer, ses diverses définitions géométriques; puis la correspondance entre la surface et une sextique binaire dont il étudie en détail les invariants et les covariants. Il forme ensuite l'équation de la surface en coordonnées Σ et il en calcule divers termes.

Somigliana (*C.*). [H 7 *c*). — Sur la transformation des équations aux dérivées partielles linéaires, homogènes, à coefficients constants. (265-299).

La transformation par changements de variables de l'équation de Laplace, au moyen de la méthode des paramètres différentiels, a fait l'objet des recherches de Cauchy, Lamé, Jacobi et Beltrami; on sait maintenant que la transformation de l'équation peut se réduire à celle d'une forme différentielle quadratique. Ces méthodes et ces résultats peuvent s'étendre aux équations d'ordre supérieur, et c'est là l'objet de ce Mémoire; on peut étendre la notion de paramètre différentiel au cas où la forme différentielle est d'ordre supérieur à 2. Généralisant un théorème de Christoffel, sur lequel est basée la méthode de Ricci pour construire les paramètres différentiels des formes quadratiques, l'auteur a réduit la recherche des paramètres différentiels des formes de degré quelconque à celle des invariants algébriques simultanés de certains systèmes de formes différentielles. Le problème algébrique étant plus simple, et en général résoluble, on peut également considérer comme résolu celui de la formation des paramètres différentiels. Comme application, l'auteur a formé explicitement, pour les formes du quatrième degré, un groupe de paramètres qui sont les analogues des paramètres différentiels connus pour les formes quadratiques.

Bianchi (*L.*). [O 6 *p*]. — Sur quelques nouvelles classes de surfaces et de systèmes triples orthogonaux. (301-358).

Les principaux résultats nouveaux de ce Mémoire sont parus dans deux Notes des *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (Vol. VI, 1890, p. 435-552).

Après avoir rappelé quelques formules de la théorie des surfaces, l'auteur fait l'étude d'une congruence de rayons qui intervient dans la théorie de la déformation infinitésimale des surfaces et qui fut considérée pour la première fois par Ribaucour (*Étude des Elassoïdes*); on l'obtient en considérant deux surfaces S et S', qui se correspondent point par point par orthogonalité d'éléments et en menant par chaque point de S' le rayon parallèle à la normale au point correspondant de S: on l'appellera *congruence de Ribaucour;* la surface S sera dite *génératrice*. On peut retrouver facilement, au moyen des formules de Weingarten, les propriétés de cette congruence, indiquées par Ribaucour et par M. Guichard; en particulier, le théorème de M. Guichard :

Lorsque la congruence de Ribaucour est à foyers réels, les développables de la congruence coupent la surface moyenne (S′) *suivant des lignes conjuguées, et réciproquement : toute congruence dont les développables coupent la surface moyenne suivant des lignes conjuguées est une congruence de Ribaucour* (1).

Les congruences de Ribaucour, qui admettent des surfaces orthogonales, sont celles qui ont pour surface génératrice une surface minima et seulement celles-là.

L'auteur étudie ensuite les relations qu'il y a entre les congruences de Ribaucour et les systèmes de ∞^2, cercles qui admettent une série de surfaces orthogonales; un tel système de cercles sera dit *normal;* il est utile aussi de considérer la congruence formée par les axes de ces cercles et qu'on appellera *congruence cyclique.*

Quelles sont les congruences de Ribaucour cycliques? Il est nécessaire et suffisant pour cela que, si l'on rapporte la surface génératrice S à ses lignes asymptotiques u et v, l'expression de sa courbure K ait la forme

$$(a) \qquad K = \frac{-1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2}.$$

On en déduit deux remarques importantes :

1° Toutes les congruences de Ribaucour, qui ont une surface génératrice de la classe (a), sont cycliques, quelle que soit S′;

2° Une telle congruence est cyclique d'une infinité de manières, car on peut lui associer ∞^1 systèmes normaux de cercles dont les axes sont les rayons de la congruence.

La détermination effective des surfaces orthogonales aux cercles dépend d'une équation de Riccati qui est indépendante de la surface S′.

L'auteur étudie ensuite les surfaces de la classe (a); mais, pour rendre ces nouvelles recherches indépendantes des précédentes, il reproduit la méthode de M. Guichard pour la détermination analytique des congruences telles que, sur les nappes de la surface focale, les asymptotiques se correspondent; dans ces congruences, le produit des courbures des deux nappes en deux points correspondants est égal à l'inverse de la quatrième puissance de la distance des points limites.

Étant donnée une congruence telle que les deux nappes focales se correspondent au moyen des asymptotiques, si l'on veut en outre que les courbures soient les mêmes en deux points correspondants, il faut que les deux nappes soient des surfaces de la classe (a).

Inversement, toute surface S de la classe (a) est une nappe de la surface focale de ∞^2 congruences de l'espèce demandée; il s'ensuit que dans chaque cas la deuxième nappe sera aussi de la classe (a). La détermination de cette congruence, quand on se donne S, dépend précisément de l'équation de Riccati, dont il a déjà été question.

---

(1) Guichard : *Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. VI., p. 333-348).

Ainsi l'on peut appliquer aux surfaces (a) les méthodes de transformations étudiées par l'auteur, sous le nom de *transformations complémentaires de Bäcklund*, au sujet de surfaces pseudosphériques (correspondant aux cas où φ et ψ sont des constantes). *Annali di Matematica*, 2e série, t. XIII.)

L'auteur étudie, en particulier, une classe de surfaces (a) correspondant au cas où une seule des fonctions $\varphi(u)$, $\psi(v)$ se réduit à une constante; d'après un théorème d'Enneper, ces surfaces peuvent être définies aussi par la propriété que les lignes asymptotiques d'un système sont des courbes à torsion constante. A la théorie de ces surfaces et de leurs déformations infinitésimales, se ramène le problème de la recherche des surfaces qui, rapportées à leurs lignes de courbure, ont pour élément linéaire

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

avec la condition

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \text{fonction de } u;$$

ces dernières s'obtiennent, en effet, comme surfaces focales des congruences de Ribaucour, ayant pour surface génératrice une des surfaces considérées de la classe (a).

L'auteur reprend ensuite l'étude des systèmes normaux de cercles et des systèmes triples de surfaces orthogonales associés, en se limitant au cas où les surfaces génératrices sont pseudosphériques.

Ces systèmes possèdent des propriétés caractéristiques simples, relatives aux trajectoires qui coupent sous un angle constant les lignes de courbure : ce double système de courbes divise la surface en parallélogrammes infinitésimaux équivalents. Inversement, toutes les surfaces qui jouissent de cette propriété se déduisent de la déformation infinitésimale des surfaces pseudosphériques par une transformation de Bäcklund. En particulier, sur la sphère, la recherche des doubles systèmes de lignes qui se coupent sous un angle constant et qui divisent la surface en parallélogrammes infinitésimaux équivalents, se ramène à un problème plus simple de la théorie des surfaces pseudosphériques.

2e série, Tome XIX.
(Févr. 1891-févr. 1892.)

F. Amodeo. [M³ 4*b*]. — Les correspondances univoques sur les courbes elliptiques normales d'ordre n d'un espace à $n-1$ dimensions. (Premier Mémoire). (1-27).

La théorie des correspondances univoques que l'on peut établir sur les courbes elliptiques normales a fait l'objet de nombreux travaux : on s'est borné d'abord aux cubiques planes, puis aux quartiques gauches, pour arriver enfin à la courbe elliptique normale d'un espace à un nombre quelconque de dimensions. Le but de ce travail est de reprendre la théorie d'un point de vue général et d'établir à nouveau ou d'étendre certains résultats connus.

Une discussion générale permet d'abord de montrer dans combien de correspondances univoques sont homologues deux points donnés, soit pour une courbe

non singulière, soit pour une courbe harmonique, soit pour une courbe équianharmonique, et de distinguer les diverses espèces de correspondances qui peuvent exister dans chacun de ces cas.

Dans le présent Mémoire, c'est le groupe des correspondances non singulières qui est étudié complètement, les correspondances singulières des courbes harmoniques et anharmoniques étant réservées pour un article spécial.

Les derniers paragraphes sont consacrés à des applications relatives aux polygones inscrits et aux correspondances cycliques sur une courbe elliptique : de cette étude, l'auteur tire un théorème dont un cas particulier est la propriété fondamentale des polygones de Steiner.

G. Vivanti. [H 1 *g*]. — Sur les intégrales multiformes des équations différentielles algébriques du premier ordre. (29-38).

Dans une courte Note [*Zur Theorie der mehrwerthigen Functionen* (*Zeitschrift für Math. u. Ph.*, t. XXXIV)], l'auteur avait indiqué que l'on peut obtenir certains résultats de Fuchs sur les équations différentielles du premier ordre en partant de propriétés simples des fonctions multiformes. Il montrait l'intérêt qu'il y a à les partager en deux familles :

1° Celles dont l'ensemble des valeurs pour une valeur quelconque déterminée de la variable n'est dense dans aucun domaine;

2° Toutes les autres.

Il y établissait quelques théorèmes en utilisant cette classification.

La présente Note donne quelques applications à la théorie des équations différentielles algébriques.

Après plusieurs théorèmes concernant la nature soit de l'ensemble des valeurs prises par une intégrale en un point, soit de l'ensemble des points singuliers d'une intégrale, l'auteur établit le théorème suivant qui termine l'article :

Si les fonctions y de z, et z de y définies par une équation différentielle algébrique du premier ordre ont leurs points de ramification fixes, et si au moins pour un des points de ramification pour lesquels $\frac{dy}{dz}$ $\left(\text{ou } \frac{dz}{dy}\right)$ est infini, y et z sont finies et bien déterminées, les fonctions y et z appartiennent à la première famille, au moins pour quelque valeur de la constante arbitraire.

B. Klein. [L¹ 16*a*]. — Théorie des triplets de figures élémentaires du premier degré. (Deuxième partie). (39-73).

Le Mémoire auquel celui-ci fait suite contenait la géométrie d'une double multiplicité de triplets : réseau de triplets (Tripelnetz). Il se terminait par la démonstration du théorème suivant :

Quand un triplet β fait partie d'un réseau qui a pour points triples les points d'un triplet α, le triplet α fait partie d'un réseau qui a pour points triples les points du triplet β ; deux tels triplets sont dits conjugués.

On donne ici une nouvelle démonstration de ce théorème : en s'appuyant sur la théorie des coniques, on arrive à montrer qu'il existe, dans le domaine des

triplets (Tripelgebiet), entre les triplets et les réseaux de triplets, la même relation polaire que, dans l'espace ordinaire, entre les points et les plans.

Deux réseaux de triplets, sur le même support, ont en commun une *série cubique-involutive*, que nous appellerons pour abréger *série de triplets*. La géométrie de ces figures et leur classification font l'objet des paragraphes suivants; on peut les classer en huit espèces qui se répartissent en deux groupes principaux : dans le premier, une série est déterminée par deux triplets pris arbitrairement; dans le second, par trois éléments d'un triplet et deux d'un autre; une série de première espèce détermine toujours une autre série, sa série polaire; une série de seconde espèce coïncide avec sa série polaire; il y a une parfaite analogie entre cette classification et celle des droites de l'espace dans leurs rapports avec une cubique gauche. (*En allemand.*)

S. Pincherle. [D.6$c\beta$]. — Sur la généralisation des fractions continues algébriques. (75-95).

Lorsque, par analogie avec la méthode qui conduit au développement d'une fonction en fraction continue, on cherche à établir entre deux (ou plusieurs) fonctions données une relation linéaire à coefficients rationnels avec la plus grande approximation possible pour un degré déterminé des coefficients, on est conduit à un algorithme) dont l'auteur a exposé quelques propriétés dans un Mémoire antérieur (*R. Accademia delle Scienze di Bologna*, IV, t. X). Le présent article est destiné à en donner de nouvelles et à en faire des applications.

Pour simplifier, il se borne à deux fonctions données : la théorie est alors basée sur une relation récurrente à quatre termes. L'algorithme est employé à résoudre non seulement le problème indiqué au début, mais aussi le suivant : représenter deux fonctions données par des fractions rationnelles de même dénominateur, de degré donné, avec la plus grande approximation possible.

Les applications données sont obtenues en prenant les deux fonctions d'où l'on part sous forme d'intégrales définies $\int_l \frac{\varphi(y)}{x-y}\,dy$, $\int_{l_1} \frac{\psi(y)}{x-y}\,dy$. Après avoir calculé dans ces conditions la forme des termes successifs, l'auteur montre comment l'on peut résoudre les deux problèmes suivants :

1° Déterminer les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n, c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$ de manière à représenter avec la plus grande approximation possible deux intégrales données $\int_l \varphi(y)\psi(y)\,dy$; $\int_{l_1} \varphi_1(y)\psi(y)\,dy$ par des expressions de la forme

$$c_1\psi(a_1) + c_2\psi(a_2) + \ldots + c_n\psi(a_n); \qquad c'_1\psi(a_1) + c'_2\psi(a_2) + \ldots + c'_n\psi(a_n).$$

2° Déterminer les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ et les constantes $c, c_1, \ldots, c_n$, $c', c'_1, \ldots, c'_n$ de manière à représenter avec la plus grande approximation possible une somme de deux intégrales données

$$\int_l \psi(y)\varphi(y)\,dy + \int_{l_1} \psi_1(y)\varphi_1(y)\,dy$$

par une expression de la forme

$$c + c' + \Sigma(c_\nu\psi(\alpha_\nu) + c'_\nu\psi_1(\beta_\nu)) + \rho.$$

C. Bigiavi. [H 5 *d*]. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires réductibles. (97-144).

On sait reconnaître si une équation différentielle linéaire a pour intégrale générale une fonction uniforme à un seul point singulier essentiel, et cela par des opérations purement algébriques.

Mais s'il s'agit de voir si *quelques* intégrales sont uniformes, ou si l'équation est réductible, l'examen des points singuliers ne suffit plus; on ne sait rien de la modification des intégrales quand la variable tourne autour d'un point singulier.

Pourtant, dans certains cas particuliers, la nature seule des points singuliers permet d'affirmer l'existence de quelques intégrales uniformes : c'est ainsi que, si une équation du troisième ordre à trois points singuliers a deux intégrales holomorphes distinctes au voisinage de chacun de ces points, on peut en général en conclure qu'elle a une intégrale uniforme partout. Les cas analogues offrent en général peu d'intérêt. Il n'en est pas de même du suivant qui fait l'objet essentiel du présent Mémoire :

Si une équation linéaire d'ordre n à coefficients elliptiques est telle qu'on puisse déterminer un parallélogramme fondamental où existent $n-1$ intégrales uniformes, la $n^{\text{ième}}$ ne reprenant pas la même valeur quand on tourne autour de tous les points singuliers du parallélogramme, cette équation a un groupe d'intégrales uniformes.

Il faut signaler la forme simplifiée que prend ce théorème quand il n'y a qu'un point critique dans chaque parallélogramme.

La dernière partie du Mémoire est consacrée à quelques exemples pris parmi les équations du deuxième et du troisième ordre : en particulier, les résultats sont appliqués à l'équation de Lamé.

F. Amodeo. [M^3 4 *b*]. — Correspondances univoques singulières sur les courbes elliptiques harmoniques et équianharmoniques. (Deuxième Mémoire). (145-159).

L'auteur a signalé, dans un Mémoire précédent, l'existence de correspondances univoques singulières sur les courbes harmoniques et équianharmoniques, correspondances qui ont été étudiées pour la première fois par Segre. La donnée d'un couple de points homologues détermine deux correspondances univoques singulières pour les premières, quatre pour les secondes. Le but du présent Mémoire est de les construire effectivement. Cette construction est précédée d'une étude sur les transformations d'une correspondance singulière en elle-même, et sur les produits de plusieurs correspondances (singulières ou non) sur ces courbes.

E. Pascal. [M^2 4 *k*]. — Sur les surfaces du sixième degré circonscrites à la surface de Kummer. (Septième Mémoire).

Ce Mémoire fait suite à un autre du même auteur : *Sur l'équation rationnelle de la surface de Kummer.* Quand on prend pour coordonnées les quatre fonctions hyperelliptiques de première espèce, paires, Σ, l'équation de la

surface de Kummer devient rationnelle : ses coefficients sont des invariants rationnels de la sextique binaire fondamentale; de plus, il en est de même pour les équations des surfaces du sixième degré qui la touchent suivant une courbe du douzième ordre. Le but du présent travail est de rechercher les coefficients invariants de ces équations et de montrer comment on peut en faire le calcul à l'aide de certaines formules fondamentales établies dans le Mémoire précédent.

Au point de vue analytique, les équations de la surface de Kummer et des surfaces du sixième degré circonscrites correspondent aux seules relations rationnelles qui existent entre les cinq fonctions Σ; ce Mémoire, consacré à la surface de Kummer, se trouve ainsi compléter des Mémoires relatifs aux fonctions Σ.

L. Bianchi. [O6*p*]. — Sur les systèmes triples orthogonaux qui contiennent une série de surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes. (177-200).

Dans ce Mémoire, la recherche des systèmes triples orthogonaux, qui contiennent une série de surfaces à lignes de courbure planes, est ramenée à la recherche bien connue des systèmes cycliques.

Après avoir recherché, en s'aidant de la méthode de la représentation sphérique, les surfaces à lignes de courbure planes, l'auteur traite le problème des systèmes cycliques par une méthode nouvelle s'appuyant sur la considération de la congruence des axes des cercles envisagés.

Puis, passant à l'objet même du Mémoire, il démontre d'abord que, pour déterminer d'une manière univoque un système triple de l'espèce cherchée, il suffit de se donner :

1° Une surface Σ_0 orthogonale à la congruence des lignes de courbure planes C;

2° Une des courbes C;

3° Les cercles osculateurs aux courbes C en leurs points de rencontre avec Σ_0. Inversement, ces éléments étant donnés arbitrairement, de manière pourtant que les cercles forment un système admettant une série de surfaces orthogonales, il existe un système triple correspondant, répondant à la question, et que l'on peut déterminer à l'aide d'une quadrature.

Deux cas particulièrement intéressants sont ensuite traités :

1° Pour un des systèmes de surfaces dont les lignes de courbure sont planes, l'angle d'une surface et du plan d'une ligne de courbure est le même quelles que soient la surface et la ligne considérées : dans ce cas, la recherche du système triple se ramène à la question de la déformation infinitésimale des surfaces à courbure constante.

2° L'angle dont il est question ci-dessus est le même quelle que soit la ligne de courbure sur une surface donnée, mais varie avec la surface : on ramène le problème à la question de la déformation infinitésimale des surfaces dont un système de lignes asymptotiques est à torsion constante.

Dans les deux cas, il suffit d'effectuer une quadrature pour obtenir une infinité des systèmes cherchés.

A. Leffler. — Sonia Kovalevsky. (201-212).

Notice nécrologique de Mme Kovalevsky (décédée le 10 février 1891).

G. Pirondini. [O3*j*]. — Sur la détermination des courbes pour lesquelles le rapport de la courbure à la torsion est une fonction connue de l'arc. (213-232).

On sait qu'une propriété caractéristique de l'hélice est d'être telle que le rapport de la courbure à la torsion est constant. Le but de cette Note est de traiter de la détermination d'une courbe pour laquelle ce rapport est une fonction donnée de l'arc, et d'en faire plusieurs applications.

La courbe cherchée peut être considérée comme une géodésique d'une certaine développable (développable rectificatrice); la relation donnée permet alors d'écrire une équation différentielle à laquelle doit satisfaire le développement de son arête de rebroussement, quand la surface elle-même est développée sur un plan.

D'autre part, la correspondance entre deux points correspondants (situés sur une même génératrice) de la courbe L et de l'arête de rebroussement L_0 est intéressante à considérer : le calcul montre que le rayon de courbure ρ_0 de L_0 et le rapport des rayons de torsion $\frac{r_0}{r}$ peuvent s'exprimer à l'aide du rapport $\frac{r}{\rho}$ et de ses premières dérivées par rapport à l'arc.

L'auteur fait des applications de ces deux remarques à des cas particuliers simples. Comme d'une relation entre l'arc, les rayons de courbure et de torsion et leurs dérivées de L_0, on peut en déduire une entre les éléments analogues de L, il observe que l'on obtient ainsi des familles de courbes satisfaisant à certaines relations spéciales.

L'article se termine par la recherche de la relation $\frac{\rho}{r} = f(s)$ à laquelle satisfait une géodésique quelconque d'une développable, lorsque cette relation est donnée pour l'une d'entre elles; suivent quelques exemples.

B. Klein. [L' 16*a*). — Théorie des triplets d'éléments de figures élémentaires du premier rang. (Troisième Partie). (233-246).

Cette troisième Partie est consacrée à une relation projective qu'on peut établir entre le domaine des triplets et l'espace. Le domaine des triplets d'une figure élémentaire est en effet une multiplicité géométrique où l'on retrouve des relations analogues à celles qui existent dans notre espace entre points et plans : c'est ainsi que l'on peut faire correspondre aux triplets portés par une conique les plans de l'espace : à l'infinité simple de triplets singuliers (triplets réduits à un point) qui existe alors, correspond l'infinité simple des plans osculateurs d'une cubique gauche. On arrive ainsi, par une voie nouvelle, à la théorie des courbes; mais on peut aussi, de cette théorie supposée connue, tirer les propriétés du domaine des triplets d'une figure quelconque du premier rang. Enfin, le dernier paragraphe du Mémoire est consacré à la construction des points d'intersection d'un plan et d'une cubique gauche, considérés comme les points triples d'un réseau de triplets de points sur une conique; construc-

tion tout analogue à celle des points d'intersection d'une droite et d'une conique, considérés comme les points doubles d'une involution.

G. Pirondini. [O 4 *c*). — Quelques théorèmes sur les surfaces développables. (247-253).

L'auteur démontre le théorème suivant :

Les arêtes de rebroussement des développables parallèles à une développable donnée engendrent une développable dont elles sont des géodésiques parallèles.

Les formules d'un Mémoire précédent lui permettent d'exprimer ici les rayons de courbure et de torsion et l'arc d'une quelconque de ces courbes en fonction des éléments correspondants de l'une d'entre elles : il est alors aisé de montrer que le cylindre et le cône sont les seules développables dont une série de géodésiques parallèles sont égales ou semblables.

Une étude spéciale est nécessaire pour le cas où la développable donnée est un cône.

G. Torelli. [H 2]. — Recherche du rapport entre les discriminants d'une équation différentielle algébrique du premier ordre et de sa primitive complète au moyen de la théorie des courbes planes rationnelles. (254-260).

Dans un précédent travail [*Contribuzione alla teoria delle equazioni algebrico-differenziali* (*Giornale di Mathematiche Battaglini*, 1886)], l'auteur s'était occupé de la relation

$$G = g k^2,$$

où G est le discriminant de l'équation $f_0 \omega^m + f_1 \omega^{m-1} + \ldots + f_m = 0$ (primitive complète), g celui de l'équation différentielle obtenue en éliminant la constante ω entre l'équation précédente et sa différentielle, k un polynome relativement aux dérivées partielles des f. Il avait pu former k pour m quelconque.

Il expose ici, pour obtenir l'expression de k, une méthode géométrique, utilisant la théorie des courbes planes rationnelles et la signification de la condition obtenue en égalant k à zéro.

C. Bigiavi. [F 7]. — Le rapport $\frac{\eta'}{\eta}$ considéré comme fonction du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, dans la théorie des fonctions elliptiques de Weierstrass. (261-268).

Un calcul assez simple, fondé sur les formules fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques et faisant intervenir en particulier l'invariant absolu J, permet de montrer que le rapport $\frac{\eta'}{\eta} = \lambda$ est une fonction uniforme de $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$.

De plus, cette fonction définie dans le demi-plan positif des τ a pour coupure essentielle l'axe réel. Cette fonction $\lambda(\tau)$ satisfait à la relation

$$\lambda\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=\frac{\alpha\lambda(\tau)+\beta}{\gamma\lambda(\tau)+\delta},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers tels que $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.

Pour étudier la correspondance entre τ et λ, l'auteur passe par l'intermédiaire de l'invariant $J=J(\tau)$; à un certain triangle curviligne du plan des τ, correspond un triangle curviligne du plan des J; d'autre part, λ se présente comme le quotient de deux intégrales de l'équation hypergéométrique :

$$J(1-J)\frac{d^2y}{dJ^2}+\frac{1}{6}(10-19J)\frac{dy}{dJ}-\frac{169}{144}y=0.$$

La relation fonctionnelle écrite plus haut permet alors de connaître partout cette correspondance entre τ et λ; τ considéré comme fonction de λ est une fonction à une infinité de valeurs.

L. Berzolari. [B 7 *c*]. — Les conditions invariantes pour que deux formes binaires du cinquième degré aient quatre racines communes. (269-288).

La condition nécessaire et suffisante pour que deux formes binaires aient une racine commune peut s'exprimer en égalant à zéro un certain invariant. De même en exprimant qu'un covariant à une, deux, ... séries de variables s'annule identiquement, on obtient l'ensemble des conditions pour que deux formes aient deux, trois, ... racines communes; soient Θ, Φ, Ψ ces covariants. Un tel covariant peut s'exprimer comme *composition* (*aggregati di spinte Ueberschiebung*) des deux formes binaires, et l'on a fait cette détermination dans les cas les plus simples (3e, 4e, 5e degré; 1 ou 2 racines). On a montré, de plus, que la condition pour que deux formes binaires de même degré aient trois racines communes, peut s'exprimer soit en disant que Φ doit s'annuler, soit en disant que Θ et un certain invariant Φ_r s'annulent : la démonstration de ce fait est basée sur ce que, pour des formes dont les coefficients sont absolument indépendants, la condition $\Phi_r=0$ n'est pas une conséquence nécessaire de $\Theta=0$. L'extension de ce théorème à un nombre quelconque de racines est probable; on le démontre ici pour quatre.

Après avoir étendu une formule de Gordan, relative aux covariants de deux formes, l'auteur complète l'étude du système de deux formes binaires du cinquième ordre auxquelles il applique cette formule.

Puis il développe explicitement le covariant Ψ, dont la forme est beaucoup plus complexe que celle des précédents : il vérifie le résultat en montrant que, pour deux formes binaires ayant quatre racines communes, Ψ s'annule identiquement. Enfin, il indique, dans le dernier paragraphe, un système particulier de formes du cinquième ordre ayant seulement trois racines communes et pour lequel l'invariant, dont il a été question plus haut, est différent de zéro, ce qui permet de démontrer le théorème ci-dessus indiqué.

G. Ascoli. [D 1 *d*]. — Sur les fonctions de deux variables réelles

qui croissent ou décroissent toujours du côté positif de chacun des axes, dans une portion de plan à distance finie. (289-333).

Ce Mémoire a pour but l'étude des fonctions continues de deux variables réelles $f_1(x, y)$ qui, dans une aire connexe à distance finie A, croissent constamment suivant chacun des deux axes :

1. Si l'on suppose, tout d'abord, pour simplifier, que le contour n'est rencontré qu'en deux points, au plus, par une parallèle à un axe, on voit qu'il peut être inscrit dans un rectangle et qu'il se compose de quatre portions, dont chacune est une *branche* de courbe simplement croissante ou simplement décroissante. Sur une branche croissante tracée dans l'aire, la fonction est croissante. Elle atteint son maximum et son minimum sur deux portions bien déterminées du contour, et prend toute valeur intermédiaire une infinité de fois. On peut énoncer des propriétés tout analogues pour les fonctions f_2, f_3, f_4, qui croissent suivant les directions

$$-X, \quad +Y; \qquad -X, \quad -Y; \qquad +X, \quad -Y.$$

2. Supposons que la fonction f_1 atteigne une seule fois sa limite supérieure M et sa limite inférieure m, en deux points P, Q, la fonction $f_1(s)$ des points du contour allant constamment en croissant de Q à P.

L'ensemble des points où $f_1(x, y) = \text{const.}$ est une ligne connexe décroissante dont les extrémités sont sur le contour : *ces courbes sont rectifiables.* Si la suite $y_1, y_2 \ldots, y_r, \ldots$ tend, soit en croissant, soit en décroissant, vers y', la courbe $f_1(x, y) = f_1(x_1, y_r)$ tend uniformément vers la courbe $f_1(x, y) = f_1(x_1, y')$.

L'aire A est le lieu de la variété $f_1(x, y) = C$ (où $m \leqq C \leqq M$) : quelle que soit la grandeur $\sigma > 0$ donnée à l'avance, on peut déterminer η de façon que deux lignes quelconques $f_1(x, y) = C$, $f_1(x, y) = C - \eta$ (où $m < m_1 \leqq C \leqq M_1 < M$) n'aient pas une distance supérieure à σ; d'autre part, étant donnée une grandeur convenable η, la distance minima de deux lignes $f_1(x, y) = C$, $f_1(x, y) = C + \eta$ ($m_1 \leqq C \leqq M_1$) n'est pas *inférieure* à une quantité assignable qui s'annule avec η.

Les lignes $f_1(x, y) = C$ ($m \leqq C \leqq M$) sont *également continues.*

La fonction $s(C)$, longueur de la courbe $f_1(x, y) = C$ est définie dans l'intervalle (m, M) et l'on a $s(m + 0) = s(M - 0) = 0$. Quand ε tend vers 0, $s(C + \varepsilon)$ ne tend pas vers une limite inférieure à $s(C)$.

3. Si la fonction $f_1(s)$ prend plus de deux fois la même valeur, les courbes $f(x, y) = c$ peuvent se composer de plusieurs traits séparés les uns des autres; les théorèmes précédents doivent alors être modifiés.

4, 5. Une étude de la variété des fonctions croissantes d'une variable qui prennent les mêmes valeurs aux deux extrémités d'un intervalle précède l'étude de la variété des fonctions $f_1(x, y)$ qui prennent les mêmes valeurs sur le contour C_A : *cette variété n'est pas uniformément continue.* M. Janet.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI.

5e série; *Rendiconti.*
Tome V, 1896; 1er semestre.

Tacchini (*P.*) [U]. — Observations sur la planète Vénus, faites à l'Observatoire royal du Collège romain en novembre et décembre 1895. (3-4).

Volterra (*V.*) [R 8 *e*]. — (Réponse à la Note de M. Peano insérée dans ces *Rendiconti*, 1895, 2e semestre, p. 280). (4-7).

Tacchini (*P.*) [U]. — Latitude de Catane (Observatoire). (7-8). 37°30′13″,25 (± 0″,07).

Pincherle (*S.*) [D 2 *a*]. — Sur la validité effective de certains développements en série de fonctions. (27-33).

Soit la série

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \frac{d^n \varphi}{dx^n},$$

les α étant régulières autour de zéro, et φ arbitraire mais régulière aussi autour de zéro. On dit que la fonction φ appartient au champ fonctionnel de convergence de la série lorsqu'elle rend cette série uniformément convergente. Dans ce cas, la série représente une opération fonctionnelle sur φ. L'auteur démontre qu'une telle série admet, en général, un champ de convergence, pourvu que les coefficients soient finis dans un champ autour de O; ensuite il démontre que ces séries peuvent être de deux espèces; celles de l'une ont un champ de convergence auquel appartient toute fonction φ régulière autour de O; pour celles de l'autre, n'y appartiennent que les φ satisfaisant à des conditions. Une série (1) à coefficients différents de zéro peut représenter une quantité qui est constante pour toute fonction φ, et qui ne varie qu'en passant d'une φ à une autre; il suffit pour cela de prendre

$$\Sigma \lambda_n(x) \varphi^{(n)}(x),$$

où

$$\lambda_0 = a_0, \qquad \lambda_1 = a_1 - a_0 x, \qquad \ldots,$$

$$\lambda_n = \frac{1}{n!}\left[a_n - n a_{n-1} x + \binom{n}{2} a_{n-2} x^2 - \ldots - (-1)^n a_0 x^n\right],$$

avec les $a_0, a_1, \ldots,$ arbitraires.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXXV, p. 302 et t. XXXVI, p. 5

Cela posé, l'auteur applique ces résultats à la solution de l'équation

$$\psi + \frac{d\psi}{dx} = \varphi(x),$$

φ étant la fonction donnée. La série

$$\psi = \sum_1^\infty \varphi^{(x)}(x)$$

y satisfait formellement, mais elle est une série de seconde espèce, et il n'y a que les fonctions φ pour lesquelles

$$\lim \varphi^{(n)} = 0,$$

qui se trouvent dans le champ de convergence. L'auteur transforme la série en une autre dont le champ de convergence comprend toute fonction régulière autour de zéro, et la modification employée par l'auteur consiste à considérer la série

$$e^x \sum_0^\infty (e^{-x} + \lambda_n)\, \varphi^{(n)}(x) = \sum_0^\infty \varphi^{(n)}(x) + e^x \sum_0^\infty \lambda_n \varphi^{(n)},$$

où, pour les a qui figurent dans les λ, on prend

$$a_n = -n!$$

Zona (*T.*) [U]. — Nouvelle étude sur l'orbite de la comète 1890, IV. (33-34).

Levi-Civita (*T.*) [T 5 *a*]. — Sur la distribution induite en un cylindre indéfini par un système symétrique de masses. (34-40).

Suite de la Note insérée au Tome IV, 2e semestre (1895), p. 332. Ici l'auteur trouve l'expression de la densité de la distribution induite

$$\mu(\zeta) = -\int_0^\infty \frac{dt}{h_1(t)} \int_{-\infty}^\infty \cos \pi t (s - \zeta)\, P(s, a)\, ds,$$

formule qui constitue l'inversion de l'intégrale définie

$$\int_{-\infty}^\infty \mu(\zeta)\, d\zeta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}} = P(z, a),$$

qui figurait dans la Note précédente.

Majorana (*Q.*) [T 7 *a*]. — Action d'un rayon lumineux, périodiquement interrompu, sur le sélénium. (45-52).

Tacchini (*P.*) [U]. — Sur les observations solaires faites à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le quatrième semestre de 1895. (65-67).

Pizzetti (*P.*) [U 7]. — Sur un point de la théorie de Laplace relative à la figure d'équilibre d'une masse fluide en rotation. (109-116).

Laplace a démontré (*Méc. cél.*, Livre III) que la surface du fluide doit être un ellipsoïde de rotation :

1° Dans le cas d'une masse homogène, qui soit fluide entièrement ou seulement à la surface;

2° Dans le cas où la masse soit fluide et non homogène, et où la densité diminue avec continuité du centre à la surface, par couches peu différentes de sphères concentriques.

Cela avec une approximation qui néglige les carrés des distances entre la surface et la sphère.

La démonstration de Laplace relative au dernier cas prête à des objections, et l'auteur en donne une autre.

Bianchi (*L.*) [O 6 *k*]. — Sur une classe de surfaces liées aux surfaces pseudo-sphériques. (131-137).

La recherche des surfaces applicables sur la sphère se réduit, comme l'a observé M. Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, p. 321), à déterminer les surfaces Σ telles que les segments de normale compris entre les centres principaux de courbure soient vus d'un point fixe O de l'espace sous un angle droit; et l'équation aux dérivées partielles, caractéristique pour ces surfaces, est

$$(\rho' - p)(\rho'' + p) = p^2 - 2q, \tag{1}$$

ρ', ρ'' étant les rayons principaux de courbure, p la distance de O au plan tangent et $2q$ la distance de O au point de contact de ce plan. M. Bianchi observe que, lorsqu'on veut se tenir au cas réel, ces surfaces Σ, au lieu d'avoir relation avec les surfaces applicables sur la sphère, l'ont avec celles applicables sur les surfaces pseudo-sphériques. Étant $\beta = \text{const.}$ un système de lignes géodésiques parallèles sur une surface pseudo-sphérique S, et $\alpha = \text{const.}$ leurs trajectoires orthogonales, et les paramètres α, β déterminés de manière à avoir sur S

$$ds^2 = d\alpha^2 + e^{-2\alpha} d\beta^2,$$

si ξ, η, ζ sont les coordonnées d'un point de S, on a celles d'un point variable sur Σ par les formules

$$x = e^{\alpha}\left(\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\xi}{\partial\beta}\right), \qquad y = e^{\alpha}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right), \qquad z = e^{\alpha}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right).$$

Sur une telle surface, les lignes de courbure correspondent aux lignes de courbure de la surface S dont elle est déduite. L'image sphérique des lignes de courbure de Σ est la même que celle d'une surface pseudo-sphérique.

Menons par O la perpendiculaire OP par chacune des normales m à la surface Σ, et avec le centre en P et dans le plan normal à m décrivons le cercle qui passe par O. Ce système de cercles admet une série ∞ de surfaces orthogonales Σ' appartenant à la même classe de surfaces caractérisées par l'équation (1).

Ces propriétés et d'autres encore sont ici données sans les démonstrations.

Tacchini (*P.*) [U]. — Sur le nuage solaire du 10 et du 11 février 1896. (138-139).

Millosevich (*E.*) [U]. — Observations des comètes Perrine, 16 novembre, et Lamp-Perrine, 13 février, faites à l'équatorial de l'Observatoire royal du Collège romain. (142-143).

Peano (*G.*) [R 8 *e*]. — Sur le mouvement du pôle terrestre. (163-168).

Exposition en coordonnées cartésiennes des résultats obtenus par la méthode de Grassmann dans la Note de l'auteur même, insérée dans ces *Atti*, 1895 (même titre).

Volterra (*V.*) [C 2 *k*]. — Sur l'inversion des intégrales définies. (177-185).

Étant $S_0(x, y)$ une fonction finie et continue de x, y, on construit progressivement les fonctions

$$S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi) S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi, \tag{1}$$

où $i = 1, 2, \ldots$, et $1 < j < i$, la valeur de la fonction ne dépendant pas du nombre j, pourvu qu'il soit pris entre les limites indiquées. La série

$$F_0(x, y) = \sum_0^\infty S_i(x, y)$$

est uniformément convergente. On construit successivement, comme ci-dessus, les fonctions

$$F_i(x, y) = \int_x^y F_{i-j}(x, \xi) F_{j-1}(\xi, y)\, d\xi. \tag{2}$$

En formant la série

$$T_0(x, y) = \sum_0^\infty F_i(x, y),$$

qui est aussi convergente, on a

$$T_0(x, y) = S_0(x, y).$$

Ces formules réciproques

$$S_0(x, y) = \sum_0^\infty F_i(x, y),$$

$$F_0(x, y) = \sum_0^\infty S_i(x, y),$$

les F_i, S_i étant données par les égalités (2), (1), donnent le moyen de calculer l'une des fonctions S_0, F_0 par des quadratures, lorsque l'autre est donnée. On a aussi

$$F_0 - S_0 = \int_y^x F_0(x, \xi) S_0(\xi, y)\, d\xi = \int_y^x F_0(\xi, y) S_0(x, \xi)\, d\xi.$$

Par ce théorème on peut résoudre le problème de l'inversion des intégrales définies.

Une extension de cette question est la suivante :

Formons les fonctions

$$S_{r,s}^{(i)}(x, y) = \int_y^x \sum_1^n {}_h S_{r,h}^{i-1}(x, \xi) S_{h,s}^{i-1}(\xi, y)\, d\xi$$

$(r, s = 1, 2, \ldots, n)$, les $S_{r,s}^{(0)}$ étant finies et continues. Les équations fonctionnelles

$$\varphi_h(z) = f_h(z) + \int_\alpha^z \sum_1^n {}_r f_r(y) S_{h,s}^0(y, z)\, dy \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

peuvent s'invertir par les formules

$$f_h(z) = \varphi_h(z) - \int_\alpha^z \sum_1^n {}_r \varphi_r(x) F_{h,r}^0(x, z)\, dz \qquad (h = 1, \ldots, n),$$

les $F^{(0)}$ étant données par

$$F_{r,s}^0(x, y) = \sum_0^\infty {}_i S_{r,s}^i(x, y).$$

Pascal (*E.*) [B 1 *a*]. — Sur un théorème de M. Netto, relatif aux déterminants et sur un autre théorème analogue. (188-191).

Enriques (*F.*) [M_2 8]. — Sur les surfaces algébriques dont les courbes canoniques sont hyperelliptiques. (191-197).

Ces surfaces sont :

1° Celles qui ont un faisceau rationnel de courbes de genre 2;

2° Celles qui sont représentables sur le plan double avec une courbe de diramation du huitième ordre (le genre p de la surface est $= 3$);

3° Celles qui sont représentables sur le plan double avec une courbe de diramation du dixième ordre ($p = 6$).

Tacchini (*P.*) [U]. — Sur les observations solaires faites à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le premier trimestre de 1896. (235-236).

Pincherle (*S.*) [H 11]. — Opérations distributives : l'intégration successive. (236-242).

Étant

$$\alpha(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

soient D le symbole de dérivation, D^{-1} celui d'intégration (indéfinie) et D^{-2}, D^{-3}, ... ceux des intégrations successives, les constantes étant déterminées de manière que si α devient zéro d'ordre m pour $x = 0$, D^{-p} devienne zéro d'ordre $m + p$. On a

$$D^{-1}\alpha = x a - \frac{x^2}{2!} D\alpha + \frac{x^3}{3!} D^2\alpha - \ldots,$$

série convergente absolument et uniformément dans le cercle de rayon $\frac{r}{2}$, r étant le rayon de convergence de α. Généralement

$$D^{-n}\alpha = \frac{x^n}{(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^\nu}{(n+\nu)\nu!} D^\nu \alpha.$$

On a aussi

$$D^{-m}\alpha\beta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m+n-1}{n} D^n\alpha\, D^{-(m+n)}\beta.$$

Les séries

$$\lambda_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \ldots$$

étant convergentes dans un cerle de rayon r, formons la série

$$S(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n D^{-n}\varphi,$$

où φ est une série convergente dans le même cercle Sous une certaine condition pour les λ, cette série est convergente absolument; et si elle est nulle pour toute fonction φ, tous les coefficients doivent être nuls, ce qui permet de lui appliquer la méthode des coefficients indéterminés.

Berzolari (*L.*) [H 10 *e* ref. Q 2]. — Sur les équations différentielles des quadriques d'un espace de n dimensions. (247-254).

La recherche des surfaces algébriques d'ordre m tangentes en un point donné à une surface donnée équivaut à rechercher les équations aux dérivées partielles d'ordre minimum auxquelles satisfont les surfaces d'ordre m.

Les quadriques de l'espace ordinaire satisfont à deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre; dans l'espace S_n les quadriques satisfont à

$$\frac{1}{6} n(n^2 - 7) + 1,$$

équations aux dérivées partielles du troisième ordre, ne contenant pas les coordonnées ni les dérivées partielles du premier ordre. L'auteur obtient ces équations par une méthode différente de celle qui serait une extension de la méthode suivie par Halphen dans le cas de l'espace ordinaire. Cette méthode est fondée sur une formule qu'il établit d'abord.

Étant $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z$ les coordonnées cartésiennes d'un point de S_n, on a pour une quadrique

$$z = L \pm \Phi^{\frac{1}{2}},$$

étant L et Φ des polynomes rationnels des degrés 1 et 2 respectivement; en écrivant Φ sous forme homogène par l'introduction d'une autre coordonnée $x_n = 1$, soit

$$\Phi = \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k,$$

et formons le déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_{n-1}} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}^2} \end{vmatrix}.$$

En indiquant par $Z^{(1,2,\ldots,r)}$ le mineur formé par les r premières lignes et colonnes, on a

$$(1) \qquad Z^{(1,2,\ldots,r)} = \Phi^{\frac{r+2}{2}} \sum_{i=1}^{i=n-r} \sum_{j=1}^{j=n-r} \Delta_{ij} x_{r+i} x_{r+j},$$

où, lorsque r est impair, il faut ajouter le double signe, et où

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+j} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & a_{2,r+j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+j} \\ a_{r+i,1} & \cdots & a_{r+i,r} & a_{r+i,r+j} \end{vmatrix}.$$

Avant d'appliquer la formule (1) au sujet principal de cette Note, l'auteur observe qu'on peut en déduire une expression de la courbure de Kronecker sous la forme

$$-D\Phi^{-\frac{n+1}{2}} \left(1 + \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

où D est le déterminant de Φ.

Puis il trouve les équations aux dérivées partielles des quadriques, qui sont de deux types. Ayant posé

$$z_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k},$$

$$z_{ikl} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l},$$

ces équations sont

$$(2)\qquad 2\, z_{\lambda\mu}\, z_{\mu\mu}\, z_{\lambda\lambda\lambda} + z_{\lambda\lambda}^2\, z_{\mu\mu\mu} - 3\, z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu}\, z_{\lambda\lambda\mu} = 0.$$

$$(3)\qquad z_{\lambda\lambda\lambda}(4\, z_{\lambda\mu}\, z_{\lambda\nu} - z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\nu}) - 3\, z_{\lambda\lambda}(z_{\lambda\lambda\mu}\, z_{\lambda\nu} + z_{\lambda\lambda\nu}\, z_{\lambda\mu} - z_{\lambda\mu\nu}\, z_{\lambda\lambda}) = 0,$$

où λ, μ, ν sont trois quelconques des valeurs $1, 2, \ldots, n-1$.

Bortolotti (*E.*) [H 12]. — Sur les déterminants de fonctions dans le calcul des différences finies. (254-261).

Étant

$$\nabla(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 & \cdots & \Delta y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta^{n-1} y_1 & \Delta^{n-2} y_2 & \cdots & \Delta^{n-1} y_n \end{vmatrix},$$

et ayant posé symboliquement

$$\theta y = y + \Delta y,$$

d'où il résulte aussi la signification des symboles θ^2, θ^3, ..., on a que, si u_1, u_2, ..., u_μ; v_1, v_2, ..., v_ν sont des fonctions d'une variable x, et si l'on pose

$$w_1 = \nabla(u_1, u_2, \ldots, u_\mu, v_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$w_\nu = \nabla(u_1, u_2, \ldots, u_\mu, v_\nu),$$

il est

$$\nabla(u_1, u_2, \ldots, u_\mu;\ v_1, v_2, \ldots, v_\nu) = \frac{\nabla(w_1, w_2, \ldots, w_\nu)}{\prod_{r=1}^{r=\nu} \theta^r \nabla(u_1, u_2, \ldots, u_\mu)}.$$

Posons

$$z_k = (-1)^{n+k} \frac{\nabla(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)}{\nabla(y_1, y_2, \ldots, y_n)},$$

et indiquons par ∇_{-1} le déterminant analogue à Δ, où, au lieu de l'opération θ, entre l'opération θ^{-1}; on trouve que y_k est proportionnel à

$$(-1)^{n+k} \frac{\nabla_{-1}(z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n)}{\nabla_{-1}(z_1, z_2, \ldots, z_n)}.$$

Les systèmes des y et des z sont ainsi dans une relation de réciprocité, et l'auteur les appelle systèmes *adjoints* l'un de l'autre. Il démontre aussi d'autres propriétés relatives aux déterminants ∇, et trouve, entre deux formes adjointes aux différences finies, une relation analogue à celle

$$v\, f(u) - u\, g(v) = \psi(u, v)$$

qui a lieu entre les premiers membres de deux équations différentielles linéaires adjointes, ψ étant une fonction bilinéaire homogène de u, v et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$.

Volterra (*V.*) [C 2 *k*]. — Sur l'inversion des intégrales multiples. (289-300).

Extension de la méthode employée par l'auteur dans sa Note insérée dans ce même Tome à la page 177.

Pincherle (*S.*) [H 11]. — Opérations distributives : les équations différentielles linéaires non homogènes. (301-306).

En considérant le premier membre d'une équation différentielle linéaire homogène

$$F = 0$$

comme un symbole d'opération (distributive), l'auteur montre que l'opération inverse F^{-1} peut se représenter au moyen des séries ordonnées selon les puissances négatives du symbole D, qu'il a considérées dans sa Note précédente (*voir* ce même Tome, p. 236). Il trouve que l'intégrale principale de l'équation

$$F(\psi) = \pi_0 D^n \psi + \pi_1 D^{n-1} \psi + \ldots + \pi_{n-1} D \psi + \pi_n \psi = \varphi$$

(les π étant des éléments de fonctions analogues régulières autour de o, et π_0 n'étant pas nul dans le champ considéré) est exprimée par

$$\psi = \frac{1}{\pi_0} D^{-n} \varphi + \frac{n\pi_0' - \pi_1}{\pi_0^2} D^{-n-1} \varphi + \ldots + \lambda_\nu D^{-\nu} \varphi + \ldots,$$

où les λ sont déterminées par la relation récurrente

$$\lambda_{\nu+n} = -\frac{1}{\pi_0}\left[F(\lambda_\nu) + F'(\lambda_{\nu-1}) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} F^{(n-1)}(\lambda_{\nu+n-1})\right]$$

et par les conditions

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0, \qquad \lambda_n = \frac{1}{\pi_0}.$$

Pascal (*E.*) [D 4]. — Fonctions holomorphes dans le champ elliptique. (319-323).

Construction d'une fonction ayant un nombre infini de zéros sur la surface riemanienne de genre un, et seulement deux points singuliers essentiels aux deux points à l'infini des deux plans constituant la surface. L'auteur commence par démontrer une formule analogue à celle de Weierstrass, et trouve, pour la fonction F holomorphe dans le champ elliptique,

$$F(u) = C e^{\int G(u)\,du} \prod_n \left(\frac{\sigma(u - a_n)}{\sigma(u)} e^{\int P_k(u)\,du}\right),$$

étant $P_k(u)$ une fonction rationnelle entière de $p(u)$ et $p'(u)$. Puis il applique cette formule à la construction d'une fonction qui constitue une généralisa-

tion de la fonction σ de Weierstrass, et qu'il appelle $\Sigma(u)$, en trouvant

$$\Sigma(u) = \prod_{mn} \frac{\sigma(u - u_{mn})}{\sigma(u)} e^{\int p_1(u)\,du},$$

où

$$u_{mn} = \frac{1}{2m\omega + 2n\omega'}.$$

Tacchini (*P.*) [U]. — Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le premier trimestre de 1896. (341-342).

Bortolotti (*E.*) [H 12]. — La forme adjointe d'une forme linéaire donnée aux différences. (349-356).

Étant

$$A(f) = a_0(x) f(x) + a_1(x)\theta f(x) + \ldots + a_{n-1}(x)\theta^{n-1} f(x) + \theta^n f(x)$$

une forme linéaire aux différences, où θf représente $f + \Delta f$, ou bien $f(x+1)$, la forme que l'auteur appelle adjointe est

$$\begin{aligned} A_{-1} f &= a_0(x) f(x) + a_1(x-1) f(x-1) + \ldots + f(x-n) \\ &= a_0(x) f(x) + \theta^{-1}[a_1(x) f(x)] + \ldots + \theta^{-(n-1)}[a_{n-1}(x) f(x)] + \theta^{-n} f(x), \end{aligned}$$

et il y a pour ces formes plusieurs propriétés analogues à celles qui ont lieu pour une équation différentielle par rapport à son adjointe de Lagrange. Dans la recherche de ces propriétés, l'auteur emploie les résultats obtenus dans sa Note précédente (*voir* ce même Tome, p. 25).

Tedone (*O.*) [T 2 *a*]. — Sur la démonstration de la formule qui représente analytiquement le principe de Huygens. (357-360).

En employant une méthode d'intégration due à M. Volterra, et en regardant x, y, z et t comme coordonnées d'un point dans un espace à quatre dimensions, l'auteur trouve une formule plus générale de celle de Kirchhoff et ensuite la formule même de Kirchhoff.

L'équation considérée est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X,$$

plus générale que celle qui se rapporte à la formule de Kirchhoff et qui s'y réduit pour $X = 0$. L'auteur considère une portion S_4' de l'espace S_4, limitée par la variété conique à trois dimensions

$$a(t_1 - t) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = r,$$

la variété cylindrique c

$$r^2 = \varepsilon^2,$$

ε étant arbitrairement petit, et une variété Σ arbitraire, mais rencontrée en un seul point par toute parallèle à l'axe t. Par une transformation d'une intégrale relative à l'espace S_1' en une intégrale relative à la surface, et faisant diminuer ε indéfiniment, il trouve

$$\omega a^2 u(x_1, y_1, z_1)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{S_1} \frac{N}{r} dS_1 - \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} - a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right) \right] d\Sigma$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} u \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial n} + a^2 \frac{t_1 - t}{r^2} \frac{\partial z}{\partial n} \right) d\Sigma,$$

n étant la normale intérieure, et ω la surface d'une sphère à trois dimensions ayant pour rayon l'unité.

Tedone (*O.*). [T 2 *a*]. — Sur l'intégration des équations de l'élasticité. (460-467).

Application à ces équations de la méthode employée par l'auteur dans la Note précédente (ce Tome, p. 457). Les valeurs de u, v, w au point (x_1, y_1, z_1, t_1) sont déterminées en fonction des valeurs de u, v, w et de leurs dérivées sur deux portions d'une variété de trois dimensions (*voir* aussi la Note insérée dans ce même Tome, 2e semestre, p. 58).

Del Lungo (*C.*). [S 4 *b*]. — Sur la théorie cinétique des gaz. (467-473).

Le principe admis par Maxwell, que les composantes des vitesses suivant trois directions orthogonales sont indépendantes est vrai pour un système isolé de molécules gazeuses, constituant une masse homogène et en repos.

Tome V. 1896 : 2e semestre.

Levi-Civita (*T.*). [R 8 *a* α]. — Sur le mouvement d'un corps rigide autour d'un point fixe. (3-9).

L'auteur applique la théorie des groupes et détermine la nature du groupe transformant en elle-même la force vive T. Il trouve ainsi des groupes différents suivant que les moments principaux d'inertie sont égaux ou inégaux, et précisément, si

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{rs} x_r x_s$$

est l'expression de T en coordonnées de Lagrange, où les a_{rs} sont des fonctions des coordonnées seulement, en indiquant par $a^{(rs)}$ le complément algébrique de a_{rs} dans le déterminant a de ces coefficients, divisé par a, il démontre qu'en supposant que

$$\sum_1^n \lambda_r x_r^2 = \text{const.},$$

où les A sont des fonctions des x, soit une intégrale première du mouvement du système, la force vive T admet la transformation infinitésimale

$$Zf = \sum_1^n A_r p_r,$$

où

$$p_r = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad A_r = \sum_1^n {}_r a^{(r)} A_r.$$

Pour un corps rigide se mouvant autour d'un point fixe sans qu'il y ait des forces extérieures, l'auteur, en employant les paramètres rationnels de Rodriguez, trouve que la force vive admet les transformations infinitésimales

$$Z_1 f = \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2} x_1 U + \frac{1}{2}(x_2 p_3 - x_3 p_2),$$

$$Z_2 f = \frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{2} x_2 U + \frac{1}{2}(x_3 p_1 - x_1 p_3),$$

$$Z_3 f = \frac{1}{2} p_3 + \frac{1}{2} x_3 U + \frac{1}{2}(x_1 p_2 - x_2 p_1),$$

où

$$U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3.$$

Il y a trois cas, suivant les valeurs des moments principaux d'inertie A, B, C. Dans le cas (a) où A, B, C sont tous différents, le seul traité dans cette Note, on n'a que les trois transformations infinitésimales indépendantes $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$; le groupe G_3, à trois paramètres constitué par ces transformations, est semblable au groupe projectif de l'espace ordinaire, tranformant en elle-même une série réglée Γ appartenant à la sphère imaginaire

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0.$$

Les deux autres cas sont traités dans une autre Note (*voir* ce même Tome, p. 122).

Tedone (*O.*). [T 2 *a*]. — Sur les vibrations des corps élastiques. (58-65).

Note se rattachant à la Note insérée dans ce Tome, premier semestre, page 140. Ici l'auteur indique le moyen de trouver d'autres formules, où les dérivées de u, v, w par rapport à x, y, z se trouvent groupées comme dans les composantes des tensions.

Niccoletti (*O.*). [H 7 *c*]. — Sur la transformation des équations linéaires homogènes aux dérivées partielles du deuxième ordre à deux variables indépendantes. (94-99).

Énoncés sans démonstrations. Le travail est publié entièrement dans les *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa*, Tome VIII, 1899.

Siacci (*F.*). [R 8]. — Sur la stabilité de l'équilibre et sur une proposition de Lagrange. (121-122).

« De toutes les situations que prend successivement le système, celle où il a la plus grande ou la plus petite force vive est aussi celle où il faudrait le placer d'abord pour qu'il restât en équilibre. »

Cette proposition est fausse. L'inverse est vraie : Si le système passe par une position où il pourrait rester en équilibre, la force vive y est maximum ou minimum; et c'est cela que Lagrange a réellement démontré.

Levi-Civita (*T.*). [R 8 *a* α]. — Sur le mouvement d'un corps rigide autour d'un point fixe. (122-127).

Suite de la Note, insérée dans ce Tome, à la page 3. Avant de traiter les deux cas qui restaient à examiner, l'auteur applique la théorie des groupes à la recherche des fonctions des forces, pour lesquelles on ait, en dehors de l'intégrale des aires, deux autres intégrales linéaires des équations du mouvement; et il trouve qu'il ne peut exister que des fonctions potentielles imaginaires qui satisfassent à cette condition. C'est toutefois un cas remarquable, et les équations (qui, dans le cas réel, seraient celles du mouvement), dans lesquelles les trois constantes A, B, C sont distinctes, peuvent s'intégrer par des quadratures.

Suit l'étude des deux cas (*voir* Note précédente) :

(*b*). A = B. La force vive T ne changeant pas par la permutation de x_1, x_2, admet, outre les transformations infinitésimales $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$, celles obtenues en changeant x_1, p_1, avec x_2, p_2; comme $Z_1 f$, $Z_2 f$ se changent l'une en l'autre, et $Z_3 f$ en donne une nouvelle $Z_3' f$, on obtient un groupe G_4 à quatre paramètres, déterminé géométriquement par la condition de transformer en elle-même la quadrique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$$

en laissant fixes deux génératrices de la série Γ. Tout sous-groupe $\varkappa_2$ de G_4 détermine un cas d'intégrabilité des équations du mouvement.

(*c*) A = B = C. On a un groupe G_6, semblable à celui des mouvements en Géométrie elliptique. Dans ce cas, les équations du mouvement sont, à moins de quadratures, équivalentes à celles du mouvement d'un point matériel, et à tout cas d'intégrabilité de ces dernières en correspond un pour celles du mouvement autour d'un point fixe du corps rigide ayant A = B = C.

Aux cas intégrables du mouvement d'un point sur une surface correspondent des cas intégrables du mouvement d'un corps rigide avec deux degrés de liberté.

Levi-Civita (*T.*). [R 8]. — Sur le mouvement des systèmes avec trois degrés de liberté. (167-171).

Le système est supposé sujet à des liens tels que, lorsqu'il n'y a pas de forces, on ait les trois intégrales des aires. La force vive T admet un groupe Γ, à trois paramètres, dont les transformations infinitésimales $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$ peuvent présenter deux cas :

1° Elles sont toutes indépendantes;

2° Deux sont indépendantes et la troisième en est une combinaison linéaire.

Dans le premier cas, la force vive peut se réduire à la forme qui est propre à un corps rigide ayant un point fixe. Dans le second, elle peut se réduire à la forme

$$T = \frac{1}{2} H^2 (x_1^2 - x_2^2 + x^2)(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2).$$

Garbasso (*A.*). [T 7 *c*). — Sur un point de la théorie des rayons cathodiques. (259-253).

L'hypothèse des vibrations transversales ne peut expliquer la déformation des rayons cathodiques dans un champ magnétique uniforme.

Brioschi (*F.*). [F 5 *d*]. — Sur les équations modulaires. (333-340).

Étant

$$\psi_2(u), \quad \psi_3(u), \quad \psi_4(u)$$

les fonctions de Halphen, et en posant

$$\psi = h^{\frac{1}{3}} \psi_2, \qquad \psi_4 = k \psi_3,$$

$$\rho = \frac{\psi_2^6}{\psi_3^3} = \left(\frac{\psi_2}{h}\right)^3,$$

on a

$$p(u) = \frac{1}{12} \rho [(k-1)^2 + 4h].$$

Dans la formule de multiplication

$$p(mu) = p(u) - \rho h^{\frac{2}{3}} \frac{\gamma_{m-1}^2 \gamma_{m+1}^2}{\gamma_m^3},$$

on a

$$\gamma_2 = 1, \qquad \gamma_3 = h^{\frac{1}{3}}, \qquad \gamma_4 = k$$

et les $\gamma_5, \gamma_6, \ldots$ sont des fonctions de γ_3, γ_4 et, par suite, de h, k. Ainsi on peut exprimer les $p(u), p(2u), p(3u), \ldots$ par ρ, h, k. Les invariants g_2, g_3 et le discriminant $\delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ peuvent aussi s'exprimer par ρ, h, k, et lorsque

$$u = v = \frac{2\omega}{n},$$

il y a entre h, k la relation

$$\gamma_n = 0.$$

Alors on peut éliminer ρ, h, k entre une fonction quelconque des $p(u)$, $p(2u), \ldots$, deux quelconques des trois quantités g_2, g_3, δ, et la $\gamma_n = 0$. Cela a été observé par l'auteur dans ces *Rendiconti* (1893). Mais cette élimination pour $n > 6$ présente des difficultés. L'auteur suppose qu'en appliquant les considérations précédentes et en profitant des modifications introduites par Greenhill, qui substitue à h et k deux nouvelles quantités (*Proceedings of the London Math. Soc.*, t. XXV, 1893-1894, et t. XXVII, 1896), des valeurs de $p(v), p(2v), \ldots$

et de celle de δ, on élimine ρ et une de ces quantités en obtenant pour $p(\nu)$, $p(2\nu)$, ... des expressions contenant une seule indéterminée. Alors, étant $p(\nu)$, $p(2\nu)$, ... racines d'une équation dont le premier membre est un polynome qui entre dans la formule de transformation, l'expression de l'indéterminée par les invariants de ce polynome équivaut à la résolution de l'équation qui, étant abélienne, est résoluble par radicaux. L'auteur traite les cas $n=7$, $n=9$, $n=13$.

Tacchini (*P.*). [U]. — Sur les observations solaires faites à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le deuxième trimestre de 1896. (341-342).

Tacchini (*P.*). [U]. — Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le deuxième trimestre de 1896. (342-343).

Del Re (*A.*). [P6*g*]. — Sur la projection successive d'une variété quadratique sur elle-même. (365-372).

Soit

$$\varphi = \Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$$

une quadrique de $n-1$ dimensions en coordonnées hyperplanaires; soient $u_i^{(h)}$ les coordonnées d'un hyperplan donné π_h et φ_h le résultat de la substitution des $u_i^{(h)}$ en φ. Les formules

$$(1) \qquad \rho\xi'_i = \varphi_h \xi_i - u_i^{(h)} \frac{\partial\varphi}{\partial u_i^{(h)}} \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

expriment que, dans l'espace S_n dont φ est l'absolu, les rayons issus du point ξ_i passent par ξ'_i après une réflexion sur l'hyperplan π_h. Ces formules, en supposant les $u_i^{(h)}$ fixes et les ξ, ξ' variables, représentent la projection de φ sur elle-même, faite du pôle P_h de l'hyperplan π_h.

Prenons m en relations analogues à la relation (1) :

$$\xi'_i = \varphi_1 \xi_i - (1)_i \frac{\partial\varphi}{\partial(1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\xi'_i = \varphi_m \xi_i - (m)_i \frac{\partial\varphi}{\partial(m)},$$

où, pour plus de simplicité dans les notations, on a supprimé les indices i et l'on a écrit (r) au lieu de $u^{(r)}$. La composition de ces substitutions $R_1, R_2, \ldots, R_m$ donne une substitution

$$\xi'_i = \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m \xi - (1)_i \Lambda_1 - (2)_i \Lambda_2 - \ldots - (m)_i \Lambda_m,$$

où les coefficients peuvent se déterminer par un calcul récurrent.

En examinant le cas où

$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{n-1}^2 - 4u_n u_{n+1},$$

on reconnait que les formules trouvées, qui donnent le groupe des transformations provenant des homologies harmoniques permutables avec le système polaire par rapport à une quadrique dans l'espace S_n, donnent en même temps le groupe des transformations provenant des inversions dans un espace S_{n-1}.

Dini (*U.*). [H 9 *d*]. — Sur les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. (381-392).

Dini (*U.*). [H 9 *d*]. — Sur les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. (421-433).

De la formule

$$\iint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\, dy = -\int \left(X \frac{\partial x}{\partial p} - Y \frac{\partial y}{\partial p}\right) ds,$$

en posant

$$X = UV,$$
$$Y = U_1 V_1,$$

puis en changeant U et U_1 respectivement en

$$\alpha \frac{\partial U}{dx} + \beta \frac{\partial U}{dx} + \gamma U + \delta, \qquad \alpha_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} + \gamma_1 U_1 + \delta_1,$$

ou $\alpha, \beta, \ldots, \alpha_1, \beta_1$ sont des fonctions régulières quelconques des variables x, y ou même de fonctions quelconques $\theta_1, \theta_2, \ldots$ et de leurs dérivées, l'auteur déduit deux autres formules qu'il applique ensuite à l'étude des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. Il trouve que, si dans un champ C les fonctions U, $a, b, c, \ldots$ sont régulières, et si U est une intégrale de l'équation

$$(1) \qquad a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} + c \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2h \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] + l = 0,$$

qui soit toujours égale à zéro sur le contour, une certaine quantité H, dont l'expression un peu compliquée n'est pas reportée ici, et qui contient des quantités (fonctions régulières) indéterminées, ne peut conserver en C un même signe; et par cela, si l'équation (1) est telle que H ait toujours un même signe, on conclut que, si l'on a $U = 0$ sur le contour, on aura $U = 0$ dans tout le champ.

Ainsi on peut dire que, si une équation

$$(2) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

est telle que la différence $U = z_1 - z_2$ de deux de ses intégrales est une intégrale d'une équation (1) pour laquelle H satisfait dans C aux conditions précédentes, les intégrales z de (2) sont déterminées par leurs valeurs au contour.

De là l'auteur déduit plusieurs conséquences. Puis il simplifie la manière de déterminer le signe de H en profitant des indéterminées qui y sont contenues, et traite certains cas particuliers qui conservent toutefois un notable degré de généralité : par exemple celui où, dans l'équation (1), $h = 0$, celui où h est une constante ou une fonction du premier degré en x, y, etc.

Il faut reconnaître que l'examen des signes des quantités H peut présenter de grandes difficultés provenant du fait que, dans ces quantités, figurent l'intégrale même U et ses dérivées; mais, dans certains cas, la nature du problème peut simplifier la recherche. Par exemple, lorsque l'équation est relative à des surfaces spéciales, la détermination du signe des quantités mentionnées peut être facilitée par le fait que le signe de

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2$$

correspond à celui de la courbure.

Dans la seconde Note, l'auteur indique certains moyens qui peuvent servir à mieux appliquer les résultats précédents. Ce sont des transformations de l'équation donnée, dont l'une consiste à la multiplier par une fonction régulière G indéterminée; l'autre, à substituer à U une autre fonction z liée à U par une relation

$$U = f(x, y, z),$$

ou à changer les variables indépendantes.

Puis il observe que, sous la condition, toujours supposée dans ce qui précède, de l'existence de U, les théorèmes relatifs à l'unicité de cette intégrale peuvent s'étendre à d'autres cas, où d'autres conditions remplacent celle des valeurs données au contour. Par exemple, pour les équations de la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + d\frac{\partial U}{\partial x} + e\frac{\partial U}{\partial y} + gU = g_0,$$

l'intégrale est déterminée en donnant U sur une partie du contour et $\frac{\partial U}{\partial p}$ sur l'autre.

Enfin, l'auteur déduit, des premières formules trouvées, d'autres formules qui contiennent comme cas particuliers les formules servant à trouver, par les méthodes de Riemann, les intégrales régulières des équations

$$\Delta^2 U = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + d\frac{\partial U}{\partial x} + e\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2}gU = 0$$

sous des conditions données au contour.

Burgatti (*P.*). [H9*e*]. — Sur certains invariants relatifs aux équations linéaires aux dérivées partielles du deuxième ordre, et sur leur usage. (433-439).

Étant donnée l'équation

$$(1)\qquad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial z} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0,$$

on sait reconnaître (DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, Chap. III) si l'intégration peut se réduire aux quadratures, lorsque $A = C = 0$. Pour le cas général, l'auteur recherche un moyen de reconnaître si une telle équation peut se réduire à une forme intégrable par un changement de variables.

Étant A_1, B_1, ... les coefficients de l'équation transformée par le changement

$$\xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y),$$

et λ_1, λ_2 les racines de l'équation

$$A\lambda^2 - 2B\lambda + C = 0,$$

on trouve que les expressions

$$I_1 = D\lambda_1 - E + A\lambda_1 \frac{\partial \log \lambda_1}{\partial x} + C \frac{\partial \log \lambda_1}{\partial y},$$

$$I_2 = D\lambda_2 - E + A\lambda_2 \frac{\partial \log \lambda_2}{\partial x} + C \frac{\partial \log \lambda_2}{\partial y}$$

sont conservées par la transformation à moins des facteurs

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \frac{1}{\frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial y}}, \qquad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \frac{1}{\frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \xi}{\partial y}}$$

respectivement, et ils s'appellent par cela *invariants partiels* (le produit AI_1I_2 est un vrai invariant). La considération de ces invariants partiels sert à établir les résultats suivants :

Une équation (1) dans laquelle $F = 0$, ayant égal à zéro l'un des invariants partiels, a pour solution une fonction arbitraire de

$$U(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial z}{\partial y},$$

ou de

$$V(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial z}{\partial y}.$$

L'intégration complète se réduit à l'intégration successive des deux équations du premier ordre

$$AV(z') + Dz' = 0, \qquad Uz = z'.$$

Si $F = 0$ et si l'équation a aussi égaux à zéro les deux invariants partiels, elle admet l'intégrale générale

$$z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta)$$

φ, ψ étant des fonctions arbitraires, et α, β solutions de $U(z) = 0$ et $V(z) = 0$ respectivement.

Par une transformation de variables pour laquelle on ait

$$U(\xi) = 0, \qquad V(\xi) = 0,$$

on peut réduire l'équation (1), ayant $F = 0$ et égal à zéro l'un des invariants

partiels (par exemple I_1), à la forme

$$AV(\xi)U(\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} - I_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial\eta} = 0,$$

qu'on réduit immédiatement aux quadratures. Et si $I_1 = I_2 = 0$, la même transformation réduit l'équation à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0,$$

ayant l'intégrale générale $\varphi(\xi) + \psi(\eta)$.

Enfin, en transformant l'équation (1) par la substitution

$$z = kz'$$

et en calculant pour la nouvelle équation les invariants partiels I'_1, I'_2, s'il y a une valeur de k satisfaisant aux deux équations

$$I_1 = 0, \qquad I_2 = 0,$$

le même changement de variables employé dans les cas précédents réduit l'équation à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} + \lambda z = 0.$$

Maggi (*G.-A.*). [O5*b*]. — Sur l'aire des surfaces courbes. (440-445).

On peut conserver la définition, critiquée par Schwarz, que l'on donne au moyen d'une surface polyédrique inscrite, en ajoutant les conditions que la surface ait en tout point une normale variable avec continuité, et que, pendant que tend vers zéro le rayon d'un cercle capable de renfermer chacune des faces, tende aussi vers zéro l'angle que la normale au plan de chaque face fait avec la normale à la surface en un point quelconque de la portion correspondante.

S. Rindi.

ACTA MATHEMATICA.

Tome XXV (1).

Painlevé (*P.*). — Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme. (1-86).

1. Après la fondation de la théorie générale des fonctions uniformes, il s'agissait moins de construire artificiellement des transcendantes nouvelles, que

(1) Voir *Bull. des Sciences math.*, 1901, t. XXXVI$_2$, p. 29.

de découvrir dans l'immense famille des transcendantes uniformes celles qui peuvent servir à intégrer les équations différentielles : c'est ainsi qu'après les fonctions elliptiques, on a découvert les fonctions abéliennes, les fonctions fuchsiennes et hyperfuchsiennes, etc. Mais le problème général suivant se posait :

Déterminer toutes les équations différentielles algébriques du premier ordre, puis du second, puis du troisième, etc., dont l'intégrale générale est uniforme.

On est amené d'ailleurs par l'étude de ce problème à rechercher d'abord les équations dont *l'intégrale générale a ses points critiques fixes*, c'est-à-dire indépendants des constantes d'intégration.

2. Ce problème a été traité dans le cas du premier ordre par Fuchs; mais il résulte d'une méthode d'intégration de M. Poincaré que ces équations ne sont pas susceptibles de définir des transcendantes nouvelles.

La difficulté est autrement profonde dans le cas du second ordre : elle provient de l'existence possible de singularités transcendantes mobiles; les conditions pour qu'elles soient fixes sont de nature transcendante et il est impossible, en général, de les former. Des recherches importantes de M. Picard lui avaient donné des équations à points critiques fixes; mais dans tous les cas les équations étaient intégrables et c'était l'intégration même qui mettait en évidence la fixité des points critiques.

La méthode constituée par M. Painlevé pour pousser plus loin cette étude consiste :

1° A trouver de nouvelles conditions nécessaires pour qu'une équation différentielle ait ses points critiques fixes;

2° A décider si ces conditions sont suffisantes ou non.

La première partie est d'un caractère simple et s'applique facilement à une équation d'ordre quelconque; la seconde est plus subtile et les complications qu'elle entraîne croissent avec l'ordre différentiel.

Le présent Mémoire a pour but essentiel de résumer les principaux résultats qu'a pu donner cette méthode.

M. Painlevé est parvenu à trouver toutes les équations différentielles de la forme

$$(\mathrm{E}) \qquad y'' = \mathrm{R}(y', y, x)$$

(R rationnel en y', algébrique en y, analytique en x), dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes.

Il indique d'abord toutes les transcendantes uniformes essentiellement nouvelles qui peuvent être définies par une équation de la forme précédente : les équations qui les donnent sont de trois types seulement et l'intégrale générale de chacune d'elles est méromorphe dans tout le plan : elle peut de plus être représentée par un quotient de fonctions entières qui vérifient chacune une équation différentielle du troisième ordre. Il est d'un grand intérêt de remarquer que l'on obtient là le premier exemple d'équations différentielles intégrées (au sens moderne du mot) *sans que l'on connaisse la manière dont les constantes d'intégration figurent dans l'intégrale générale*. L'intégrale considérée comme fonction de ces constantes est encore une fonction transcendante essentiellement nouvelle dont on ne connaît d'autres propriétés que celles qui dérivent de l'équation elle-même. D'autre part l'étude des transcendantes $y(x)$ a pu déjà être poussée assez loin pour fournir des propriétés relatives à la distribution des zéros, à la croissance pour $x = \infty$, etc.

4. Les équations (E) à points critiques fixes sont nécessairement de la forme $y'' = A(y, x)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x)$, et l'on peut préciser même d'une certaine manière la nature des fonctions A, B, C. On constitue alors un Tableau général (à trois parties), renfermant des équations de cette forme et dont on peut les déduire toutes au moyen de certains changements de variables; les quinze équations qui constituent ce Tableau définissent des intégrales qui en tant que fonction des constantes sont soit algébriques, soit semi-transcendantes (renfermant algébriquement une des constantes par un choix convenable de ces constantes), soit essentiellement transcendantes : les résultats sont indiqués pour chacune d'elles; celles pour lesquelles se présente le troisième cas peuvent seules conduire à des transcendantes nouvelles; les autres sont intégrables (réductibles aux quadratures ou aux équations linéaires).

5. Étant donnée une équation (E), comment reconnaître si ses points critiques sont fixes ? On suppose d'abord que l'expression R est non seulement algébrique, mais rationnelle en y; le coefficient A doit alors avoir un nombre de formes limité; pour chacune d'elles on peut trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les points critiques soient fixes; ces conditions s'expriment *algébriquement*, c'est-à-dire au moyen d'un *nombre fini de relations algébriques entre les coefficients et leurs dérivées jusqu'à un certain ordre;* quand elles sont remplies, on peut ramener algébriquement l'équation à une des équations canoniques contenues dans six Tableaux que donne M. Painlevé. On peut ainsi résoudre complètement le problème :

Déterminer explicitement toutes les équations $Y'' = R(Y', Y, X)$ (R *rationnel en* Y' *et* Y, *analytique en* X) *dont les points critiques sont fixes.*

Si l'on suppose R algébrique en y, une transformation algébrique élémentaire montre qu'on est ramené soit au cas précédent, soit au cas où R est rationnel en y, $\sqrt{P(y)}$, où P désigne soit $4y^3 - g_2 y - g_3$, soit $y(y-1)(y-x)$: la conclusion générale est que ou bien on sait reconnaître *algébriquement* si l'intégrale d'une équation (E) a ses points critiques fixes, ou bien on ramène algébriquement l'équation à une forme particulière

$$y'' = y'^2\left(\frac{6y - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} + \frac{\alpha}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}\right) + q(x)y' + r(x)\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3};$$

dans ce dernier cas, la condition pour que l'équation ait ses points critiques fixes est transcendante.

Des cas plus spéciaux sont étudiés ensuite, et conduisent à des conclusions précises relativement à la détermination des équations à points critiques fixes, des équations à intégrale uniforme, des équations susceptibles de définir des transcendantes essentiellement nouvelles (R rationnel en y', algébrique en y et x; R indépendant de x rationnel en y', algébrique ou rationnel en y).

Les conclusions de ces diverses études se trouvent résumées sous forme de réponses à cinq problèmes fondamentaux, relatifs à diverses hypothèses sur R.

6. Des méthodes analogues aux précédentes ont été appliquées par M. Painlevé aux équations du deuxième degré en y''; et, sans avoir complètement achevé l'énumération des types d'équations à points critiques fixes de cette nature, il a pu établir l'existence de transcendantes méromorphes vraiment

nouvelles engendrées par ces équations, et irréductibles aux transcendantes que définissent les équations (E) du premier degré en y' : on pourrait opérer de même pour les équations du troisième degré, du quatrième degré, etc., en y''. Mais il y a une nouvelle difficulté à traiter le problème sans se donner le degré en y' : la démonstration générale de deux théorèmes que signale M. Painlevé ferait faire un grand progrès à la solution du problème. L'auteur en a obtenu une démonstration rigoureuse en se bornant aux équations du premier degré en y''.

7. Quand on passe aux équations du troisième ordre, la recherche des conditions nécessaires pour que les points critiques soient fixes se fait aisément de la même manière. La question de savoir si les conditions sont suffisantes entraîne de nouvelles complications. L'introduction d'une équation, « simplifiée » de l'équation donnée, joue ici un rôle essentiel; plusieurs théorèmes indiquent les liens entre les deux équations; on ne peut espérer ici former un nombre fini de types d'équations à points critiques fixes auxquels toutes les autres soient réductibles, comme permet de le montrer la considération des fonctions automorphes; mais on peut espérer, en faisant usage de la simplifiée, obtenir certains résultats précis que M. Painlevé indique comme très vraisemblables.

Des théorèmes analogues s'appliquent aux équations différentielles d'ordre m quelconque à points critiques fixes, et fournissent notamment des renseignements précis sur la nature du coefficient différentiel $y^{(m)}$ considéré comme fonction algébrique de $y^{(m-1)}$, $y^{(m-2)}$, $y^{(m-3)}$.

8. Ainsi, en se limitant aux équations résolues par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé, la détermination des équations à points critiques fixes se trouve complètement effectuée dans le cas du deuxième ordre, est assez avancée dans le cas du troisième ordre et est abordée pour les ordres supérieurs.

Au point de vue de la théorie générale des fonctions, on peut espérer obtenir des résultats généraux importants en partant de propriétés approchées des nouvelles transcendantes uniformes introduites (propriétés telles que la croissance, la fréquence des zéros, etc.).

Dans la théorie des équations différentielles, les méthodes développées sont susceptibles de fournir des résultats importants, même quand il y a plusieurs variables indépendantes, pourvu que l'intégrale ne dépende que d'un nombre fini de constantes (théorie des fonctions abéliennes fondée sur des équations aux différentielles totales).

Les équations à points critiques fixes jouent un rôle dans une foule de questions, et ont été reliées par des théorèmes précis à la théorie des groupes continus, la théorie des intégrales premières des systèmes différentiels, etc.

Enfin les méthodes employées peuvent s'appliquer au domaine réel; en particulier, on a pu obtenir des résultats intéressants en ce qui concerne les équations de la Mécanique; il est important de rechercher les systèmes dont le mouvement est représenté par des fonctions du temps t qui restent régulières ou méromorphes pour toutes les valeurs réelles de t; on possède une méthode pour les mettre en évidence.

Picard (*E.*). — L'œuvre scientifique de Charles Hermite. (87-112). Leçon faite, à l'Université de Paris, le 9 mars 1901.

Kantor (*S.*). — Le genre maximum des courbes algébriques dans un espace à r dimensions. (113-120).

L'auteur démontre que le genre maximum d'une courbe algébrique d'ordre n dans un espace à r dimensions est

$$p_n = \frac{(n-1)(n-r)}{2(r-1)} - \frac{(q-1)(q-r)}{2(r-1)},$$

où q est le plus petit reste diminué de 1 de n par $r-1$. Si n est multiple de $r-1$, p_n est égal à $\frac{(n-1)(n-r)}{2(r-1)}$; pour toute valeur de $r \leq 8$, n étant quelconque, p_n est égal au plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{(n-1)(n-r)}{2(r-1)}$.

Ces résultats complètent ceux que l'auteur avaient obtenus antérieurement (*Acta math.*, t. XXI).

Picard (*E.*). — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la généralisation du problème de Dirichlet (extrait d'une lettre à M. Mittag-Leffler). (121-138).

Étant donnée l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

si l'on se propose de résoudre le problème de Dirichlet par un contour régulièrement analytique suffisamment petit, les coefficients a, b, c et leurs dérivées premières étant supposés continus, la méthode suivie par M. Picard, dans son Mémoire du *Journal de Liouville* (1890), suppose que la succession des valeurs données au contour admet des dérivées des trois premiers ordres. Si l'on suppose a, b, c *analytiques*, la simple continuité des données suffit.

Pour le démontrer, l'auteur reprend, en précisant tous les détails, la méthode par laquelle il a établi l'analyticité des intégrales de l'équation (1), en développant les coefficients a, b, c en séries trigonométriques. On obtient ainsi l'intégrale U prenant en tout point M d'un cercle C de centre O la valeur $f(\theta)$, $[\theta = xOM]$, f admettant des dérivées première et seconde; l'auteur montre que, dans toute aire intérieure à C, les modules de U et de ses dérivées premières et secondes sont limités à l'aide du module maximum de f. Ceci permet d'éliminer la condition relative aux dérivées de $f(\theta)$ et de supposer f simplement périodique et continue; il suffit, pour le montrer, de développer $f(\theta)$ en série dont les termes $f_n(\theta)$ sont des séries limitées de Fourier, et de former la série de solutions prenant la valeur $f_n(\theta)$ sur C.

Enfin, la limitation de la solution et de ses dérivées, au moyen du module maximum de f, subsiste quand f est simplement continue. La méthode peut s'étendre au cas de deux cercles concentriques.

Les résultats précédents montrent immédiatement que, si l'on a une suite u_1, u_2, ..., u_n, ..., de solutions de (1), telles que sur un contour C on ait $|u_n| < \varepsilon_n$, la série $\Sigma\varepsilon_n$ étant convergente, la série Σu_n converge à l'intérieur de C et y représente une solution de l'équation.

Mellin (H.-J.). — Sur le lien qui existe entre les équations différentielles et les équations aux différences linéaires. (139-164).

L'auteur poursuit, dans ce Mémoire, l'étude d'un point de vue déjà rencontré dans des travaux précédents (*Acta math.*, t. XXII), concernant l'extension aux *équations linéaires aux dérivées partielles à coefficients rationnels* de la méthode de Laplace, basée sur la relation de Lagrange entre une forme différentielle et son adjointe.

1. Les équations envisagées *peuvent être transformées formellement en une équation linéaire homogène aux différences partielles et inversement.* En se plaçant dans le cas de deux variables, on peut toujours ramener l'équation proposée à la forme symbolique

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} x^\mu y^\nu f_{\mu,\nu}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = 0 \qquad \text{où} \qquad f = \sum_{h,k} G_{h,k}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^h\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k.$$

La relation de Lagrange généralisée donne

$$\Phi \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} x^\mu y^\nu f_{\mu,\nu}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi - \varphi \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} f\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right) x^\mu y^\nu \Phi$$
$$= x\frac{\partial}{\partial x} P(\varphi, \Phi) + y\frac{\partial}{\partial y} Q(\varphi, \Phi),$$

P et Q étant des formes différentielles bilinéaires en φ, Φ. Remplaçons φ par $x^u y^v$ et Φ par une solution de l'équation

$$(1) \qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} f_{\mu,\nu}\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right) x^\mu y^\nu \Phi = 0.$$

Si les chemins d'intégration (x) et (y) sont tels que

$$\int_{(x)}\int_{(y)} \left(\frac{1}{y}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy = 0,$$

l'expression

$$F(u, v) = \int_{(x)}\int_{(y)} \Phi(x, y)\, x^{u-1} y^{v-1}\, dx\, dy$$

est solution de l'équation aux différences

$$(2) \qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} f_{\mu,\nu}(u, v)\, F(u-\mu, v-\nu) = 0.$$

Inversement, si F est solution de (2), l'intégrale

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{(u)}\int_{(v)} F(u, v)\, x^{-u} y^{-v}\, du\, dv$$

est solution de (1), pourvu que les chemins (u) (v) puissent être déplacés

respectivement de part et d'autre des droites $u = 1, \ldots, m$ et $v = 1, \ldots, n$, dans la direction de l'axe réel, sans que la valeur de l'intégrale change.

2. L'auteur s'occupe ensuite de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles, d'ordre quelconque, qu'il appelle *hypergéométriques*, et dont l'intégration se fait au moyen des solutions d'équations différentielles du premier ordre, résolubles au moyen des fonctions Γ. Si, p et q étant entiers, on pose

$$G(u, v) = a^u b^v P(u, v) \prod_{\nu=1}^{n} F(p_\nu u + q_\nu v + c_\nu),$$

$$P(u + 1, v) = P(u, v), \qquad P(u, v + 1) = P(u, v),$$

on a

$$(3) \qquad \begin{cases} G(u + 1, v) = \dfrac{f_1(u, v)}{g_1(u, v)} G(u, v), \\ G(u, v + 1) = \dfrac{f_2(u, v)}{g_2(u, v)} G(u, v), \end{cases}$$

les f, g étant des fonctions rationnelles entières, décomposables en facteurs linéaires en u, v, et satisfaisant à une certaine relation fonctionnelle.

Dans ces conditions, la fonction

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(u, v) x^{-u} y^{-v} \, dx \, dy,$$

satisfait au système

$$(4) \qquad \begin{cases} f_1\left(-x\dfrac{\partial}{\partial x}, -y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\Phi = g_1\left(-x\dfrac{\partial}{\partial x}, -y\dfrac{\partial}{\partial y}\right) x\Phi, \\ f_2\left(-x\dfrac{\partial}{\partial x}, -y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\Phi = g_2\left(-x\dfrac{\partial}{\partial x}, -y\dfrac{\partial}{\partial y}\right) y\Phi. \end{cases}$$

Les fonctions hypergéométriques de deux variables envisagées par M. Appell rentrent comme cas particulier dans les solutions des équations (4).

3. L'étude du lien entre les systèmes (3) et (4) résulte aisément de celle qui va être faite dans le cas d'une variable. Les équations correspondantes sont, dans ce cas,

$$(5) \qquad (a_0 - b_0 x) y + (a_1 - b_1 x) xy + \ldots + (a_m - b_m x) x^m y^{m+1} = 0.$$

$$(6) \qquad F(z + 1) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + (-1)^m z(z - 1) \ldots (z - m + 1)}{b_0 + b_1(z + 1) + \ldots + (-1)^m (z + 1) \ldots (z + m)} F(z)$$
$$= \frac{f(z)}{g(z)} F(z).$$

La solution générale de (6) est $P(z) G(z)$, avec

$$G(z) = \Gamma(z - \rho_1) \ldots \Gamma(z - \rho_m) \Gamma(1 + \sigma_1 - z) \ldots \Gamma(1 + \sigma_n - z),$$
$$P(z + 1) = (-1)^m P(z).$$

$\rho_1, \ldots, \rho_m$ et $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ étant les zéros de f et g. On en déduit que

$$(7) \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} P(z, m) G(z) x^{-z} \, dz$$

est solution de (5) [$P(z, m)$ étant une certaine forme de P avec m constantes arbitraires].

5 et 6. Ces paragraphes sont consacrés à démontrer que la fonction Φ, moyennant un choix convenable du chemin d'intégration, représente la solution générale de (5), à un terme additif près, qui est un polynome en x et $\log x$.

7. Le long de certains chemins on obtient pour Φ des intégrales qui appartiennent à la classe des fonctions de la forme

$$\Phi(x, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)\, x^{-z}\, dz.$$

$F(z)$ possédant la propriété suivante : on peut, dans le plan de la variable $z = u + iv$, choisir une bande $\alpha \leqq u \leqq \beta$, de telle sorte que F y soit régulière en tout point à distance finie, et prenne à l'infini la forme

$$|F(z)| = e^{\zeta|v|} f(u, v).$$

ζ étant positif, et f tel que $fe^{-\varepsilon v}$ reste fini quel que soit ε, ($\varepsilon > 0$).

Φ est d'ailleurs indépendant de a, si $\alpha < a < \beta$. De plus

$$F(z) = \int_0^{\infty} \Phi(x, a)\, x^{z-1}\, dz$$

relation qui constitue l'*inversion* de l'intégrale (8); il y a donc *réciprocité* entre F et Φ. L'étude de ces intégrales permet de trouver un très grand nombre d'intégrales définies qui se ramènent à des fonctions Γ.

8. On peut, dans l'intégrale (7), choisir P de telle sorte que $x^{\nu}\Phi$ tende vers zéro, quand x devient infini. On obtient facilement pour Φ un *développement asymptotique*, et les considérations développées dans les deux derniers paragraphes permettent d'étendre la méthode aux fonctions déduites (elles-mêmes ou leur logarithme) d'une fonction F comme il a été dit au paragraphe 7, pourvu que F soit méromorphe dans une bande parallèle à l'axe imaginaire.

(*A suivre.*)

ERRATA.

Page 158, sous la ligne 14 en montant, *lire :* E. Gau.

Page 158, ligne 5 en montant, *au lieu de :* à la ...normale, *lire :* aux courbes elliptiques normales.

Page 158, dernière ligne et page 159, 1re ligne, *au lieu de :* deux..... équianharmonique, *lire :* deux points donnés respectivement sur deux courbes soit non singulières, soit harmoniques, soit équiharmoniques.

Page 159, ligne 10 en montant, *lire :* Théorie des triplets d'éléments de.....

Page 160, dernière ligne, *enlever* $+ \rho$.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXV.

193

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXVI; 1912. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta mathematica. T. XXIV-XXV; 29-46, 185-192.
Annali di Matematica pura ed applicata. T. XVII, XVIII, XIX, 1889-1891; 14-17, 145-166.
Atti della R. Accademia dei Lincei. T. IV-V, 1895-1896; 5-13, 167-185.
Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. T. XLIV, 1908-1909; 102-111.
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, par MM. les Secrétaires perpétuels. T. CL-CLI, 1910; 47-61.
Journal de Mathématiques pures et appliquées. T. II, 1906; 18-29.
Journal für die reine und angewandte Mathematik. T. CXXXVIII-CXXXIX, 1910-1911; 61-96, 111-145.
Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Instituto di Bologna. 1er sem. t. IX-X, 1901-1904; 2e sem. T. I-VI, 1904-1909, 96-102.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Abate-Daga (G.). 107.
Adhémar (R. D'). 26.
Aimonetti (G.). 111.
Albenga (G.). 105, 106.
Amodeo (F.). 158-159, 161.
Arnodin. 59.
Arnoult (J.). 56.
Arnoux (R.). 52.
Arzela (C.). 97, 98.
Ascoli (G.). 165-166.
Autonne (L.). 55, 61.
Bachelier (L.). 24, 59.
Balbi (V.). 104.
Barré (E.). 55.
Beltrami (E.). 5, 8.
Bendixon (I.). 29-33.
Benetti (J.). 96, 97, 112.
Bernstein (S.). 50, 57, 59.
Bertini. 102-103.
Berzolari (L.). 8, 165, 172-174.
Bianchi (L.). 156, 162, 169-170.
Bigiavi (C.). 161, 164.
Birkeland (R.). 29.
Blondel (A.). 52.
Blutel (E.). 60.
Boggio (T.). 110.
Bohr (H.). 58.
Borel (E.). 43-46, 49, 50.
Bortolotti (E.). 174, 176.
Botasso (M.). 103, 105.
Boulad (F.). 49.
Bourlet (C.). 49.
Boussinesq (J.). 50, 51.
Bricard (R.). 57.
Brillouin (M.). 60.
Brioschi (F.). 180-181.
Buhl (A.). 55.
Burali-Forti (G.). 108-110.
Burgatti (P.). 183-185.
Canevazzi (S.). 98, 100, 101, 102.
Castelnuovo (G.). 152-153.
Cartan (E.). 59, 96, 145.
C. G. 29.
Chatelet (A.). 52, 53, 55, 59.
Chazy (J.). 50, 53, 57.
Chelli (F.). 107.
Chicca (A.). 104.
Ciani (E.). 12.
Ciconetti (G.). 110.
Cisotti (U.). 48, 107.
Colonnetti (G.). 105, 110.
Combebiac (G.). 19-20.
Cotton (E.). 50.
Cotty (G.). 50.
Darboux (G.), 49, 54, 58, 59.
Darmois (G.). 58.
Dell'Agnola (C. A.). 108.
Del Lungo (C.). 177.
Del Re. 181-182.
Demoulin (A.). 47, 48, 58, 59.
Denjoy (A.), 47, 50, 56.
Dienes (P.). 57.
Dini (U.). 182-183.
Donati. 96, 98, 100, 102.
Donder (Th. de). 58.
Drach. 56.
Dulac (H.). 27, 46.
Dumas (G.). 23.
Duport (M.). 46.
Eiffel (G.). 60.
Enriques (F.). 12, 171.
Etevé (A.). 49.

Faber (G.). 61-65.
Fabry (E.). 59.
Fano (G.). 106.
Fejer (L.). 50, 54, 65-68.
Fekete (M.). 53, 58.
Frænkel (M.). 79-80.
Fréchet (M.). 54.
Fubini (G.). 104-105.
Galbrun. 48, 61.
Galitzine (B.). 52, 53.
Gambera (P.). 110.
Garbasso. 104-105, 180.
Garnier (R.). 57.
Gatti (E.). 107.
Gau. 53, 54, 60.
Gerbaldi (F.). 17, 148-149.
Giudice (F.). 107.
Gramegna (H.). 107.
Grosschmid (L.-V.). 120-121.
Guarducci (F.). 97, 98, 100, 102.
Guareschi (I.). 110.
Guichard (C.). 47, 53.
Haag (J.). 51, 52, 53.
Haar (A.). 112-113.
Hadamard (J.). 51, 52, 56.
Hettner (G.). 68-73.
Horn (J.). 42-43, 81-86.
Hough (S. S.). 40-42.
Humbert (G.). 25-26, 49.
Jadanza (N.). 105, 110.
Janet (M.). 166.
Janiszewski (S.). 57.
Jarkowski (W.). 57.
J. H. 46.
Jordan (C.). 27-29.
Jouguet (M.). 18.
Jung (H. W. E.). 73-74, 88-96, 153.
Kantor (S.). 189.
Klein (F.). 17, 151, 155, 159-160, 163-164.
Knopp (K.). 76-79.
Koch (von H.). 33-34, 36-37.
Kœbe (P.). 86-88, 136-139.
Kœnigs (G.). 47.
König (D.). 112-113.
Korn (A.). 57.
Kowalewski (G.). 61.
Krolyff (N.). 48.
Lalesco (T.). 59, 60, 61.
Larori (H.). 55.
Larose (H.). 51.
Lattès (S.). 54.
Lebesgue (H.). 47.
Leffler (A.). 163.
Le Roux (J.). 47, 48, 49, 54, 56.
Letombe (L.). 56.
Levi-Civita. 168, 177-178, 179-180.
Lévy (P.). 52, 58, 60.
Lichtenstein. 54.
Lignagna. 104.
Lipschitz (R.). 35.
Maggi (G.-A.). 185.
Maillet (E.). 40.
Majorana. 168.
Marty. 50, 51, 53, 55.
Mazurkiewicz (E.). 57.
Mellin (H.-J.). 190-192.
Meyer (W. F.), 121.
Miller (G.-A.). 118.
Millosevich (E.). 9, 12, 170.
Mirimanoff (D.). 48, 140-145.
Mittag-Leffler. 37-39, 46.
Mollerup (J.). 48.
Müntz (Ch.). 115-118.
Nicoletti (O.). 13, 178.
Nœther (F.). 121-122.
Onivet. 53-54.
Padowa (E.). 9-10.
Pagliero (G.). 107.
Painlevé (P.). 185-188.
Palatini (F.). 105.
Panetti (M.). 105-106, 107, 110.
Paolis (R. de). 152.
Pascal (E.). 15, 17, 147-148, 149, 150, 151, 153-154, 155, 161-162, 171, 175-176.
Peano (G.). 12, 170.
Petot (A.). 52, 59.
Peyroleri (M.). 107.
Picard (E.). 50, 58, 188, 189.
Pincherle (S.). 10, 96, 98-99, 160, 167-168, 172, 175.
Pirondini (G.). 15, 17, 147, 149-150, 154, 163, 164.
Pizzetti (P.). 13, 169.
Plancherel (M.). 48.
Poincaré (H.). 20-23.
Pompéiu (O.). 49.
Predella. 16, 148.
Pringsheim (A.). 39.
Rajna (M.). 97, 98, 100, 101
Razzaboni (A.). 97, 101.
Remak (R.). 139-140.

Remoundos (G.). 18-19.
Rémy (L.). 51.
Renard (P.). 56.
Ricci (G.). 10-11.
Riesz (E.). 51.
Righi (A.). 100.
Rindi (S.). 13, 111, 195.
Robin (F.). 59.
Ruffini (F.-P.). 100.
Russyan (C.). 47, 52.
Sainte-Lagüe (A.). 58.
Saltykow (N.). 55.
Sannia (G.). 106, 108-109.
Santangelo (G.-B.). 110.
Saussure (R. de). 55, 58.
Schottky (F.). 111, 112.
Schur (J.) 123-135.
Scorza (G.). 109.
Segre (C.). 8.
Séguier (de). 51.
Sella (A.). 11, 12.
Servant (H.). 60, 61.
Sforza (G.). 107.
Sibirani (F.). 107.
Siacci (F.). 179.
Somigliana (C.). 14-15, 110, 146-147, 151, 156.
Soreau (R.), 56.
Steinbacher (F.). 118-120.
Stekloff (W.). 49, 51, 59, 60, 61.
Study (E.). 56.
Tacchini (P.). 9, 11, 167, 169, 170, 172, 176, 181.
Tanakadati (A.). 57.
Tedone (O.). 176, 177, 178.
Thomé (L.). 114-115.
Thue (A.). 75-76.
Torelli (G.). 164.
Tzitzéica (G.). 47, 52, 54, 60.
Vessiot (F.). 56.
Vergne (H.). 53.
Villat (H.). 60.
Vivanti (G.). 14, 145-146, 159.
Volterra (V.). 6-8, 170-171, 175.
Zona (T.). 168.
Zoretti (L.). 48, 55, 57, 61.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXVI.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
51541 Quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
B8
v. 47

Bulletin des sciences
mathématiques

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY